Lecturas de Economía, **62** (enero-junio), pp.9-34. © Universidad de Antioquia -Lecturas de Economía, 2005.

Cómo repartir cuando no hay bastante

Antonio Villar*

–Introducción. –I. Problemas de bancarrota. –II. Propiedades de las soluciones. –III. Comentarios finales. –IV. Anexo. –Bibliografía.

Primera versión recibida en enero de 2005; versión final aceptada en marzo de 2005 (eds.)

Introducción

El problema de la asignación de recursos escasos entre usos alternativos constituye uno de los elementos que definen la naturaleza de la ciencia económica. Este problema se formula en muy diversos contextos, que van desde los problemas de decisión individual (cómo repartir nuestro tiempo entre diversas actividades, qué seguro del coche elegir, cómo distribuir nuestra renta en la compra de distintos bienes y servicios), hasta los problemas de decisión social más complejos (qué servicios públicos deben ofrecer los municipios y cuáles deben ser los impuestos asociados, qué trazado debe tener el tren de alta velocidad, cómo proteger el medio ambiente, cuánto dinero invertir en educación, etc.).

Asociados a los diferentes problemas de elección encontramos mecanismos de decisión distintos y muchas veces superpuestos. Así por ejemplo los mercados y los precios son los mecanismos que articulan las decisiones relativas a qué bienes y servicios consumen las familias, qué cantidades de trabajo se desarrollan, si uno contrata un seguro a todo riesgo para el coche o no, etc. Las elecciones democráticas constituyen un mecanismo de decisión diferente mediante el que se realiza la selección de las políticas públicas que son ofertadas por los diferentes partidos políticos.

---

* Antonio Villar: director del Departamento de Economía, Fundamentos del Análisis Económico. Universidad de Alicante & Ivie. Alicante, España. Dirección electrónica: villar@merlin.fae.ua.es.

Dado que los recursos de que disponemos son siempre limitados (pensemos en nuestro salario o en el presupuesto de nuestro ayuntamiento) y que nuestros deseos y aspiraciones pueden extenderse casi sin límite, la idea de la *escasez* está siempre presente en este tipo de decisiones. El principio de la escasez se traduce en tomar en cuenta que elegir una cosa supone renunciar a otras. Por ello es habitual valorar una decisión mediante el *coste de oportunidad*, es decir, el valor de la mejor opción que rechazamos. En este sentido una decisión económica puede interpretarse casi siempre como la resolución de un problema de optimización con restricciones (buscamos *la mejor* opción de entre las que nos resultan accesibles). O, dicho de otro modo, los problemas económicos tienen mucho de problemas de racionamiento ya que siempre nos gustaría consumir más, o pagar menos, o tener más servicios públicos de los que efectivamente disfrutamos.

Nos ocuparemos aquí de un tipo de problemas de racionamiento extremadamente sencillo pero que tiene una notable variedad de interpretaciones y una formulación matemática precisa. Se trata de repartir una cierta cantidad dada de un bien entre los miembros de una sociedad, cuando sus demandas exceden a la cantidad disponible. Ilustraremos primero con algunos ejemplos este tipo de situaciones y precisaremos después los términos de la discusión.

1. El testamento

El propietario de una finca hace su testamento en un momento en el que su propiedad tiene una extensión de 100 hectáreas. Ha decidido repartirla entre sus tres hijos asignando 20 hectáreas al mayor, que ya tiene la vida resuelta, 30 al segundo que aunque también tiene la vida resuelta tiene una familia más numerosa, y 50 hectáreas al hijo menor cuyo futuro es más incierto. Un año después el Ayuntamiento realiza una expropiación de parte de sus terrenos, que quedan reducidos a 80 hectáreas. Nuestro hombre muere antes de poder rehacer el testamento y ajustar la distribución de la propiedad entre sus hijos. El problema consiste en cómo distribuir estas 80 hectáreas entre los herederos que reclaman 20, 30 y 50, respectivamente.

2. La "Sociedad Anónima Digital Europea"

La empresa Sociedad Anónima Digital Europea (SADE) ha lanzado una campaña de promoción de su nueva cadena de televisión por satélite a unos precios atractivos. La oferta se ha dirigido inicialmente a España, Francia e Italia, con una previsión de instalación de 1.000.000 de antenas parabólicas durante el año en curso en estos tres países. La campaña ha sido un éxito y la empresa ha recibido unas demandas de 400.000 suscripciones en España, 600.000 en Francia y 500.000 en Italia. ¿Cómo distribuir las antenas de que SADE dispone entre estos países?

