El sistema de Leontief y su solución matemática
(Nota didáctica)

Pedro Ramírez
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Antioquia

Introducción

El esquema analítico de la economía de un país que Vasily W. Leontief presentó en *The Structure of the American Economy 1919-1939* en 1941, consiste en un sistema de ecuaciones lineales cuyos elementos deben tener significado económico, esto es, no deben ser negativos.

Ahora bien, se sabe que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\ a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

la cual, si hacemos uso del producto de matrices, podemos escribir así:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

donde los n^2 coeficientes de las incógnitas, las n incógnitas y los n términos independientes se han ordenado en forma matricial. Si denotamos por A la matriz de coeficientes, por x el vector de incógnitas y por b el vector de términos independientes, podemos abreviar la escritura del sistema para obtener:

$$Ax = b$$

Sabemos que si A es no singular, el sistema tiene solución única y ésta es $x = A^{-1}b$.

Aquí nos proponemos presentar el problema planteado por Leontief y exponer la solución que dio Hukukane Nikaido en su texto *Introduction to sets and mappings in modern economics*. North Holland, 1970. (Existe traducción al español bajo el título *Métodos matemáticos del análisis económico moderno*. Ed. Vicens Vivens).

I. Presentación del problema

A comienzos del tercer decenio de este siglo, V. W. Leontief (nacido en 1905), fundamentándose en los trabajos que en el siglo XVIII había iniciado el fundador de la escuela de los fisiócratas, el francés Francisco Quesnay, desarrolló y profundizó el análisis *input-output* o de *relaciones interindustriales* como método para explicar los flujos de mercancías en una economía y las relaciones entre las demandas finales y las diversas producciones requeridas para satisfacerlas. En su forma más simple el modelo de Leontief tiene, entre otras, las siguientes características:

1. Divide la economía en n sectores (que también denomina industrias), cada uno de los cuales produce una única mercancía, esto es, establece una correspondencia biunívoca entre las industrias y las mercancías.

Designaremos con x_i la cantidad de mercancía producida por el i-ésimo sector durante un período de tiempo dado.

2. Distribuye el producto de cada sector en dos partes: una sirve como insumo a la industria y la otra va a las exportaciones, al consumo doméstico, a la construcción de nuevas plantas para la producción y a todo uso que no esté incluido como insumo para los sectores industriales. Estos usos los realizan los llamados sectores exógenos y los otros los endógenos.

Designaremos con x_{ij} la cantidad de mercancía producida por la industria i que sirve como insumo a la industria j y con c_i, la parte del producto de la industria i que no se utiliza como insumo, c_i se denomina demanda final de la mercancía i.

3. Supone que el producto de cada sector queda agotado por las compras de los sectores endógenos y exógenos en el período analizado. Para cada sector se puede pues, escribir la siguiente ecuación:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

esto es, el producto del sector i es igual a la demanda de los sectores endógenos más la de los sectores exógenos (es decir, la demanda final).

4. La cantidad de producto de la industria i necesaria para producir una unidad de mercancía j permanece constante. Esto es, la cantidad de la i-ésima mercancía que se utiliza como insumo para producir un unidad de la j-ésima es un parámetro del sistema (una magnitud exógena).

Si para producir x_j unidades la industria j requiere x_{ij} unidades del producto de la industria i, entonces el cociente x_{ij}/x_j permanece constante; este cociente lo denotamos por a_{ij} y representa las unidades de producto de la industria i necesarias para producir una unidad de mercancía por la industria j. Por lo tanto, el consumo que el sector j hace del producto del sector i es $a_{ij}x_j$ y, en consecuencia, la ecuación anterior puede ser escrita así:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

esta última expresión da lugar a un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n + c_2 \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n + c_n
\end{aligned}$$

que, empleando notación matricial, podemos escribir:

$$x = Ax + c$$

Donde: x es el vector de las cantidades de producción,
A es la matriz de coeficientes ("Coeficientes técnicos"),
c es el vector de las cantidades de la demanda final.

