Las funciones homogéneas y su uso en economía
(Nota didáctica)

Pedro Ramírez M.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Antioquia

Introducción

En algunos temas económicos el estudioso se puede preguntar por el efecto que produce en el valor de una determinada función la modificación de las variables que la definen. En el caso particular en que un aumento o disminución en una proporción fija de las variables independientes produzca un aumento o disminución proporcional en el valor de la función, se dice que la función es homogénea.

Las funciones homogéneas encuentran abundante y variada aplicación en la formulación matemática de modelos económicos. Aparecen en las funciones de demanda de bienes, de utilidad, de demanda de dinero y, especialmente, en las funciones de produción; tal es el caso de las llamadas CES y de Cobb-Douglas.

Este trabajo pretende recopilar algunas propiedades fundamentales de las funciones homogéneas, dando su demostración matemática y, hasta donde nos sea posible, alguna interpretación. Se ha dividido el documento en tres secciones: primero se definen las funciones homogéneas. La segunda trata de funciones homogéneas de una variable, en ella se da la forma general de las funciones homogéneas de este tipo y, aunque puede parecer redundante con las propiedades que se darán mas adelante en forma general, se prueba el teorema de Euler. En la tercera sección se generalizan las propiedades de las funciones homogéneas para cualquier número finito de variables independientes. La notación usada es la que se acostumbra en los cursos de cálculo que se imparten en nuestro medio.

I. Funciones homogéneas

A. Definición

Una función $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ se dice que es *homogénea de grado n* si para todo $t>0$ se verifica que

$$f(tx_1, tx_2, ... tx_m) = t^n f(x_1, x_2 .....x_m)$$

Es decir, una función es homogénea de grado n, si al multiplicar por una cantidad $t>0$ todas las variables, el valor de la función queda multiplicado por t_n.

Cuando el grado de homogeneidad es uno se dice que la función es *linealmente homogénea*. Evidentemente, ello no quiere decir que la función sea lineal en el sentido algebraico.

Ejemplos:

1. La función de producción $z = f(K,L) = AK^aL^b$, donde A, a y b son constantes, es homogénea de grado a+b.

En efecto, sustituyamos K por tK y L por tL en la expresión para z.

$$f(tK,tL) = A(tK)^a(tL)^b = At^aK^at^bL^b = At^{a+b}K^aL^b = t^{a+b}f(K,L).$$

2. La función de producción de Cobb-Douglas[1], $z=f(K,L)=AK^{a}L^{1-a}$ es linealmente homogénea. Obsérvese que esta función no es lineal.

3. La función de producción CES[2], $f(K,L) = (AK^{-a}+BL^{-a})^{-1/a}$ es linealmente homogénea.

$$\begin{aligned} f(tK,tL) &= [A(tK)^{-a}+B(tL)^{-a}]^{-1/a} = [At^{-a}K^{-a}+Bt^{-a}L^{-a}]^{-1/a} \\ &= [t^{-a}(AK^{-a}+BL^{-a})]^{-1/a} = t(AK^{-a}+BL^{-a})^{-1/a} \\ &= tf(K,L) \end{aligned}$$

4. La función Cobb-Douglas se puede generalizar para un número m de factores de producción y sigue siendo homogénea. Si denotamos los factores de producción por $x_1, x_2,\ldots,x_m$ la función

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = A\prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i}$$

es homogénea de grado $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$

5. Similarmente, la función CES puede ser generalizada para m factores de producción y continúa siendo homogénea de grado uno.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left[\sum_{i=1}^{m} A_i x_i^{-a}\right]^{-\frac{1}{a}}$$

---

1 Esta función de producción data desde 1928 cuando el economista americano P. Douglas en colaboración con el matemático Cobb, quisieron determinar empíricamente el influjo del gasto de capital y de trabajo sobre la magnitud de la producción en la industria de transformación de Estados Unidos. Desde entonces los tipos de funciones de producción que más se utilizan, tanto en el análisis teórico como estadístico, son las diversas versiones de la función Cobb-Douglas.