3. La agencia tributaria

Este año el Gobierno encarga a la Agencia Tributaria la recaudación en el impuesto sobre la renta de una cuantía de T euros. Sea $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ el vector que describe las rentas obtenida por los n individuos de la sociedad el año pasado, con $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Consecuentemente $Y - T > 0$ es la renta neta total (después de impuestos). El problema aquí es cómo distribuir la carga fiscal, es decir, determinar un vector $y^N = (y_1^N, y_2^N, ..., y_n^N)$ con $\sum_{i=1}^{n} y_i^N = Y - T$.

4. El reparto del agua

La autoridad responsable del suministro de agua para la Comunidad Valenciana dispone de una cantidad de E hectómetros cúbicos para este trimestre. Las necesidades para usos urbanos, turísticos, industriales y agrícolas son superiores a la cantidad total disponible. Hay que decidir cómo repartir el caudal de agua entre los diversos usos.

Estos problemas, aparentemente diversos, tienen una estructura matemática común. Se trata de determinar un reparto de un cantidad de un bien perfectamente divisible entre un conjunto de agentes cuyas reclamaciones, demandas, derechos o necesidades exceden la cuantía de la cantidad a repartir. Son ejemplos de lo que se denomina habitualmente “problemas de bancarrota”, porque el ejemplo prototípico de este tipo de situación es el de una empresa en quiebra (el valor de sus activos es inferior al valor de sus pasivos); en este caso las reclamaciones de los acreedores superan al valor de liquidación de la empresa y el problema consiste en cómo distribuir lo que hay en relación con las deudas contraídas por la empresa.[1]

Una *solución* al problema de bancarrota es una regla de reparto que proporcione una distribución razonable de la cantidad del bien a repartir como función de las reclamaciones de los agentes, para cada posible problema de bancarrota considerado. Por tanto, nuestro interés se centra en el estudio de *reglas de reparto*

---

1 En la literatura este tipo de problemas se engloban muchas veces bajo la denominación más genérica de “problemas de racionamiento” o “problemas de reclamaciones”.

aplicables a toda una familia de problemas y no en la resolución de un problema particular.

Es interesante observar que una solución al problema de bancarrota podemos interpretarla también como un esquema de *asignación de pérdidas*. En esta aproximación dual del problema se trata de decidir qué parte de la pérdida colectiva debe soportar cada agente, como función de sus demandas. Esta forma dual de concebir la resolución del problema resulta útil a la hora de analizar las propiedades de las diferentes soluciones.

Hay tres observaciones importantes que nos ayudarán a precisar la naturaleza de este tipo de problema, a saber:

—Los problemas de bancarrota son muy habituales en la vida real y aparecen en contextos muy diferentes.

—Las reclamaciones de los agentes pueden ser de naturaleza diversa (deudas, demandas, rentas o necesidades, en los ejemplos anteriores). Consecuentemente la forma más adecuada de resolver un problema de bancarrota dependerá en general del tipo de problema de que se trate y no sólo de la información resumida en la cantidad del bien a repartir y el vector de reclamaciones.

—La resolución de los problemas de bancarrota que aparecen en la vida real constituye un problema práctico de gran relevancia y posee una gran tradición como problema conceptual.[2]

Las diferentes reglas de reparto suponen la aplicación de diferentes principios éticos y operativos a la resolución de los problemas. El análisis de las propiedades estructurales que identifican los diferentes esquemas de reparto permitirá decidir qué regla es más apropiada para cada tipo de problema. O al menos nos dará información precisa sobre qué principios aplicamos cuando resolvemos un problema de bancarrota mediante una regla particular.

El moderno análisis económico ha abordado esta clase de problemas desde dos enfoques. El primero es el proporcionado por la teoría cooperativa de los juegos mediante el cual se trata de identificar esquemas de reparto con soluciones

---

2 El lector interesado puede consultar las referencias históricas (en su gran mayoría relativas a discusiones rabínicas sobre la resolución numérica de problemas concretos) que encontrará en Rabinovitch (1973), O'Neill (1982), Aumann y Maschler (1985) y Young (1994, ch. 4).

tradicionales a los juegos cooperativos. El segundo enfoque es el estudio axiomático de las diversas soluciones propuestas a este problema.