La expresión x = Ax+c se puede transformar en (I-A) x=c donde I es la matriz identidad. Si, finalmente, hacemos B=I-A el sistema se reduce a:

$$Bx = c$$

Este sistema constituye el sistema básico de ecuaciones del análisis interindustrial de Leontief.

En este sistema de ecuaciones los elementos de B (que son de la forma $1-a_{ii}$ y $-a_{ij}$ i=j) son calculables mediante la fórmula

$$a_{ij} \neq \frac{x_{ij}}{x_j}$$

donde el numerador y el denominador han sido medidos para un período dado.

Habiendo llegado a este punto es conveniente recordar algunas restricciones a que se hallan sometidos los signos de las variables económicas que aquí se estudian. Por su naturaleza los coeficientes técnicos a_{ij} y las demandas finales c_i son nulos o positivos. Así mismo, las cantidades producidas, x_i, deben ser también no negativas. Estas restricciones plantean el siguiente interrogante: ¿podemos asegurar que siempre existe una solución $(x_1, x_2, ...,x_n)^T$ del sistema Bx=c para cualquier demanda final arbitraria no negativa $(c_1, c_2, ..., c_n)^T$ y que dicha solución es no negativa?

II. Las condiciones de Hawkins-Simon

D. Hawkins y H. A. Simon en su artículo "Some condition of macroeconomic stability" (*Económetrica*. No. 17. 1949) estudiaron la solución del sistema planteado, con las siguientes restricciones:

1. $b_{ii}>0$; $b_{ij}<0$, si $i\neq j$. $i,j = 1, 2, \ldots, n$.
   (Recuérdese que $b_{ii}=1-a_{ii}$; $b_{ij}=-a_{ij}$, para $i\neq j$)

2. $c_i>0$

Más tarde Nikaido, en el texto ya mencionado, enunció y demostró una versión más general del teorema de Hawkins-Simon.

Teorema: Consideremos el sistema $Bx=c$, en el cual B es una matriz nxn con $b_{ij}\leqslant 0$, para todo $i\neq j$. Bajo estas hipótesis, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Para algún $c>0$, el sistema $Bx=c$ tiene solución $x\geqslant 0$.
b) Para todo $c\geqslant 0$, el sistema $Bx=c$ tiene solución $x\geqslant 0$.
c) Todos los menores principales de B son positivos.
d) B es una P-Matriz.

Antes de dar una demostración del teorema aclaremos algunos aspectos sobre la notación utilizada en el enunciado.

1. Sea un vector $x \varepsilon R^n$, de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

a. Llamaremos a x, **vector no negativo,** y escribiremos $x\geqq 0$, si $x_i\geqslant 0$ para todo i, es decir, si las componentes de x son todas no negativas.

b. Llamaremos a x, **vector positivo,** y escribiremos $x>0$, si $x_i>0$ para todo i, es decir, si las componentes de x son todas positivas.

c. Llamaremos a x, **vector cuasipositivo,** y escribiremos $x\geqslant 0$, si $x_i\geqslant 0$ para todo i pero $x\neq 0$, es decir, las componentes de x son todas no negativas y al menos una es positiva.

2. Sea A una matriz nxn.

a. Llamaremos **menores principales** de A a los determinantes de las siguientes submatrices:

$$a_{11},\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \ldots\ldots \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

el último de los cuales, evidentemente, coincide con el determinante de la matriz A.

b. Llamamos a la matriz A, **P-Matriz,** si cualquier submatriz cuadrada de A cuya diagonal principal sea una parte de la de A, tiene determinante positivo.

Ahora sí veamos la demostración del teorema de Hawkins-Simon generalizado. Para concluir con la equivalencia de las cuatro afirmaciones demostraremos las siguientes implicaciones:

a) —> c) —> b) —> a) y b) —> d) —> c)

1. a) —> c)

Usaremos "inducción matemática" aplicada sobre el número de ecuaciones, es decir, demostraremos por inducción que la afirmación "a) —> c)" es verdadera para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Si el sistema tiene una ecuación con una incógnita se reduce a: $b_{11}x_1 = c_1$. Si a) se cumple, esto es, si para algún $c_1>0$ existe solución $x_1 \geqslant 0$, obtendremos $x_1>0$ puesto que el producto $b_{11}x_1$ no es cero. Así, $b_{11} = c_1/x_1$ es estrictamente mayor que cero, es decir, todos (y en este caso solo hay uno) los menores principales son positivos.

