Alberto Benítez
Doctorado de Teoría Económica.
Universidad Autonoma Metropolitana. México D.F.

La mercancía patrón en la teoría de Piero Sraffa*

Lecturas de Economía. No. 32-33. Medellín, mayo-diciembre de 1990. pp. 45-68

• **Resumen.** *Al examinar casos particulares se pone de relieve que en la teoría de Sraffa no se puede defender la generalidad de la unicidad de la mercancía patrón ni que la invariabilidad de esta última esté suficientemente demostrada.*

• **Abstract.** *On examining particular cases it stands out that in Sraffa's theory the generality of the uniqueness of the commodity standard can not be defended nor that the invariability of the same is sufficiently demonstrated.*

* Este trabajo ha sido elaborado como parte de la preparación de nuestra tesis de doctorado "Los precios y la distribución del ingreso en modelos de producción simple" sostenida en la Universidad de París-X-Nanterre el 11 de junio de 1986.

Nuestros análisis deben mucho al profesor Carlo Benetti quien ha dirigido esta investigación. Le expresamos aquí nuestro vivo reconocimiento.

Este artículo apareció originalmente en francés en el número 12 de la revista *Cadrier d'Economie Politique* en 1986. La traducción española apareció en: *Economía: Teoría y Práctica.* No. 12. México, 1988.

En este artículo vamos a examinar las conclusiones expuestas por Sraffa (1960) a propósito de la unicidad de la mercancía patrón y de la "invariabilidad" de su valor. El propósito de nuestra comunicación es demostrar que, en general, dichas conclusiones no son correctas.

Primero, vamos a demostrar que -bajo ciertas condiciones- es posible definir varias mercancías homotéticas sobre la base del mismo sistema de producción original. Esto ha de permitirnos estudiar los efectos de los cambios de la distribución del ingreso en el precio relativo de dos mercancías homotéticas diferentes. Enseguida vamos a examinar la argumentación desarrollada por Sraffa para establecer la tesis de la "invariabilidad" del valor de la mercancía patrón y mostraremos que su demostración es insuficiente.

I. Pluralidad de las mercancías homotéticas

En el apéndice B de su libro, Sraffa nos presenta un sistema donde se produce una mercancía que entra en su propia producción en una proporción superior a **1/1+R,** donde **R** es la máxima tasa de ganancia en el sistema patrón formado exclusivamente por los bienes fundamentales.

Esta situación es calificada allí como muy rara, y, en otra ocasión, como aberrante[1]. Su interpretación, nos parece, no puede ser evaluada debidamente si no tomamos en cuenta consideraciones de orden empírico que no estamos en condiciones de abordar aquí, las cuales, por otra parte, no se encuentran tampoco en los trabajos de Sraffa.

Sin embargo, queremos indicar que en los casos de este tipo es posible definir varias mercancías homotéticas sobre la base de un mismo sistema de producción original lo que nos permite estudiar el efecto de un cambio de la distribución del ingreso sobre el precio relativo de dos mercancías homotéticas diferentes (véase el apéndice A). Vamos a mostrar esto por medio de un ejemplo:

Consideremos un sistema donde se producen solamente dos bienes b_1 y b_2 cuyos métodos de producción están definidos por las ecuaciones siguientes:

Sistema 1

$$0.1\ p_1\,(1+r) \qquad\qquad\qquad\qquad + l_1\, w = p_1$$

$$0.2\ P_1\,(1+r) + 0.2\ p_2\,(1+r) + l_2\, w = p_2$$

a partir de este sistema podemos definir dos sistemas homotéticos distintos:

Sistema 2

$$0.1\ p_1\,(1+r) + l_1\, w = p_1$$

1 Sraffa califica esta situación de aberrante en la nota al §35. La considera como muy rara en su intercambio de cartas con Peter Newman (publicado por Gilbert Facarello, 1977).

este sistema ha sido obtenido multiplicando las ecuaciones del sistema 1 por los factores $q_1 = 1$ y $q_2 = 0$ respectivamente. En todas las fases de la producción de b_1 la proporción entre las cantidades de trabajo y de medios de producción utilizados es (cuando $r = 0$) igual a 9. Para obtener que la cantidad de trabajo utilizada en este sistema sea la misma que en el sistema original basta con multiplicar su ecuación de producción por $1/1_1$.