2 La función de producción CES (Constant Elasticity Substitution) fue elaborada por los economistas y econometristas americanos K. J. Arrow, H.B. Chenery, B.S. Minhas y R. M. Solow en 1961. A diferencia de Cobb-Douglas estos autores partieron de que la elasticidad de la sustitución no es igual a la unidad.

B. Interpretación

Si consideramos un sistema económico cuya producción dependa sólo de dos factores relacionados con el producto mediante una función $z = f(x,y)$ homogénea de grado n, y limitamos t a valores positivos, podemos interpretar el concepto de homogeneidad de la siguiente manera:

1. Si $n=0$ entonces cualquiera sea $t>0$, $f(tx,ty) = f(x,y)$, es decir, variaciones proporcionales en las cantidades de los factores no modifican la cantidad del producto. O de otra forma: si para producir una unidad del producto requerimos, por ejemplo, tres unidades del primer factor y cinco unidades del segundo, al duplicar, triplicar o reducir a la mitad cada uno de los factores, la cantidad producida en cada caso seguirá siendo una unidad.

2. Si $n=1$, se tiene que $f(tx,ty) = tf(x,y)$, esto es, el producto varía en la misma proporción en que lo hacen los factores y, por lo tanto, el rendimiento por unidad de cada factor permanece constante. En este caso se dice que la tecnología empleada por el sistema económico tiene *rendimientos constantes a escala.*

3. Si $n>1$, el aumento obtenido en el producto es proporcionalmente mayor que el de los factores. Este comportamiento corresponde a la existencia de *rendimientos crecientes a escala.*

4. Si $n<1$, el producto crece en menor proporción que los factores, y decimos que hay *rendimientos decrecientes a escala.*

Interpretaciones similares se pueden hacer para aquellas funciones homogéneas de cualquier número finito de variables.

II. Funciones homogéneas de una variable

A continuación se enuncia y se prueba la propiedad que caracteriza a las funciones homogéneas de una variable.

Teorema: f: **R** → **R** es homogénea de grado n si y solamente si $f(x) = x^n f(1)$.

Prueba:

a. Supongamos que f: **R**→**R** es homogénea de grado n, esto es que $f(tx) = t^n f(x)$ para todo $t>0$ y para todo x en el dominio de la función, por lo tanto:

Haciendo $x=\frac{1}{t}$ se obtiene: $f\left(t\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^n f(x) \therefore f(x)=x^n f(1)$

b. Si $f(x) = x^n f(1)$ entonces $f(tx) = (tx)^n f(1) = t^n x^n f(1) = t^n f(x)$. Es decir, $f(tx)=t^n f(x)$ y por lo tanto la función es homogénea de grado n.

Nota: Dado que f(1) representa un número real podemos enunciar el teorema así: las únicas funciones homogéneas de grado n y de una variable son las que tienen la forma $f(x) = kx^n$ con k constante.

Teorema de Euler: f: **R**→**R** es homogénea de grado n si y solo si $xf'(x) = nf(x)$ donde $f'(x)$ representa la derivada de la función respecto a x.

Prueba:

a. Si f: **R** →**R** es homogénea de grado n, entonces $f(x) = kx^n$ y derivando obtenemos: $f'(x) = knx^{n-1}$ y por lo tanto $xf'(x) = knx^n$ y reemplazando kx^n por f(x) se obtiene lo buscado.

b. Sea f: **R**→**R** una función que satisface $xf'(x) = nf(x)$ y sea $t>0$ y tx en el dominio de la función. Podemos escribir $(tx)f'(tx) = nf(tx)$. Definamos g: $\mathbf{R}^2$→**R** así: $g(t,x) = f(tx)$ y calculemos la derivada parcial, respecto a t, de g sobre t^n.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g(t,x)}{t^n}\right)=\frac{t^n f'(tx)x-f(tx)nt^{n-1}}{t^{2n}}=\frac{t^n f'(tx)x-txf'(tx)t^{n-1}}{t^{2n}}=0$$

Por lo tanto $\frac{g(t,x)}{t^n}$ es una función constante, es decir,

$\frac{g(t,x)}{t^n}=K$ y haciendo $t=1$ obtenemos $g(1,x)=K$. Finalmente,

$f(tx)=g(t,x)=t^nK=t^ng(1,x)=t^nf(x)$ y f es homogénea de grado n.