Este segundo enfoque será el que adoptaremos en esta exposición. Más concretamente, presentamos un análisis comparativo de cuatro reglas clásicas de resolución al problema de bancarrota, desde un enfoque axiomático. Estas reglas son:

(i) La *regla proporcional*, que divide la cantidad disponible proporcionalmente a las reclamaciones de los agentes.

(ii) La *regla igualitaria*, que reparte por igual el bien siempre que nadie obtenga más de lo que reclama.

(iii) La *regla de igual pérdida*, que reparte la pérdida colectiva a partes iguales, siempre que nadie reciba una cantidad negativa.

(iv) La *regla del Talmud*, que se comporta como la regla igualitaria o la regla de igual pérdida, según que la cantidad disponible sea inferior o superior a la mitad de la reclamación total.

El trabajo se articula como sigue. En la sección primera introducimos el modelo formal y presentamos las cuatro soluciones clásicas al problema de bancarrota. En la segunda sección nos ocupamos de definir algunas propiedades que puede pedirse a una solución y a discutir cuáles cumple cada una. En particular presentamos cinco teoremas que ofrecen caracterizaciones cerradas de las diferentes reglas de reparto (un primer teorema con una caracterización conjunta de tres de estas reglas, y un teorema específico para la caracterización de cada una de ellas). La tercera sección contiene unos breves comentarios finales, que incluyen una recomendación de lecturas complementarias y una breve explicación sobre la terminología. Hemos incluido un Anexo donde el lector interesado encontrará un ejercicio con el que puede entretenerse y afianzar su comprensión de los problemas de bancarrota. El listado detallado de la referencia bibliográfica cierra el trabajo.

I. Problemas de bancarrota

A. Preliminares

Consideremos una sociedad compuesta de n agentes (que pueden ser individuos, familias, empresas u otras instituciones). Cada uno de estos agentes presenta una reclamación c_i que supone un derecho efectivo sobre una cierta cantidad de un bien (tierra, dinero, etc.). El problema que se presenta es el de que la suma de las reclamaciones de estos individuos excede la cuantía disponible del bien, E. Queremos modelar este problema desde el punto de vista de un árbitro imparcial que fuera llamado a resolver el conflicto planteado. Los datos con los que cuenta este juez son simplemente el vector de reclamaciones y la cantidad total de bien disponible. Lo que se espera de él es que aplique ciertos criterios éticos y procedimentales que permitan determinar un reparto de E como función de las reclamaciones c, admitiendo que estos criterios pueden depender de la naturaleza del problema de que se trate.

Un *problema de bancarrota* es un problema distributivo consistente en el reparto de una cierta cantidad E de un bien perfectamente divisible (dinero, tierra, tiempo, etc.) entre un conjunto $N = \{1,2,..., n\}$ de agentes, cuando la cantidad disponible del bien es insuficiente para satisfacer todas las demandas c_1, c_2,..., c_n. Denominaremos *presupuesto* a la cantidad de bien a repartir y lo denotaremos por un número real $E > 0$. Llamaremos *reclamaciones* a las demandas de los agentes, que representaremos por un vector $c \in \mathbb{R}^n_+$. De esta forma un problema de bancarrota puede resumirse mediante un par (E, c) en $\mathbb{R}^{n+1}_+$, con la propiedad de que $\sum_{i \in N} c_i > E$.

Desde un punto de vista geométrico un problema de bancarrota se resume en dos elementos. Un conjunto factible en el ortante positivo del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, definido mediante un simplex cuya dimensión viene dada por E, es decir, un conjunto $\Delta(E) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \ / \ \sum_{i=1}^n x_i = E \right\}$. Y un punto c también en $\mathbb{R}^n_+$ pero que no pertenece al conjunto factible. El gráfico 1 ilustra un problema de esta naturaleza para el caso de dos agentes.