Sistema 3

$$0.1\, p_1 (1+r) \qquad\qquad + l_1\, w = p_1$$

$$0.1\, p_1 (1+r) + 0.1\, p_2 (1+r) + 0.5\, l_2\, w = 0.5\, p_2$$

este sistema ha sido obtenido multiplicando las ecuaciones del sistema 1 por los factores $q_1 = 1$ y $q_2 = 0.5$ respectivamente. Un quinto del total producido de cada bien es utilizado como medio de producción y la proporción entre cantidades de trabajo y de medios de producción utilizados en cada una de las fases de la elaboración del producto neto es igual a 4. Para obtener que el sistema 3 emplee la misma cantidad de trabajo que el sistema original, basta con multiplicar sus dos ecuaciones por el factor

$$\frac{1}{l_1 + 0.5\, l_2}$$

Haciendo las sumas, ecuación por ecuación, de los sistemas 2 y 3, se obtiene el sistema 4 donde se producen simultáneamente las dos mercancías homotéticas $h_1 = b_1$ y $h_2 = (b_1, 0.5\, b_2)$

Sistema 4

$$0.2\, P_1 (1 + r) \qquad\qquad + 2\, l_1\, w = 2\, p_1$$

$$0.1\, p_1 (1 + r) + 0.1\, p_2 (1 + r) + 0.5\, l_2\, w\ 0.5\, p_2$$

Para que este sistema utilice la misma cantidad de trabajo que el sistema original, basta con multiplicar sus dos ecuaciones por el factor

$$\frac{1}{2\,l_2 + 0.5\,l_2}$$

Podemos ahora estudiar directamente, en este sistema, el efecto de los cambios en la distribución del ingreso sobre el precio relativo de dos mercancías homotéticas. Consideremos al valor de h_1 con relación al de h_2: el cociente

$$\frac{p_1}{p_1 + 0.5\,p_2}$$

varía entre un valor determinado superior a cero cuando $r = 0$ y cero cuando $r = 4$ (véase el apéndice B). Por otra parte, dado que se trata de una función continua de r, este cociente toma todos los valores comprendidos entre su nivel inicial y cero a medida que r aumenta entre 0 y 4.

Estos resultados nos permitirán mostrar, en la sección siguiente, que las conclusiones a las que llegó Sraffa a propósito del valor de la mercancía patrón no son correctas en general.

II. La "invariabilidad" del valor del patrón homotético

De acuerdo con Sraffa,

A. Una mercancía que haya sido producida de manera que la proporción entre cantidades de trabajo y de medios de producción utilizados sea la misma en todas las fases sucesivas de su producción, no tendría necesidad de "aumentar o descender su valor en relación con cualquier otra mercancía cuando los salarios se elevaran o descendieran" (§21)[2].

2 Indicamos entre paréntesis el parágrafo de "*Producción de mercancías por medio de mercancías*" de donde proviene cada cita. Hemos utilizado siempre la edición española de la editorial Oikos, salvo por leves modificaciones que efectuamos con base en el original inglés.

B. "Es verdad que, a medida que los salarios descienden, tal mercancía no sería menos susceptible que cualquier otra de aumentar o descender en precio respecto de otras mercancías individuales; pero, sabríamos con certeza, que tal fluctuación tendría su origen, exclusivamente, en las peculiaridades de la producción de la mercancía que estaba siendo comparada con ella y no en la de su propia producción" (§23).

Estas dos proporciones son incorrectas.

Por una parte, **A** es incorrecto puesto que en el sistema 4 tenemos dos mercancías que han sido producidas utilizando una misma proporción (para cada mercancía) entre cantidades de trabajo y de medios de producción en todas las fases sucesivas de su producción (véase el apéndice B) y, no obstante, su precio relativo se modifica cuando la distribución del ingreso cambia.

Por otra parte, **B** está igualmente equivocada.

En efecto: si, en el ejemplo que estudiamos, las variaciones del valor relativo de una de las dos mercancías (h_1 y h_2) es atribuido, exclusivamente, a las condiciones de produccion de la mercancía con la cual es comparada, la tesis de Sraffa se haya descalificada en los dos casos posibles. Basta para ello considerar la relación de intercambio inversa.

En consecuencia, de la misma manera que con los otros bienes, no podemos estar seguros de que una mercancía homotética no necesita cambiar su precio -independientemente de las particularidades de su producción- sino en el caso en que empleamos como unidad de medida esta misma mercancía o alguna otra que guarde con ella una relación de intercambio constante.

En la sección siguiente vamos a mostrar que se llega a los mismos resultados si suponemos que en el sistema de referencia hay una sola mercancía homotética.