Si el sistema $Bx = c$ tiene dos ecuaciones y dos incógnitas, se reduce a:

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = c_1$$
$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = c_2$$

que escrita en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Como estamos aceptando que la condición a) se cumple para este sistema podemos afirmar que para algún $c_1>0$ y algún $c_2>0$ existen $x_1\geqslant 0$ y $x_2\geqslant 0$ que satisfacen el sistema.

De la primera ecuación podemos obtener $b_{11}x_1 = c_1 - b_{12}x_2$. Como $c_1>0$, $b_{12}\leqslant 0$ y $x_2\geqslant 0$, entonces $b_{11}x_1>0$ y como $x_1\geqslant 0$ se concluye $b_{11}>0$.

Eliminando x_1 de la segunda ecuación, para lo cual basta restar a la segunda ecuación la primera multiplicada por b_{21}/b_{11}, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c'_2 \end{bmatrix}$$

donde $b'_{22} = b_{22} - \dfrac{b_{21}}{b_{11}} b_{12}$ y $c'_2 = c_2 - \dfrac{b_{21}}{b_{11}} c_1$.

Ahora: $c'_2>0$ ya que $c_2>0$, $b_{21}\leqslant 0$, $b_{11}>0$ y $c_1>0$. Además $b'_{22}x_2=c'_2$ y como $c'_2>0$ entonces $b'_{22}x_2>0$ y dado que $x_2\geqslant 0$ podemos concluir que $b'_{22}>0$.

Finalmente, los menores principales de la matriz B son todos positivos. En efecto:

$\det[b_{11}] = b_{11}>0$ y

$$\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b'_{22} \end{bmatrix} = b_{11}b'_{22} > 0$$

Asumamos que la afirmación "a)—>c)" es verdadera para un sistema de (k-1) ecuaciones lineales con (k-1) incógnitas (esta es la hipótesis de inducción) y demostremos que la afirmación se sigue cumpliendo si el sistema tiene k ecuaciones y k incógnitas. Para ello supondremos que se tiene un sistema kxk que cumple la condición a) y probaremos que ese sistema cumple la condición c). Escribamos pues el sistema Bx=c de orden kxk en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

Como estamos aceptando que la condición a) se cumple para este sistema, podemos afirmar que dados $c_1>0, c_2>0, \ldots, c_k>0$ existen $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0, \ldots, x_k\geq 0$ que lo satisfacen.

De la primera ecuación podemos obtener:

$$b_{11}x_1 = c_1 - \sum_{j=2}^{k} b_{1j}x_j$$

Como cada uno de los $b_{ij}\leq 0$ y cada $x_j\geq 0$, resulta que cada producto $b_{1j}x_j<0$ y como $c_1>0$, entonces $b_{11}x_1>0$ y dada la no negatividad de x_1, se obtiene $b_{11}>0$.

Eliminemos la variable x_1 de las (k-1) últimas ecuaciones del sistema. Para ello restemos a la i-ésima ecuación (i=2,..,k) la primera multiplicada por b_{i1}/b_{11} y hagamos

$$b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{i1}}{b_{11}} b_{1j} \quad y \quad c'_i = c_i - \frac{b_{i1}}{b_{11}} c_1.$$ Así el sistema se reduce a:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} & \cdots\cdots & b'_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b'_{k2} & \cdots\cdots & b'_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_k \end{bmatrix}$$

Examinemos los signos de los coeficientes y de los términos independientes de este subsistema de orden (k-1) x (k-1).

$b'_{ij}<0$ para $i \neq j$ porque: $b_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$; $b_{i1} \leq 0$ y $b_{1j} \leq 0$ ya que son elementos de la matriz B inicial y $j \neq 1$, $i \neq 1$ y $b_{11}>0$.

$c'_i>0$ porque: $c_i>0$; $b_{i1} \leq 0$; $b_{11}>0$ y $c_1>0$.