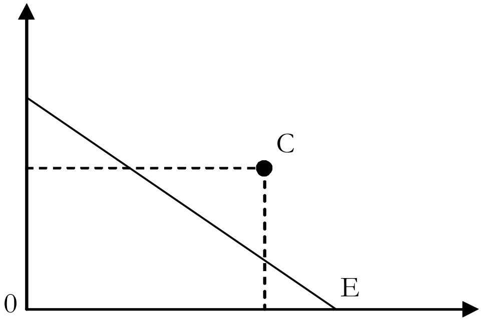

Gráfico 1. *Problema de bancarrota para dos agentes*

Podemos establecer entonces:

DEFINICIÓN 1. ***Un problema de bancarrota*** *es un par (E,c), donde* $E \in \mathbb{R}_+$ *representa la cantidad de bien disponible y* $c \in \mathbb{R}_+^n$ *es el vector de reclamaciones, con* $\sum_{i \in N} c_i > E$.

Denominaremos por ***Bn***, la familia de problemas de bancarrota con *n* agentes. Para simplificar la notación llamaremos *C* a la reclamación agregada, es decir, $C = \sum_{i \in N} c_i$. La diferencia $C - E > 0$ representa así el déficit o la pérdida colectiva del problema de bancarrota *(E,c)*.

DEFINICIÓN 2. ***Una solución a un problema de bancarrota*** *con n agentes es una función F que a cada problema (E,c) de* ***Bn****, asocia un único punto* $F(E,c) \in \mathbb{R}_+^n$ *tal que:*

(i) $c \geq F(E,c) \geq 0$.

(ii) $\sum_{i \in N} F_i(E,c) = E$

El punto *F(E,c)* se interpreta como una forma razonable de distribuir *E*. La condición (i) establece que ningún agente percibe una cantidad mayor que lo que demanda ni menor que cero. En particular, nadie que va a cobrar una deuda termina pagando. La condición (ii) traduce el requisito de eficiencia: dado que no hay bastante para cubrir todas las reclamaciones, la cantidad de bien disponible debe distribuirse en su totalidad.

Hay cuatro soluciones clásicas al problema de bancarrota. Las tres primeras, la proporcional, la igualitaria y la de igual pérdida, aplican un principio igualitario pero difieren en la variable que tratan de igualar. La proporcional, iguala ratios entre cantidades obtenidas y cantidades reclamadas. La segunda, iguala las cantidades obtenidas. Y la tercera iguala las pérdidas sufridas con respecto a las reclamaciones presentadas. La cuarta solución, la regla del Talmud, aplica una lógica diferente que consiste en que nadie obtenga más de la mitad de lo que reclama si la cantidad de bien disponible es inferior a la mitad de la cantidad total reclamada, y que nadie pierda más de la mitad de lo que reclama si la cantidad disponible supera la mitad de la reclamación global. Veamos más detenidamente cada una de estas reglas.

B. Tres soluciones igualitarias

La *solución proporcional*, atribuida a Aristóteles, es probablemente la forma más conocida y utilizada de resolver problemas de esta naturaleza. Esta solución distribuye el presupuesto proporcionalmente a las reclamaciones. Formalmente:

DEFINICIÓN 3. *La **solución proporcional** P es aquella solución que para cada problema (E,c) de Bn, propone una asignación* $P(E,c) = \lambda c$, *donde* $\lambda = E/C$.

La solución igualitaria propone resolver los problemas de bancarrota igualando las cantidades percibidas por todos los agentes, bajo la restricción de que nadie obtenga más de lo que reclama. Esta regla ha sido propuesta, entre otros, por Maimónides, en su tratado "Leyes para prestar y tomar prestado". Formalmente se define del siguiente modo:

DEFINICIÓN 4. *La **solución igualitaria** I es aquella solución que para cada problema (E,c) de **Bn,** y para cada agente i = 1,2,...,n, propone una asignación dada por:*
$I_i(E,c) = \min\{\lambda,\ c_i\}$

donde λ resuelve la ecuación $\sum_{i \in N} \min\{\lambda,\ c_i\} = E$.

La solución de igual pérdida propone distribuir por igual la diferencia entre la cantidad total demandada y la cantidad del bien disponible. Ello supondría dar a cada agente una cantidad $x_i = c_i - \frac{C-E}{n}$.