III. El valor de la mercancía patrón y la "proporción crítica"

Sraffa llega a las conclusiones **A** y **B** sobre la base de los análisis que desarrolla en el capítulo 3 de su libro. Considerando la argumentación que allí se expone vamos a mostrar que:

a. El razonamiento desarrollado en el capítulo 3 es suficiente para demostrar las conclusiones arriba citadas, solamente en los casos en que la variación de la distribución del ingreso considerada consiste en la disminución del salario (medida con el producto neto) de $w1 \in [1, 0]$ hasta cero.

b. La puesta en evidencia de esta condición tiene como consecuencia que, sobre las bases de los argumentos presentados en el capítulo 3, el valor de la mercancía patrón debe ser considerado tan susceptible de sufrir variaciones como el precio de cualquier otra mercancía. Siendo esto debido a las particularidades de su producción, contrariamente a lo que se indica en las citas presentadas anteriormente.

A continuación vamos a exponer estos tres puntos sucesivamente:

En el capítulo 3 de su libro, Sraffa ha demostrado que las proposiciones siguientes son correctas:

C. Habría una "proporción crítica" entre el trabajo y los medios de producción que marcaría la frontera entre las industrias con "déficit" y con "excedente" (§17) si "los precios permanecen *de hecho* inalterados cuando el salario disminuye y [...] una tasa de ganancias aparece" (§ 16).

D. Una rama industrial que utiliza la "proporción crítica" entre el trabajo y los medios de producción en todas las fases sucesivas de su producción "no experimentaría la necesidad, resultante de las condiciones de producción en la propia industria, de aumentar o descender en valor su producción en relación con cualquier otra mercancía cuando los salarios se elevaran o descendieran [...]" (§ 21).

E. Cuando hacemos el salario igual a cero y la totalidad del producto neto va a los beneficios [...] "La única razón-valor" que puede no variar ante los cambios en el salario, y que es, por lo tanto, capaz de ser "recurrente" en el sentido definido en la sección 21, es aquella que es igual a la tasa de ganancia que corresponde al salario cero. Y esa es la razón "equilibrada".

Por otra parte una mercancía producida de tal manera que la proporción entre el valor del producto neto (de la rama correspondiente) y el valor de sus medios de producción es la misma en todas las fases sucesivas de su elaboración cuando w = 1, posee también una proporción entre cantidades de trabajo y de medios de producción que es la misma en cada una de estas fases (véase el apéndice B) en consecuencia:

F. Cuando el salario disminuye hasta cero la "proporción crítica" es igual a **R.** Como consecuencia de **D**, de **F** y del hecho que la mercancía homotética posee, en todas las fases sucesivas de su producción, una proporción entre cantidades de trabajo y de medios de producción igual a **R** cuando (w = 1) se llega a la siguiente conclusión:

G. La mercancía homotética "no experimentará la necesidad, resultante de las condiciones de producción en la propia industria, de aumentar o descender en valor en relación con cualquier otra mercancía cuando los salarios [...] descendieran hasta cero".

Entendemos este resultado de la manera expuesta a continuación:[3]

Sea h la mercancía homotética y v el valor de los medios de producción utilizados en su producción cuando el salario es igual a w_1.

3 Según el §13 de la unidad de medida utilizada en el capítulo 3 (al menos al principio) es el producto neto del sistema. Sin embargo, en la nota al §15 así como también en el §16, Sraffa sugiere que toda otra unidad de medida es igualmente válida. En consecuencia, estamos autorizados a utilizar exclusivamente el producto neto como unidad de medida en nuestro estudio del capítulo 3. Conviene agregar que las conclusiones a las que llegamos son igualmente válidas si se consideran otras unidades de medida siempre que se utilice a la misma a lo largo de todo el razonamiento. Por otra parte, para simplificar la exposición, hablaremos indistintamente de mercancías simples y compuestas.

También supondremos que en el sistema de referencia se produce efectivamente una sola mercancía homotética.

Cuando el salario y los precios se miden con el producto neto del sistema de la siguiente ecuación se verifica $\forall$ w1 tal que 1 > w1 > 0.

(1) $V(1 + r_1) + l_h w_1 = (1 + R) V$

en donde l_h es la cantidad de trabajo utilizada y la r_1 la tasa de ganancia correspondiente.