Así pues, el subsistema en cuestión satisface las condiciones iniciales del problema (esto es, los coeficientes que no están en la diagonal principal son no positivos) y los términos independientes son positivos, además, sabemos que este sistema tiene solución no negativa. Podemos concluir que el subsistema cumple la condición a), y aplicando la hipótesis de inducción afirmamos: la matriz de este subsistema tiene sus menores principales positivos, esto es:

$$b'_{22}>0, \det \begin{bmatrix} b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix} >0, \det \begin{bmatrix} b'_{22} & b'_{23} & b_{24} \\ b'_{32} & b'_{33} & b'_{34} \\ b'_{42} & b'_{43} & b'_{44} \end{bmatrix} >0$$

$$, \ldots \det \begin{bmatrix} b'_{22} & b'_{23} & \cdots\cdots & b_{2k}' \\ b'_{32} & b'_{33} & \cdots\cdots & b'_{3k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b'_{k2} & b'_{k3} & \cdots\cdots & b'_{kk} \end{bmatrix} >0$$

Calculemos, finalmente, los menores principales de la matriz B inicial.

$$b_{11} > 0$$

$$\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b'_{22} \end{bmatrix} = b_{11}b'_{22} > 0$$

$$\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b'_{22} & b'_{23} \\ 0 & b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix}$$

$$= b_{11}\det\begin{bmatrix} b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix} > 0$$

$$\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} & \cdots & b'_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & b'_{k2} & \cdots & b'_{kk} \end{bmatrix}$$

$$= b_{11}\det\begin{bmatrix} b'_{22} & \cdots & b'_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{k2} & \cdots & b'_{kk} \end{bmatrix} > 0$$

Así pues todos los menores principales de la matriz B son positivos.

Hemos probado que "a) —> c)" se cumple.

2. c) —> b)

De nuevo aplicaremos el método de inducción matemática sobre el número de ecuaciones del sistema.

Si el sistema Bx=c tiene una ecuación con una incógnita se reduce a $b_{11}x_1=c_1$. Como estamos aceptando el cumplimiento de la condición c) podemos afirmar que todos los menores principales de B son positivos, es decir, que $b_{11}>0$ (Este es el único).

Sea $c_1>0$, $c_1 \neq 0$ porque el vector c se reduce al elemento c_1, despejando $x_1=c_1/b_{11}$ se tiene que $x_1>0$, esto es, que dado $c \geqslant 0$ existe $x \geqslant 0$ que es solución de Bx=c.

Asumamos ahora que la afirmación "c)—>b)" es válida para un sistema de orden (k-1) x (k-1) y demostremos que se cumple para uno de orden kxk. Sea

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

un sistema que cumple la condición c), esto es, un sistema cuyos menores principales son positivos. Como b_{11} es uno de esos menores, entonces $b_{11}>0$ y podemos, como antes, eliminar x_1 de cada una de las últimas (k-1) ecuaciones, restando de la i-ésima ecuación la primera multiplicada por b_{i1}/b_{11}.

Consideremos, pues, el subsistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} b'_{22} & b'_{23} & \cdots & b'_{2k} \\ b'_{32} & b'_{33} & \cdots & b'_{3k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b'_{k2} & b'_{k3} & \cdots & b'_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_2 \\ c'_3 \\ \vdots \\ c'_k \end{bmatrix}$$

Este subsistema satisface $c'_i \geq 0$ y $b'_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$. La justificación es la misma que en la primera parte. Además:

$$\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b'_{22} \end{bmatrix} = b_{11}b'_{22} \therefore b'_{22} = \frac{1}{b_{11}} \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b'_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_{11}} \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

y como $b_{11} > 0$ y $\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} > 0$ entonces $b'_{22} > 0$,

$$\det\begin{bmatrix} b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{b_{11}} \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b'_{22} & b'_{23} \\ 0 & b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_{11}} \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} > 0 \text{ y}$$

$$\det\begin{bmatrix} b'_{22} & b'_{23} & \cdots & b'_{2k} \\ b'_{32} & b'_{33} & \cdots & b'_{3k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b'_{k2} & b'_{k3} & \cdots & b'_{kk} \end{bmatrix} = \frac{1}{b_{11}} \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} & \cdots & b'_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & b'_{k2} & \cdots & b'_{kk} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_{11}} \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix} > 0$$

Estas últimas expresiones significan que el subsistema cumple la condición c). Aplicando la hipótesis de inducción (más el hecho de que $c'_i \geq 0$) al subsistema, podemos afirmar que él tiene solución $(x_2, x_3, \ldots x_k)^T$ con componentes no negativas.