Pero como esta cantidad puede ser negativa para algún agente, la solución se aplica con la restricción de que $x_i \geq 0$. Este tipo de solución también aparece propuesta por Maimónides en su discusión de las pérdidas originadas para el vendedor de un objeto mediante una subasta cuando el ganador de la misma se echa atrás. Desde un punto de vista geométrico esta forma de resolver los problemas de bancarrota es muy natural dado que equivale a elegir el punto del conjunto presupuestario que está más cerca (en términos de la distancia euclídea) del vector de reclamaciones *c*. Formalmente:

DEFINICIÓN 5. *La **solución de igual pérdida** IP es aquella solución que para cada problema (E,c) de Bn, y para cada i = 1,2,..., n propone la asignación:*
$IP_i(E,c) = \max\{0,\ c_i - \mu\}$

donde $\mu > 0$ resuelve la ecuación $\sum_{i \in N} \max\{0,\ c_i - \mu\} = E$.

El gráfico 2 ilustra las asignaciones propuestas por estas tres soluciones. En el primer gráfico aparecen las soluciones que estas reglas determinan en un problema de bancarrota particular. En el segundo gráfico describimos los repartos que proponen las diferentes reglas dado un vector fijo de reclamaciones y haciendo variar el presupuesto de *0* a *C*.

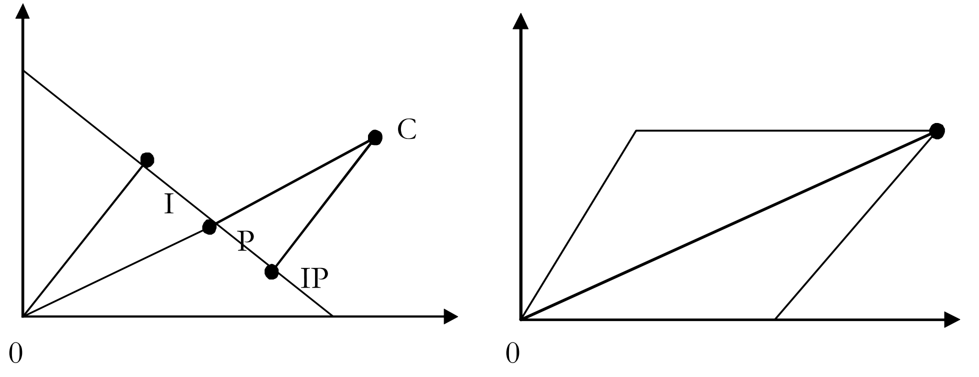

Gráfico 2. *Repartos propuestos por las diferentes reglas haciendo variar el presupuesto de 0 a C*

C. La regla del Talmud

En la tradición judía el Talmud ("estudio" o "aprendizaje" en hebreo) se refiere, usualmente, a una compilación de dos tipos de escritos. El *Mishna*, que es una colección de normas y leyes orales complementadas con algunas escritas, y el *Gemara*, que contiene una serie de comentarios y elaboraciones sobre el Mishna. La *regla del Talmud* es un procedimiento de reparto diseñado para acomodar las soluciones numéricas que aparecen en el Talmud relativas a la resolución de una serie de problemas prácticos muy específicos, relacionados con herencias.[3] Fue propuesta por Auman y Maschler en 1985, tras una primera contribución pionera de O'Neill en 1982.

El primero de estos problemas se refiere a cómo repartir una manta que un padre ha dejado en herencia a sus dos hijos. Uno de los hermanos asegura que su padre le prometió la manta completa y el otro que a él le prometió la mitad. Supondremos que ambas reclamaciones se realizan de buena fe. La solución propuesta por el rabino consiste en darle tres cuartos de la manta a quien reclama el 100 % y un cuarto a quien reclama la mitad. Así por ejemplo, si la manta tuviera

3 En realidad hay dos diferentes compilaciones de los comentarios que constituyen el Gemara, conocidas como el Talmud palestino y el Talmud babilónico. Las referencias a los problemas de bancarrota de los autores que mencionamos son relativas fundamentalmente al Talmud babilónico.

un valor de 200 ello supondría que nuestro problema de bancarrota sería de la forma: *n = 2, E = 200, c = (200, 100)*, y la solución adoptada *F(E,c) = (150, 50).*