III. Funciones homogéneas de varias variables

A. Propiedades

Las funciones que trata cada una de las siguientes propiedades se suponen de m variables, esto es, funciones definidas en $\mathbf{R}^m$, por lo tanto cada elemento del dominio de esas funciones es una m-tupla, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$.

1. La suma de dos funciones homogéneas del mismo grado genera otra función homogénea del mismo grado de homogeneidad.

En otros términos: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones homogéneas de grado n, entonces $h(x)=f(x)+g(x)$ es homogénea de grado n.
En efecto: $h(tx)=f(tx)+g(tx)=t^nf(x)+t^ng(x)=t^n[f(x)+g(x)]$
$=t^nh(x)$.

2. El producto de una constante por una función homogénea de grado n genera otra función homogénea del mismo grado.

Es decir: Si $f(x)$ es homogénea de grado n y $\lambda\varepsilon\mathbf{R}$, entonces $h(x)=\lambda f(x)$ es homogénea de grado n.

En efecto: $h(tx) = \lambda f(tx) = \lambda t^n f(x) = t^n [\lambda f(x)] = t^n h(x)$.

3. El producto de dos funciones homogéneas de grados m y n respectivamente genera otra función homogénea de grado m+n.

4. El cociente, cuando está definido, de una función homogénea de grado m por una función homogénea de grado n genera otra función homogénea de grado m-n.

5. $z = f(x_1, x_2, ... x_m)$ es una función homogénea de grado n si y sólo si existen funciones g_i: $\mathbf{R}^{m-1} \rightarrow \mathbf{R}$ tales que

$$\frac{z}{x_i^n} = g_i\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots\ldots, \frac{x_m}{x_i}\right)$$

Prueba:

a. Si $z = f(x_1, x_2, ... x_m)$ es una función homogénea de grado n se tiene $f(tx_1, tx_2, ..., tx_m) = t^n f(x_1, x_2, ..., x_m)$ expresión que es válida para todo $t>0$.

Hagamos $t = \dfrac{1}{x_i}$

(para $x_i \neq 0$) obteniendo:

$$f\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots, \frac{x_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right) = \left(\frac{1}{x_i}\right)^n f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$$

y por lo tanto:

$$f\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots 1, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right) = \frac{1}{x_i^n} f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m) = \frac{z}{x_i^n}$$

Pero $f\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right)$ es función sólo de los cocientes $\frac{x_1}{x_i}$, denotémosla por g_i obteniendo así que:

$$\frac{z}{x_i^{\,n}} = g_i\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right).$$

b. Si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ cumple que $\frac{z}{x_i^{\,n}} = g_i\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right)$

escribimos: $$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{x_i^{\,n}} = g_i\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right)$$

Si el punto $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ está en el dominio de la función, tenemos:

$$\frac{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)}{(tx_i)^n} = g_i\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right)$$

y por lo tanto: $$\frac{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)}{(tx_i)^n} = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{x_i^{\,n}}$$

Cancelando x_i^n y multiplicando ambos miembros por t^n obtenemos:

$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t_n f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

lo que significa que f es homogénea de grado n.

6. Si $z = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ es homogénea de grado n, entonces cada una de las derivadas parciales de orden p, si existe, es una función homogénea de grado n-p.

Sólo demostraremos la propiedad para el caso de las derivadas de órdenes uno y dos (p=1 y p=2) ya que la demostración para órdenes superiores sigue exactamente los mismos pasos.

Prueba:

a. Para p=1.

Como $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ es homogénea de grado n se tiene

$f(tx_1, tx_2, ..., tx_m) = t^n f(x_1, x_2, ..., x_m)$ y derivando a ambos lados respecto a x_i, obtenemos:

$$t\frac{\partial}{\partial x_i} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

y esta última igualdad constituye la definición de homogeneidad de grado n-1 para la función

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) .$$

b. Para p=2.