Supongamos que los precios se mantienen *de hecho* fijos cuando el salario disminuye desde w_1 hasta cero. La h-ésima industria estaría igualmente "en equilibrio" con el nuevo valor del salario y la tasa de ganancia correspondiente, en efecto substituyendo en la ecuación (1) w_1 con 0 y r_1 con **R** obtenemos

(2) $V(1 + R) + 0 = (1 + R) V$

Por otra parte esto también es válido para todas las otras fases de la producción de h (véase el apéndice B), en consecuencia esta industria no tendrá necesidad, debido a las particularidades de su producción, de modificar el precio inicial de su producción, cuando la distribución del ingreso cambia de la manera indicada. Es posible que el precio de h cambie con relación al de algún otro bien (en este caso con relación al producto neto) pero podemos estar seguros que esta variación no es necesaria en lo que respecta al "equilibrio" en las diferentes fases de la producción de h. En este sentido, la tesis de Sraffa nos parece correcta para toda reducción del salario de w_1 hasta cero $\forall\, w_1 \in [1, 0]$. Sin embargo, Sraffa no ha demostrado que h posee la propiedad indicada en la proposición G para todos los cambios posibles de la distribución del ingreso. En el contexto del capítulo 3 hubiera sido necesario probar que R es la "proporción crítica" que corresponde a todas las variaciones posibles de la distribución del ingreso entre salarios y ganancias.

Ahora bien, éste no es siempre el caso, como lo veremos enseguida.

En efecto:

H. Cuando el salario, medido con el producto neto cambia de w_1 a w_2 ($1 \geqslant w_1 \geqslant 0$ y $1 \geqslant w_2 > 0$) "la proporción crítica" es igual a R solamente si el valor relativo del producto neto con relación a h no se ve modificado.

Prueba. Supongamos que el valor del producto neto cambia con relación a h cuando el valor del salario cambia de w_1 a w_2 y que al mismo tiempo, la "proporción crítica" sea igual a R ($1 \geqslant w \geqslant 0$ y $1 \geqslant w_2 > 0$). Vamos a mostrar que se llega a una contradicción. Sea r_2, la tasa de ganancia que aparece como consecuencia de este cambio. Puesto que, por hipótesis, R es la "proporción crítica" y h ha sido producido utilizando esta proporción, en todas las fases sucesivas de su producción se sigue que la h-ésima industria tiene que estar "en equilibrio" sobre la base de los precios iniciales, según la definición de la "proporción crítica". En consecuencia la siguiente ecuación tiene que verificarse:

$$(3) \quad V(1 + r_2) + l_h w_2 = (1 + R) V$$

en donde V es el valor de los medios de producción utilizados en esta rama (medidas con el producto neto) cuando el salario es igual a w_1.

Supongamos ahora que los precios no permanezcan fijos en sus niveles iniciales sino que puedan éstos cambiar para restaurar el equilibrio en todas las industrias. La ecuación de la producción de la h-ésima rama industrial será:

$$(4) \quad V'(1 + r_2) + h\, w_2 = (1 + R) V'$$

donde V' es el valor de los medios de producción de h medida con el producto neto.

A diferencia de lo que ocurre cuando $w^2 = 0$, si $w^2 > 0$, las ecuaciones (3) y (4) pueden ser satisfechas simultáneamente solamente si V = V' pero en este caso el valor del producto neto con relación a h será el mismo antes (1/V) como después (1/V') del cambio del salario lo cual contradice la hipótesis adoptada en un principio. Esto termina la demostración de la proposición H.

De acuerdo con la proposición H, si el precio relativo del producto neto con respecto a h no es el mismo antes como después del cambio en el salario la "proporción crítica" correspondiente a esta variación de la repartición (R') será diferente de R. Por ello el valor de h deberá cambiar puesto que, a causa de las particularidades de su producción, las diferentes fases de su elaboración se encontrarían todas juntas, ya sea en "exceso" ya sea "en déficit".

En efecto, la única mercancía producida empleando la misma proporción entre cantidades de trabajo y de medios de producción en todas las fases de su elaboración que puede conservar su valor original, a pesar de este cambio en la distribución del ingreso, debe tener una "proporción crítica" igual a R'. Esto es así independientemente de toda consideración sobre la posibilidad de definir una tal mercancía sobre la base del sistema de referencia.

En consecuencia, el valor relativo de h con respecto al producto neto debe cambiar (a causa de las particularidades de la producción de h) cuando el precio del producto neto cambia con relación a h ($\forall\ w_2 \geq 0$).

De esta manera la misma condición que es necesaria para la estabilidad del valor relativo de h respecto al producto neto es suficiente para garantizar la invariabilidad del precio relativo de todo otro bien, es decir, que el bien que le es comparado no cambia en valor con relación a él.

Por lo tanto h posee la "proporción crítica" para todos los cambios posibles de la distribución del ingreso solamente si se utiliza como unidad de medida esta misma mercancía o bien otra que guarda con ella una relación de intercambio constante. En efecto, es solamente en este caso que podemos estar seguros de que la industria que la produce no tiene necesidad de cambiar el precio de su producción cualquiera que sea la variación del salario considerado.

Sin embargo, la misma cosa es válida para todo otro bien (b):

Cuando se escoge un bien como unidad de medida, fijamos por este hecho su valor igual a la unidad y agregamos, de esta manera, una condición más a la determinación del sistema de precios.