El lector puede darse cuenta fácilmente de que estos números coinciden con la aplicación de la regla de igual pérdida. En este caso *C = 300*, *C – E = 100*, de modo que cada hermano pierde *50* con respecto a su reclamación. Y también puede encontrar otras soluciones diferentes que, en el caso de dos agentes, proporcionan esta solución. En particular puede verse también como el resultado de aplicar el siguiente principio: si una parte es reclamada por un agente y no por el otro, entonces se le concede automáticamente esa cantidad al único agente que la reclama. Y la cantidad que es reclamada por los dos se reparte a partes iguales.[4] Como uno de los hermanos no reclama más que la mitad de la manta y el otro toda, encontramos que hay una mitad de la manta que sólo es reclamada por uno de los hermanos. Le concedemos por tanto ese pedazo que solo él reclama. La otra mitad es reclamada por ambos, de modo que, teniendo igual derecho cada uno de ellos, se reparte por igual entre ambos. El resultado es el reparto (3/4, 1/4).

Pero el Talmud incluye también otros ejemplos cuya lógica no es tan elemental. El siguiente caso se refiere a un hombre que muere habiendo dejado promesa escrita a sus tres esposas de una herencia de 100, 200 y 300, respectivamente. Sin embargo el valor de sus propiedades resulta inferior a la promesa de 600. En este caso los rabinos consideran varios escenarios alternativos.[5] En el primero el valor de la herencia es 100, en cuyo caso conceden 100/3 a cada una de las viudas. En el segundo, el valor es de 200, situación en la que proponen un reparto de (50, 75, 75). En el tercero, tomando *E = 300*, sugiriendo un reparto de (50, 100, 150). Por último, analizan el problema cuando el valor efectivo de la herencia es de 450, en cuyo caso proponen un reparto de (50, 150, 250). El cuerpo de la tabla siguiente nos da los datos en los diferentes casos y el gráfico siguiente ilustra el tipo de reparto propuesto en las diferentes situaciones.

---

4 Formalmente: sea $m_i(E,c) = \max\{0,\ E - c_j\}$, con i,j=1,2. Entonces tendremos: $F_i(E,c) = m_i(E,c) + \frac{E - [m_1(E,c) + m_2(E,c)]}{2}$.

5 En realidad en el Talmud aparecen únicamente los tres primeros casos. He añadido el cuarto con fines puramente pedagógicos.

Tabla 1. *Reparto propuesto: distribución de una herencia a tres esposas*

100	200	300	450
100/3	50	50	50
100/3	75	100	150
100/3	75	150	250

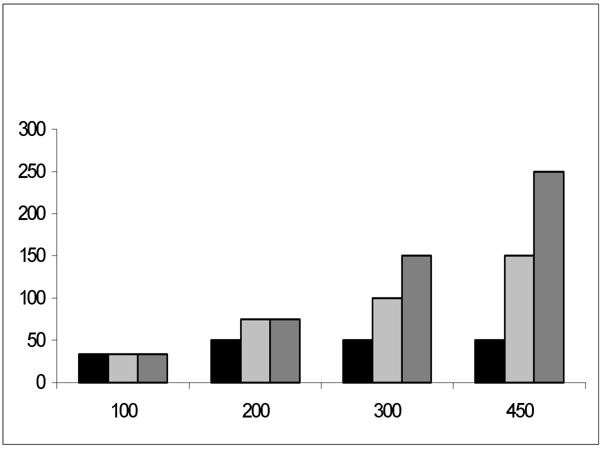

Gráfico 3. Reparto propuesto en el Talmud para diversos valores de E

La pregunta obvia es de dónde salen estos números y qué sentido tienen. O, más formalmente, si hay alguna función explícita que los genere. Observemos que no será una función trivial puesto que, para $E = 100$ (un valor pequeño del bien disponible en relación con la reclamación total) el reparto propuesto es el igualitario. Para el caso $E = 300$ el reparto propuesto coincide con la solución proporcional. Para $E = 450$ (un valor de la cantidad a repartir relativamente grande) la distribución sugerida corresponde a la regla de igual pérdida. Por último, cuando E vale 200 la distribución propuesta no coincide con la resultante de aplicar alguna de las reglas igualitarias.