Debemos probar la homogeneidad de grado (n-2) para las funciones siguientes:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Partiendo de las desigualdades demostradas en la parte a, derivemos respecto a x_i o x_j según el caso. Hagámoslo, por ejemplo, para x_i:

$$t\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)=t^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

y despues de simplificar obtenemos la igualdad que nos permite concluir la homogeneidad de grado (n-2) de la función

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Haciendo un trabajo similar se prueban las demás igualdades.

Nota: La propiedad anterior sólo es una condición necesaria para la homogeneidad, no es suficiente. Para justificar esta afirmación basta considerar una función constante, $f(x_1, x_2) = k$ que es homogénea de grado cero, y ver que es la derivada respecto a x_2 de $g(x_1, x_2) = kx_1 + x_2 + 1$ que no es homogénea.

7. Si $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ es una función homogénea de grado n, entonces su derivada parcial respecto a una de sus variables x_i, si existe, es igual a la potencia (n-1) de x_i por una función de las (m-1) variables siguientes:

$$\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots\ldots, \frac{x_m}{x_i}.$$

Prueba:

Como $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ es homogénea de grado n su derivada parcial primera respecto a x_i es homogénea de grado (n-1) y por la propiedad cinco sabemos que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{x_i^{n-1}}$$

es una función que sólo depende de los cocientes entre las demás variables y x_i, llamemos g a esta nueva función:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{x_i^{n-1}} = g\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right)$$

y despejando se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_i^{n-1} g\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \ldots, \frac{x_m}{x_i}\right)$$

8. Teorema de Euler.

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es homogénea de grado n si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = n f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Prueba:

a. Sea $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ una función homogénea de grado n. De acuerdo con la definición satisface la igualdad siguiente:

$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

Haciendo $u_i = tx_i$, $1 \leq i \leq m$, y derivando a ambos lados respecto a t se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial u_i} f(u_1, u_2, .., u_m) = nt^{n-1} f(x_1, x_2, .., x_m)$$

Si tomamos para t el valor 1 y reemplazamos u_i por x_i resulta:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, .., x_m) = nf(x_1, x_2, .., x_m)$$

b. Sea la función $z = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ que satisface la condición:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, .., x_m) = nf(x_1, x_2, .., x_m)$$

Consideremos el punto $(tx_1, tx_2, ..., tx_m)$ perteneciente al dominio de la función f, siendo $t>0$. Si denotamos por u_i a tx_i y aplicamos la condición dada a la función f en el punto $(u_1, u_2, ..., u_m)$ se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial}{\partial u_i} f(u_1, u_2, ..., u_m) = nf(u_1, u_2, ..., u_m)$$

Definamos ahora una función $g: \mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}^m$ tal que

$g(x_1, x_2, ..., x_m, t) = f(tx_1, tx_2, ..., tx_m)$ y calculemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g(x_1, x_2, .., x_m, t)}{t^n}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f(tx_1, tx_2, .., tx_m)}{t^n}\right)$$

$$= \frac{t^n \frac{\partial}{\partial t} f(tx_1, tx_2, .., tx_m) - nt^{n-1} f(tx_1, tx_2, .., tx_m)}{t^{2n}}$$

Pero por otro lado sabemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx_1, tx_2, .., tx_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx_1, tx_2, .., tx_m)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial t} f(tx_1, tx_2, .., tx_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(u_1, u_2, .., u_m)$$

y según la condición dada se tiene:

$$nf(u_1, u_2, .., u_m) = \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(u_1, u_2, .., u_m).$$

Haciendo los reemplazos pertinentes obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g(x_1, x_2, .., x_m, t)}{t^n}\right) =$$

$$\frac{t^n \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx_1, tx_2, .., tx_m) - t^{n-1} \sum_{i=1}^{m} tx_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx_1, tx_2, .., tx_m)}{t^{2n}}$$