En estas condiciones cuando la distribución del ingreso cambia y una nueva tasa de ganancia aparece, el conjunto de los precios se modifica de manera a restablecer el "equilibrio" en todas las industrias en función de

a. las condiciones de producción de los bienes definidos en las ecuaciones de producción, y

b. la ecuación $p_b = 1$.

En consecuencia cualesquiera que sean las particularidades de la producción de b, podemos estar seguros que la tasa de ganancia y los precios que surgen después de un cambio de la distribución del ingreso restablecen "el equilibrio" en todas las fases de la producción de b sin que el precio de este bien se vea modificado.

A este respecto, lo que es propio a h cuando se le utiliza como unidad de medida es que no solamente esta mercancía, sino además los conjuntos de bienes de producción utilizados en cada una de las fases de su elaboración conservan su precio a pesar de los cambios de salarios. De esta manera, si los precios se mantienen, *de hecho*, invariables cuando la repartición se modifica, la industria homotética estaría en "equilibrio" en todas estas fases sobre la base de los precios originales.

Por el contrario si se utiliza otra unidad de medida b resulta normal que el valor de los conjuntos de medios de producción empleados en las diferentes fases de su elaboración cambie cuando la distribución del ingreso se modifica. En este caso, si los precios se mantienen, *de hecho*, invariables cuando el salario se modifica y una nueva tasa de ganancia aparece, ciertas fases de la producción de b podrían estar "en excedente" mientras que otras podrían estar en "déficit".

Sin embargo, esto no significa que el precio de la producción de la b-ésima rama industrial deba cambiar. Al contrario como ha sido señalado más arriba, podemos estar seguros de que, independientemente de las condiciones de produccion de b, la b-ésima industria no tendrá necesidad de modificar el precio de su producción a pesar de todas las variaciones que un cambio en el salario pueda traer sobre la tasa de ganancia y sobre los precios.

En consecuencia las particularidades de la producción de h no agregan nada a la invariabilidad de su precio, cuando se le utiliza como unidad de medida con respecto a la invariabilidad del precio de todo otro bien que sea utilizado en esta función.

Dado que h es una fraccion alícuota de la mercancía patrón, lo que acaba de ser indicado a propósito de la primera es también válido con relación a la segunda.

Apéndice A[4]

En este apéndice vamos a mostrar cómo es posible construir -si ciertas condiciones se ven satisfechas- varios sistemas homotéticos sobre la base del mismo sistema de producción original. En segundo lugar habremos de determinar el número de estos sistemas.

Desde un punto de vista matemático, la construcción de un sistema homotético que produce bienes no fundamentales consiste en definir

---

4 En nuestra contribución a la mesa redonda "Sraffa: 25 años después", llevada a cabo en Niza en diciembre de 1985, "Los sistemas homotéticos y la teoría del valor de Piero Sraffa", presentamos una primera versión de este apéndice.

En su contribución al mismo evento "La ambigüedad de la mercancía patrón" los Señores Abraham Fois y Berrebi hacen referencia a la pluralidad de las mercancías homotéticas presentando una interpretación diferente a la nuestra. La versión definitiva ha sido sensiblemente mejorada gracias a las observaciones del profesor Christian Bidard, a quien le expresamos nuestro agradecimiento.

un vector positivo asociado al valor propio máximo de una matriz semipositiva indescomponible.

Este problema ha recibido una solución general en los trabajos de Frobenius. Por esta razón, lo esencial de nuestra tarea consiste en plantear en los términos matemáticos correspondientes las condiciones que definen este tipo de sistemas.

Para simplificar la exposición vamos a utilizar la expresión "participar en la producción de", en el sentido de directa o indirectamente salvo cuando se indique su utilizacion en un sentido diferente.

Llamaremos "clase" a un conjunto de bienes definidos por a| cada bien participa en la producción de todos los bienes del conjunto y b| dos bienes que participan el uno en la producción del otro pertenecen a la misma clase.

En un sistema de producción dado puede haber varias clases. Por ejemplo, un sistema que produce, además de los bienes fundamentales, un bien no fundamental que participa en su propia producción posee al menos dos clases:

Al lado de los bienes que integran las clases se encuentran normalmente otros bienes que no participan ni directa ni indirectamente en su propia producción. Llamaremos grupo indistintamente un bien de este tipo o una clase.

No es difícil darse cuenta que dos grupos distintos no poseen ningún bien en común. Por otra parte, si a y b son dos grupos diferentes tales que a participa en la producción de b entonces este último no participa en la producción de a. En efecto, se deduce, de las definiciones precedentes, que dos grupos que participan el uno en la producción del otro poseen al menos un elemento en común.