Aumann y Maschler (1985) encuentran la fórmula que produce estos resultados y estudian sus propiedades. Descubren que en realidad los rabinos están aplicando un criterios distributivo complejo que depende de cómo sea la relación entre la cantidad del bien disponible E y la mitad de la reclamación agregada *C/2*. La regla del Talmud puede identificarse como la aplicación de un principio de protección a los agentes según el cual la pérdida de cada individuo será del mismo tipo que la pérdida social. *En particular, nadie obtendrá más de la mitad de su deuda cuando la cantidad disponible sea inferior a la mitad de la deuda agregada; y nadie perderá más de la mitad de su reclamación cuando la cantidad disponible supere la mitad del la reclamación total.* La regla del Talmud se define formalmente del siguiente modo:

DEFINICIÓN 6. *La* ***solución del Talmud*** *T es aquella solución que para cada problema (E,c) de* ***Bn****, y para cada i = 1,2,..., m propone la asignación*

$$T_i(E,c) = \begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}c_i,\ \lambda\right\} \ si\ E \le \frac{C}{2} \\ \max\left\{\frac{1}{2}c_i,\ c_i - \mu\right\} \ si\ E \ge \frac{C}{2} \end{cases}$$

donde $\lambda, \mu > 0$ *resuelven las ecuaciones:*

$$\Sigma_{i\in N} \min\left\{\frac{1}{2}c_i,\ \lambda\right\} = E \ \ y \ \ \Sigma_{i\in N} \max\left\{\frac{1}{2}c_i,\ c_i - \mu\right\} = E \ \ \textit{respectivamente.}$$

El gráfico 4 describe cómo se comporta la solución del Talmud en un problema con un vector de reclamaciones dado y una cantidad variable de dinero a repartir.

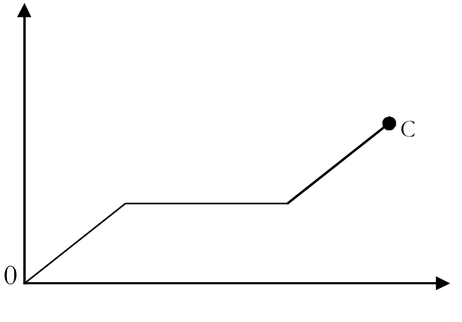

Gráfico 4. Solución del Talmud en un problema con un vector de reclamaciones dado y una cantidad variable de dinero a repartir

Aumann y Maschler prueban que esta es en realidad la única fórmula que extiende consistentemente la solución propuesta para el problema de la manta disputada entre los dos hermanos, cuando consideramos el caso general de n agentes. La noción de "consistencia" quiere decir, como precisaremos después, que si aplicamos la solución a un problema con $n \geq 2$ agentes y luego aplicamos la misma fórmula a subconjuntos de dos agentes tomando como reclamaciones las suyas originales y como cantidad a repartir la que les tocó en el problema inicial, el resultado que los individuos obtienen será el mismo.

Uno puede preguntarse razonablemente qué tiene de especial el valor 1/2 tomado como referencia en la regla del Talmud, aparte de ser la fórmula que se deriva de la extensión consistente de la regla de reparto de la manta entre los dos hermanos. Aumann y Maschler se refieren al principio psicológico según el cual "más de la mitad es como todo y menos de la mitad como nada". Por tanto, es razonable fijarse en las ganancias cuando están por debajo de la mitad de la reclamación y en las pérdidas cuando están por encima.[6] Un hecho curioso es que aunque estas soluciones a los problemas de bancarrota son conocidas y utilizadas desde la antigüedad, su caracterización axiomática es muy reciente.

II. Propiedades de las soluciones

Consideraremos ahora algunas propiedades que podría pedirse que cumpliera un procedimiento ideal de solución. Hay un gran número de propiedades interesantes que uno puede pensar y que verifica cada una de las reglas que estamos estudiando. Pero también es cierto que hay algunas propiedades deseables que son incompatibles entre sí, de modo que uno tiene que optar por unas u otras pero no por todas a la vez. En ocasiones la combinación de algunas propiedades fácilmente admisibles determina de forma precisa la regla de reparto.

En lugar de dar un elenco de las principales propiedades y señalar todas y cada una de las que cumplen las diferentes reglas nos limitaremos a presentar unas pocas que, sin embargo, permiten caracterizar las cuatro soluciones clásicas al problema de bancarrota. De entre las posibles caracterizaciones alternativas

6 En Moreno-Ternero y Villar (2003) se analiza la familia de soluciones que se obtiene cuando en lugar del valor 1/2 se utiliza cualquier proporción entre 0 y 1.

haremos hincapié en aquellas a las que hemos contribuido con nuestro propio trabajo de investigación.