Sólo resta demostrar que $x_1 \geq 0$.

En efecto: Como $b_{11}x_1+b_{12}x_2+\ldots\ldots+b_{1k}x_k=c_1$ y $b_{11}>0$ podemos despejar $x_1=1/b_{11}(c_1-b_{12}x_2-\ldots\ldots-b_{1k}x_k)$ y como $c_1 \geq 0$, $b_{ij} \leq 0$ $(j=2, 3, \ldots, k)$ y $x_j \geq 0$, se tiene que $x_1 \geq 0$.

Por lo tanto el sistema tiene solución $(x_1, x_2, \ldots, x_k)^T \geq 0$ siempre que $(c_1, c_2, \ldots, c_k)^T \geq 0$.

3. b)—>a)

Debemos probar que si el sistema $Bx=c$ tiene solución $x \geq 0$ para todo $c \geq 0$, entonces el mismo sistema tiene solución $x \geq 0$ para $c>0$.

O lo que es lo mismo: si para términos independientes no negativos existe solución no negativa, entonces para términos independientes positivos existe solución con al menos una componente positiva. En efecto: si $x=0$ se tendría $Bx=0 = c>0$ y el sistema no tendría solución, lo que contradice la condición b) que dice que para todo $c \geq 0$ existe solución $x \geq 0$.

4. d)—>c)

Si todas las submatrices de B que contienen como diagonal principal alguna parte de la diagonal principal de B tienen determinante positivo, es claro que los menores principales sean todos positivos.

5. b)—>d)

Antes de presentar la demostración hagamos una aclaración: una matriz se llama de permutación si es el resultado de permutar dos filas cualesquiera en la matriz identidad. Si P es una matriz de permutación, P^{-1} siempre existe y es igual a P*; además, si P se ha obtenido permutando las filas k y m de la matriz identidad, el producto PA es igual a la matriz A con sus filas k y m permutadas, y el producto AP permuta en A las columnas k y m. Finalmente, si P_1 y P_2 son matrices de permutación, el producto P_1P_2 también lo es.

Ahora sí veamos la demostración: asumamos que $Bx=c$ es un sistema que cumple la condición b) y sea P una matriz de permutación. Tenemos $PBx=PBP^{-1}Px=Pc$ y haciendo $z=Px$ y $d=Pc$, resulta la igualdad $PBP^{-1}z=d$.

Empleando este artificio un número finito de veces podemos trasladar cualquier submatriz cuadrada cuya diagonal sea una parte de la diagonal principal de B a la esquina superior izquierda de B. Además si la condición de no positividad para los elementos con subíndices distintos en la matriz B se cumple, también se cumple en PBP^{-1} porque las permutaciones que hacen P y P^{-1} dejan los elementos en la diagonal aunque en sitio distinto. Finalmente, es claro que si $c \geqslant 0$ y $x \geqslant 0$, también $d \geqslant 0$ y $z \geqslant 0$ y si el sistema $Bx=c$ tiene solución $x \geqslant 0$ para todo $c \geqslant 0$ entonces el sistema $PBP^{-1}z=d$ tiene solución $z \geqslant 0$ para todo $d \geqslant 0$, es decir, el sistema $PBP^{-1}z=d$ cumple la condición b) y, por lo tanto, también cumple la condición c), es decir: todo menor principal de PBP^{-1} es positivo y por lo tanto toda submatriz de B cuya diagonal sea parte de la diagonal principal de B tiene determinante positivo, esto es, B es una P-matriz.