Podemos asociar a cada grupo e una serie **Se** = e, g, f,... que contiene, además de e, la totalidad de los grupos que participan en su producción, colocando estos grupos de manera que ninguno de ellos participe en la producción de los grupos que se encuentran a su derecha en Se. Esta serie es única salvo por orden de sucesión correspondiente a dos grupos tales que ninguno participe en la producción del otro.

Si bien el número de grupos que puede contener una serie de este tipo no debe ser muy elevado, nos parece posible encontrar, en una economía normal, varias series compuestas por al menos dos clases. Tal es el caso de un sistema en el cual, al lado de los bienes fundamentales, se producen dos bienes que participan en su propia producción sin que uno de ellos participe en la producción del otro.

Ahora vamos a definir las condiciones que deben ser satisfechas para que sea posible construir un sistema homotético que produce los bienes de una serie **Se** formada por t grupos ($t > 1$):

Asignamos índices de la manera siguiente:

1. Cada grupo tendrá como índice el lugar que le corresponde en **Se** contando a partir de la izquierda.

2. Sea **n** el número de bienes contenidos en **Se**, asignamos a cada bien uno de los n primeros números naturales bajo dos restricciones:

a. Cada número debe ser asignado a un solo bien y

b. si $a < b$ los bienes del grupo a deben tener índices inferiores a los del grupo b.

Por otra parte, sea a_{ij} la cantidad del bien j consumida en la producción de una unidad del bien i ($i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$). Si q_i es la cantidad del bien i producida en un sistema homotético construido sobre la base de **Se** la cantidad del bien j utilizada en la producción de las q_i unidades i será $a_{ij}\, q_i$.

Se dice que un sistema es homotético si la proporción entre la cantidad producida de cada bien y la cantidad del mismo bien utilizada como medio de producción en el sistema, es la misma para todos los bienes. Sea α esta proporción. Tenemos una ecuación de tipo

$$(1)\ \Sigma\ a_{ij}q_i = \frac{1}{\alpha}\ q, \text{ para cada j.}$$

Se deduce de esta definición que no es posible construir un sistema homotético con los bienes de una serie **Se** correspondiente a un bien que no participa en su propia producción. En efecto, la proporción entre la cantidad producida de este bien y la cantidad del mismo bien consumida en la producción de los bienes de su serie (igual a cero) no está determinada. Por este motivo habremos de tomar en cuenta, en lo sucesivo, solamente las series correspondientes a las clases.

Sea i_k el más pequeño y s_k el más grande entre los índices correspondientes a los bienes del grupo k ($b,k = 1,2,\ldots t$). Dado que los bienes pertenecientes a este grupo no participan en la producción de los bienes contenidos en los grupos que se encuentran a la derecha de k en **Se** tenemos $a_{ij} = 0\ \forall\ (i,j)$ tal que $i > s_k + 1$ y $j < s_k$. Esto nos permite escribir las ecuaciones de tipo (1) correspondientes a los bienes del grupo k bajo la forma:

$$(2)\ \sum_{i=1}^{s_1} a_{ij}\, q_i + \sum_{i=1_2}^{s_2} a_{ij}q_i + \ldots + \sum_{i=1_k}^{s_k} a_{ij}q_i = \frac{1}{\alpha}\ q_j$$

Podemos escribir las $s_k - i_k + 1$ ecuaciones de tipo (2) correspondientes a los bienes del grupo k bajo la forma matricial.

$$(3)\ A_{1k}\, Q_1 + A_{2k}\, Q_2 + \ldots + A_{kk}\, Q_{kk} = \frac{1}{\alpha}\ Q_k$$

En donde

$$A_{bk} = \begin{bmatrix} a_{i_b,k} & a_{i_b+i,\, i_k} & \dots & a_{g_b,i_k} \\ a_{i_b,i_k+1} & a_{i_b+1,\, i_k} & \dots & a_{g_b,i_k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_b,g_k} & a_{i_b+1,\, s_k} & \dots & a_{g_b,s_k} \end{bmatrix} \quad y\ Q_b = \begin{bmatrix} q_{i_b} \\ q_{i_b} \\ \vdots \\ q_{g_b} \end{bmatrix}$$

Si el grupo k es una clase A_{kk} es una matriz semipositiva indescomponible mientras que si K es un bien que no participa en su propia producción $A_{kk} = [0]$.[5] Sea λ_k el valor de Perron correspondiente a A_{kk}.