Pero el numerador de esta expresión es cero, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g(x_1, x_2, .., x_m, t)}{t^n}\right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{g(x_1, x_2, .., x_m, t)}{t_n} = K$$

Es decir, la última expresión es igual a una constante, llamémosla K, para todo t>0. Si hacemos t=1 obtenemos que la función g valorada en uno es igal a K, esto es:

$g(x_1, x_2, ..., x_m, t) = K$ y por consiguiente

$g(x_1, x_2, ..., x_m, t) = t^n k = t^n g\,(x_1, x_2, ..., x_m, 1)$

Pero $g(x_1, x_2, ..., x_1,t) = f(tx_1, tx_2, ..., tx_m)$ y por lo tanto $g(x_1, x_2, ..., x_m, 1) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Al hacer estos reemplazos resulta $f(tx_1, tx_2, ..., tx_m) = t^n f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Lo cual significa que la función f es homogénea de grado n.

B. Aplicaciones

Sea $z = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ una función de producción linealmente homogénea.

1. Si a esta función le aplicamos la propiedad cinco resulta que $\frac{z}{x_i}$ es función de los cocientes $\frac{x_j}{x_i}$ con $i \neq j$, lo cual puede ser interpretado de la siguiente manera: La cantidad producida por unidad del factor x_i (producto medio debido a x_i) depende únicamente de la razón de las cantidades de los factores utilizados. No sobra reiterar que esta interpretación sólo es válida si la función de producción es homogénea de grado uno.

2. Aplicándole a la misma función de producción la propiedad seis encontramos que la derivada parcial de z respecto a x_i es una función homogénea de grado cero, es decir, la productividad marginal del factor x_i no varía cuando todos los factores son aumentados en la misma proporción. Además, aplicando a la función derivada la propiedad cuatro, encontramos que las productividades marginales son funciones exclusivamente de la razón de las cantidades de los factores utilizados.

Consideremos ahora la función de producción Cobb-Douglas $z=AK^aL^b$ en la que A es una constante, K representa el capital y L el trabajo. Además $a + b = 1$.

1. Si suponemos que las retribuciones al trabajo y al capital son iguales a sus productividades marginales, esto es, a las derivadas

parciales de z respecto a L y K respectivamente, podemos interpretar el teorema de Euler diciendo que la retribución de los factores agota todo el producto, es decir, al remunerar los factores por su productividad marginal no queda ningún excedente. Reiteramos que lo anterior es válido sólo si la función de producción es linealmente homogénea, o lo que es lo mismo, si el sistema productivo posee rendimientos de escala constantes.

3. El teorema de Euler aplicado a funciones de producción del tipo Cobb-Douglas pero de grado de homogeneidad diferente de uno, nos permite concluir que:

Si el grado de homogeneidad $n<1$ (es decir, $a+b<1$), entonces la retribución de los factores de acuerdo con su productividad marginal deja una parte excedentaria del producto.

Similarmente, el producto obtenido no basta para retribuirlos cuando $n>1$ y esa retribución se hace de acuerdo con las productividades marginales.

Bibliografía

Allen, R. G. D. *Análisis Matemático para Economistas*. Madrid, Aguilar, S. A. 7a. ed.

Apostol, Tom M. (1973). *Calculus*. Barcelona, Editorial Reverté, S. A. 2a. ed.

Borrel Fontelles, José. *Métodos Matemáticos para la Economía*. Campos y Autosistemas. Madrid, Ediciones Pirámide S.A.

Chiang, Alpha C. *Fundamentos Matamáticos para Economistas*. Madrid, McGraw-Hill. 3a. ed.

Larson, R. E. y Hostetler, R. P. (1989). *Cálculo y Geometría Analítica*. Madrid, McGraw-Hill. 3a. ed.

Madden, Paul. (1987). Concavidad y Optimización en Microeconomía. Madrid, Alianza Editorial.

Olmsted, John M. H. (1979). *Real Variables*. New York, Appleton Century Crofts, Inc.

Osádchaia, I. (1975). *De Keynes a la síntesis neoclásica, Análisis Crítico*. Moscú, Editorial Progreso.