* Esto sólo es cierto si la matriz de permutación permuta dos filas. Si se permite que la matriz permute más de dos filas la inversa de P sería igual a P^T, esto es, a la transpuesta de P.

III. Matrices descomponibles e indescomponibles

Según la versión dada por Nikaido del teorema de Hawkin-Simon si B es una P-matriz podemos garantizar la existencia de una solución $x \geqslant 0$ para todo $c>0$ (ó $c \geqslant 0$) del sistema $Bx=c$ en el cual $b_{ij} \leqslant 0$ para todo $i=j$. Veamos cómo la descomponibilidad permite una nueva caracterización de la solución de este sistema.

Definición: Una matriz cuadrada A se llama **descomponible** si existe una matriz de permutación P tal que:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ 0 & A^{22} \end{bmatrix}$$

donde A^{11} y A^{22} son submatrices cuadradas, no necesariamente del mismo orden, y 0 denota una submatriz nula.

El concepto de descomponibilidad, que algunos llaman reducibilidad, tiene una interesante interpretación económica si se considera que A es una matriz de coeficientes técnicos. Sea J el conjunto de índices de las filas que intervienen en A^{11} y sea K el conjunto de los índices de las filas que intervienen en A^{22}. De acuerdo con la definición, si A es descomponible, ninguna mercancía de las indizadas por elementos de K interviene en la producción de las indizadas por J. es decir, la producción de estas últimas se logra independientemente de las primeras. A las mercancías indizadas por los elementos de J se les llama **productos básicos del sistema.**

Si además, en la definición de matriz descomponible exigimos que $A^{12} = 0$, se tiene que las mercancías indizadas por los elementos de J tampoco intervienen en la producción de las indizadas por K. En este caso se dice de la matriz A que es **totalmente descomponible**.

Es bueno observar que no es cierto que toda matriz que contenga elementos nulos es descomponible. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Mientras que A es indescomponible, B es descomponible.

Ahora sí, veamos, cómo caracterizar la solución del sistema Bx=c.

Teorema: Consideremos el sistema Bx=c, en el cual B=I-A y A es una matriz cuadrada nxn con $a_{ij} \geqslant 0$ para todo $i \neq j$. Si A es una P-Matriz indescomponible entonces para cualquier $c \geqslant 0$ el sistema Bx=c tiene solución x>0.

Dos lemas previos a la demostración:

Lema 1: Si A es descomponible, I-A también lo es.
En efecto: Si A es descomponible existe una matriz de permutación P tal que:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ 0 & A^{22} \end{bmatrix}$$

Ahora: $P(I-A)P^{-1} = PIP^{-1} - PAP^{-1} = I - \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ 0 & A^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I-A^{11} & -A^{12} \\ 0 & I-A^{22} \end{bmatrix}$

de donde se concluye la descomponibilidad de I-A.

Lema 2: Si A es indescomponible I-A también lo es.

En efecto: Si I-A no fuera indescomponible, es decir si fuera descomponible, I-(I-A) sería descomponible, y por lo tanto A sería descomponible.

Prueba del Teorema:

Consideremos el sistema Bx=c con $c \geqslant 0$ y definamos los conjuntos I y J así:

$$I = \{k \varepsilon N : x_k = 0\} \text{ y } J = \{k \varepsilon N : x_k > 0\}$$

En estos conjuntos observemos lo siguiente:

1. Su unión es el conjunto {1,2,....,n} pues x_k no puede ser negativo. Ya que siendo B una P-Matriz, por el teorema de Hawkins-Simon, se cumple que siempre que $c \geqslant 0$ la solución es $x \geqslant 0$.

2. El conjunto J no es vacío. Porque si lo fuera, $x_i=0$ para todo i y por lo tanto $c_i=0$, contradiciendo $c \geqslant 0$ (al menos un $c_j>0$).

3. Si demostramos que I es vacío, el teorema queda probado.

Supongamos, utilizando el método de Reducción al Absurdo, que I no es vacío y sea r uno de sus elementos.