El sistema formado por las t ecuaciones de tipo (3) puede escribirse bajo la forma:

$$(4) \quad AQ = \frac{1}{\alpha} Q$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1t} & A_{2t} & A_{tt} \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_t \end{bmatrix}$$

---

5 En efecto, para toda pareja de índices (i,j) en A_{ee} es posible definir un conjunto de coeficientes $L = (a_{e1,e2'}\ a_{e2,e3,}\ a_{e3,e4,} \dots a_{et,j})$ en A_{ee} tal que $a_{i,e1}\ a_{e1,e2\dots}\ a_{et,j} > O$ puesto que el bien j participa directa o indirectamente a la producción del bien i, la cual implica que existe un conjunto de bienes $L' = (b_{i,}\ b_{e1,}\ b_{e2,\dots,}\ b_{et\ bj})$ pertenecientes todos a la misma clase y tales que cada uno de ellos participa directamente a la producción del bien que se encuentra a su izquierda en L' lo cual significa que los elementos de L son todos superiores a cero (véase sobre este punto el libro de Scwartz).

La diagonal principal de A está compuesta exclusivamente de matrices indescomponibles y de matrices nulas de formato (1) X (1) mientras que todas las matrices que se encuentran a la derecha de esta diagonal son nulas[6]. Por otra parte, puesto que cada grupo k (para k > 1) participa en la producción del primer grupo, existe al menos un bien en k que participa directamente en la producción de un bien perteneciente a un grupo b (donde b < k). En consecuencia hay al menos una matriz $A_b = 0$ tal que b < k para cada k > 1.

En estas condiciones existe una solución positiva para la ecuación (4) si y solamente si las dos proposiciones siguientes se verifican:

a. $\frac{1}{\alpha} = \lambda_1$ y (si t > 1) **b.** $\lambda_1 > \lambda_k \;\; \forall$ k. Esta solución está determinada ...

La condición **a** se satisface haciendo = $1/\lambda$. En consecuencia podemos formular los resultados siguientes:

Es posible construir un sistema homotético que produce los bienes de la serie de una clase si 1) la serie contiene una sola clase o bien si 2) el valor de Perron asociado a esta clase es superior al valor de Perron correspondiente a cada una de las demás clases de su serie.

Este sistema está determinado y la proporción entre la cantidad producida de cada bien y la cantidad del mismo bien utilizado como medio de producción en el sistema es igual a $1/\lambda$ en donde λ es el valor de Perron asociado a la clase correspondiente.

---

6 Se puede consultar sobre este punto el Teorema 7 presentado por Gantmatcher (1966) en el 5 del capítulo 13 de su libro. Conviene indicar que si bien en el enunciado de este teorema se habla exclusivamente de matrices *convexas* en la diagonal de A la demostración ahí expuesta es suficiente, también, si se admite que en dicha diagonal puede haber matrices nulas de formato (1) X (1).

En los sistemas construidos sobre la base de una serie $\mathbf{S}_e$ dada hay al menos un bien en cuya producción participan cada uno de los bienes de $\mathbf{S}_e$. Llamaremos simple a un sistema de este tipo.

El número de sistemas homotéticos simples que es posible construir sobre la base de un sistema de producción dado es igual al número de clases que satisfacen las condiciones 1 ó 2 indicadas más arriba. En efecto, el conjunto de bienes que integran la serie de una clase, así como el valor de Perron asociado a cada clase, están determinados de una manera unívoca.

Además de los sistemas simples es posible construir otros sistemas homotéticos que no son simples. Por ejemplo, consideremos un sistema de producción donde se encuentran las series (a), (e,a) y (k,a) en donde a,e y k son clases tales que $\lambda_e = \lambda_k$ y $\lambda_k > \lambda_a$. En este caso, además de los tres sistemas simples correspondientes a las tres series, es posible definir un cuarto sistema homotético que produce los bienes de las tres clases.

Observación

Se entiende por mercancía "equilibrada" una mercancía que ha sido producida utilizando la misma proporción entre cantidades de trabajo y de medios de producción en todas las fases de su producción.

Miyao (1977) ha estudiado -el primero, a nuestro conocimiento- la determinación del número de mercancías equilibradas que es posible definir sobre la base de un sistema de producción dado.

El número de estas mercancías puede ser diferente al de las mercancías homotéticas según el sistema de que se trate.

Por ejemplo, en el § 15 de *Producción de mercancías por medio de mercancías*, Sraffa hace referencia a un sistema donde la proporción entre cantidades de trabajo y de medios de producción utilizados es la misma en todas las industrias.

Si en este sistema existe una sola clase será posible construir un solo sistema homotético mientras que el número de las mercancías "equilibradas" será infinito. En efecto, toda colección de bienes pertenecientes a este sistema habrá sido producida utilizando la misma proporción entre cantidades de trabajo y de medios de producción en todas las fases sucesivas de su producción.