Consideremos la r-ésima ecuación del sistema Bx=c:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{rj} x_j = c_r$$

Como $x_r=0$ por la definicion de I, entonces la r-ésima ecuación se reduce a:

$$\sum_{j \neq r}^{n} b_{rj} x_j = c_r$$

Si $c_r>0$, se tiene una contradicción ya que cada $b_{rj}<0$ y $x_j>0$ y por lo tanto la suma sería negativa.

Si $c_r=0$ entonces tenemos:

$$\sum_{j \neq r} b_{rj}x_j = 0 \therefore \sum_{j \varepsilon I} b_{rj}x_j + \sum_{j \varepsilon J} b_{rj}x_j = 0$$

Pero el primer sumando de la última expresión es cero ya que $x_j=0$ por estar j en I, por lo tanto podemos concluir que el segundo sumando es cero y, como $x_j>0$ para todo j en J, se sigue que $b_{rj}=0$ para todo r en I y j en J y por lo tanto la matriz B es descomponible, contradiciendo el lema 2.

Con la argumentación anterior se concluye que es imposible que el conjunto I no sea vacío ya que en cualquier caso nos lleva a una contradicción. En consecuencia él es vacío y J={1, 2, ..., n}, esto es, todas las componentes del vector solución del sistema son positivas.

Este teorema permite una interpretación económica útil si A es una matriz de coeficientes técnicos:

Si la matriz es indescomponible la demanda interindustrial necesita, para ser cubierta, que todos los procesos de producción se pongan en marcha, incluso aunque no exista demanda final para algunas (no todas) de las mercancías, mientras que ello no tiene por qué suceder cuando la matriz A es descomponible.

Finalmente, un teorema que agrega una condición equivalente a las cuatro de Hawkins-Simon y que da una forma alternativa de encontrar la solución del sistema.

Teorema: Dado un sistema Bx=c, nxn, con $b_{ij}\leqslant 0$ para todo $i \neq j$ y $c_i \geqslant 0$:

1. Si todos los menores principales de B son positivos entonces B^{-1} existe y $B^{-1}\geqslant 0$.

2. Si B^{-1} existe y $B^{-1}\geqslant 0$ entonces para todo $c\geqslant 0$ existe $x\geqslant 0$.

Prueba:

1. Como todos los menores principales de B son positivos y el determinante de B es uno de ellos podemos asegurar la existencia de B^{-1} y la solución del sistema es $x=B^{-1}c$. Además como de la positividad de los menores principales de B se concluye la existencia de la solución $x \geqslant 0$ para todo $c \geqslant 0$, podemos tomar $c=e_i$, donde e_i es la i-ésima columna de la matriz identidad.

El vector $B^{-1}e_i$, que es un vector cuasipositivo, es igual a la i-ésima columna de B^{-1}. Hemos probado que la i-ésima columna de B^{-1} es cuasipositiva y de aquí podemos concluir la cuasipositividad de la matriz B^{-1}.

2. Si B^{-1} existe, la solución del sistema es $x=B^{-1}c$ y si la inversa de B es cuasipositiva es claro que para cada $c \geqslant 0$ el producto $B^{-1}c \geqslant 0$ y por lo tanto $x \geqslant 0$.

En relación con este teorema es conveniente hacer notar que si además de la condición de cuasipositividad de B^{-1} se exige que B sea indescomponible se puede concluir que $B^{-1}>0$.

Referencias

Gantmacher, F.R. (1974). *The theory of matrices.* New York. Alkaline Paper.

Herrero, Carmen. Silva,, José A. y Villar, Antonio (1984). *Matrices semipositivas y modelos lineales.* Universidad de Alicante.

Murata, Yasuo. (1977) *Mathematics for stability and optimization of economic systems.* San Francisco, Academic Press.

Nikaido, Hukukane. *Métodos del análisis económico moderno.* Madrid, Editorial Vicens-Vivens.

Seneta, E. (1973) *Non-negatives matrices.* Londres, George Allen and Unwin Ltd.

Strang, Gilbert. (1982) *Algebra lineal y sus aplicaciones.* Estados Unidos, Fondo Educativo Interamericano S.A. Segunda edición.

Woods, J.E. (1978) *Mathematical economics.* Londres, Longman Group Limited.