Las mercancías "equilibradas" también han sido estudiadas por Abraham Frois y G. Berrebi E. (1978), Ch. Bidard (1978) y A. D'Autume (1985).

Apéndice B

Llamamos mercancía homotética (MH) al vector línea de los bienes producidos por un sistema homotético.

Vamos a mostrar que toda mercancía homotética es producida de tal manera que el valor de los medios de producción utilizados y el valor de los salarios pagados guardan la misma proporción en todas las fases sucesivas de su elaboración.

Sea F el vector-línea de los medios de producción utilizados en la producción de MH. Tenemos que

$$F = \frac{1}{1 + R} MH$$

En donde $1 + R$ es la proporción entre la cantidad producida de cada bien y la cantidad del mismo bien utilizada como medio de producción en el sistema.

La relación anterior nos permite escribir la ecuación de producción de MH de la manera siguiente:

(1) $(1 + r) F P + w L = (1 + R) FP$

En donde P es el rector-columna de los precios correspondientes a los bienes de MH, L es la suma de las cantidades de trabajo (o de las unidades de salario) utilizadas en la última etapa de producción de MH y w es el valor de la unidad de salario medida en una unidad de medida cualquiera (siempre que P esté medido en la misma unidad).

Para obtener la ecuación de producción correspondiente a la penúltima fase de producción de MH basta con dividir (1) por R. En efecto obtenemos así:

$$\frac{1 + r}{1 + R} \quad FP + \frac{w}{1 + R} \quad L = FP$$

En forma análoga para obtener la ecuación correspondiente a la t-ésima fase de la producción de MH (contando a partir de la última), basta con dividir la ecuación (1) por $R^{(t-1)}$. Se obtiene de esta manera:

(2)

$$\frac{1 + r}{(1 + R)^{(t-1)}} \quad FP + \frac{w}{(1 + R)^{(t-1)}} \quad L =$$

$$\frac{1}{(1 + R)^{(t-2)}} \quad FP; \ \forall \ t \in N$$

Para obtener la proporción entre el valor del salario y el valor de los medios de producción utilizados en la t-ésima fase dividimos (2) por

$\frac{1}{(1 + R)^{(t-1)}}$ FP , obteniendo así:

$$(1 + r) + \frac{wL}{FP} = 1 + R$$

$$(3)\ \frac{wL}{FP} = R - r$$

De donde se sigue que el valor de esta proporción en cada una de las etapas es igual al valor que ella tiene en la primera etapa.

Por otra parte la ecuación (3) nos muestra que el valor de MH en unidades de salario se acerca a $+\infty$ cuando $r \rightarrow R$ mientras que si $r < R$ el valor de MH es un número real positivo.

Bibliografía

Abraham, Frois G. y Berrebi, E. (1978). "Pluralite des marchandises patron: existense et construction". *Revue d'Economie Politique*. No. 5. Septiembre-octubre 1978.

Abraham, Frois G. y Berrebi, E. "L'ambiguité de l'étalon". Contribución al coloquio: *Sraffa: 25 ans aprés,* organizado por Latapses, Niza, 1985.

D'Autume, Antoine, (1985). "Prix, taux de profit et étalons". *Revue de Economie Politique*. No. 1, enero-febrero, 1985.

Benítez, Alberto. "Les systémes hemotetiques et la théorie de la valeur de Piero Sraffa". Contribucion al coloquio: *Sraffa: 25 ans aprés,* organizado por Latapses, Niza 1985.

Benítez, Alberto, (1986). *Les prix et la repartition du revenu dans un modéle de production simple*. Tesis de Doctorado, París - X - Nanterre.

Faccarello, G. y Ph. de Lavergre (1977). "Correspondencia entre P. Sraffa y Peter Newman". Publicada en *Une nouvelle approche en Economíe Politique*. Económica, París.

Maurisson, P. (1974). *La théorie des prix de production: essai sur les travaux de Piero Sraffa,* tesis de Doctorado, París-I.

Gantmacher, F.R. (1966). *Theorie des matrices.* Tomo 2. Dunod, París.

Miyao, Takahiro. "A Generalization of Sraffa's Standard Commodity and its Complete Characterization". *International Economic Review.* vol. 18, feb. 1977.

Pasinetti, L. (1985). *Lecons sur la theorie de la production.* Dunod, París.

Schwartz, J. (1962); *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics.* Gordon and Breach, New York.

Sraffa, Piero, (1965). *Producción de -mercancías por medio de mercancías.* Ediciones Oikos-tau, Barcelona.