A. Propiedades básicas de las soluciones igualitarias

Comenzaremos presentando cinco propiedades básicas que cumplen las tres soluciones igualitarias introducidas en la sección anterior. La primera, tratamiento igualitario, traduce un elemental juicio de valor. Las otras cuatro, independencia de la escala, composición hacia arriba, composición hacia abajo y consistencia, son fundamentalmente requisitos de procedimiento. Impiden que la solución de un problema dependa de la elección de las unidades, de la resolución por partes o de la posibilidad que subconjuntos de agentes quieran renegociar lo que les ha tocado usando la misma regla. Veamos más de cerca estas propiedades.

La propiedad de *tratamiento igualitario* es quizás el requisito ético más elemental. Establece que si los agentes son iguales deben ser tratados por igual. En un problema tan sencillo como éste, que los agentes sean iguales significa simplemente que tengan las mismas reclamaciones. Formalmente:

TRATAMIENTO IGUALITARIO. *Una solución F verifica la propiedad de tratamiento igualitario si para todo problema (E,c) de* ***Bn****, y para todo* $i, j \in N$, *tenemos:* $c_i = c_j \Rightarrow F_i(E,c) = F_j(E,c)$.

Adviértase que esta propiedad no dice que todo el mundo sea igual ni que haya que repartir a todos por igual. Lo que dice es que no podemos discriminar a los agentes que entran en el problema con los mismos datos.[7]

La *independencia de la escala* establece que las unidades de medida son irrelevantes en la resolución del problema. Es decir, si pasamos la formulación de un problema de bancarrota de euros a euros, la solución en euros debe ser exactamente la correspondiente al cambio de la solución en euros. Esta propiedad se obtiene trivialmente cuando la función solución es homogénea de grado uno. Es decir:

INDEPENDENCIA DE LA ESCALA. *Una solución F verifica la propiedad de independencia de la escala si, para todo problema (E,c) de* ***Bn,*** *y para todo escalar* $\lambda > 0$ *tenemos:* $F(\lambda E, \lambda c) = \lambda F(E,c)$.

Para motivar las dos siguientes propiedades supongamos que ha habido algún error de cálculo (o variación inesperada) en la determinación de la cantidad

7 Moulin (2000) analiza reglas de reparto que no cumplen esta propiedad.

disponible del bien a repartir y que descubramos el error una vez propuesta una distribución de la cantidad disponible que habíamos estimado. Puede ocurrir que nos hayamos equivocado "por bajo" (es decir que en realidad la cuantía disponible sea superior a la que habíamos repartido) o que nos hayamos equivocado "por alto" (que la propuesta de distribución comprenda una cantidad superior a la realmente existente). Una vez detectado el error habrá que rehacer la distribución. Una posibilidad es ignorar por completo la asignación propuesta inicialmente y resolver el problema con los datos reales. Otra, consiste en realizar una nueva propuesta a partir de un ajuste de la anterior. Las propiedades de *composición hacia arriba* y *composición hacia abajo* requieren que ambos procedimientos den el mismo resultado, en los errores de uno y otro tipo.

Formalmente:

COMPOSICIÓN HACIA ARRIBA. *Una solución F verifica la propiedad de composición hacia arriba si, para todo problema (E,c) de* ***Bn,*** *y para todo E'< E,* $F(E,c) = F(E',c) + F\left[E - E',\ c - F(E',c)\right]$.

Esta propiedad garantiza que cualquier problema de bancarrota podemos resolverlo como la suma de dos sub-problemas. El primero, *(E',c)*, corresponde al reparto de una fracción del presupuesto con respecto a las reclamaciones originales. El segundo corresponde al reparto del presupuesto restante, $E - E'$, con respecto a unas nuevas reclamaciones, $c' = c - F(E',c)$, en las que hemos descontado la parte ya satisfecha de las reclamaciones originales. La propiedad de composición hacia arriba establece que resolver el problema en pedazos o de una sola vez no altera el resultado.

COMPOSICIÓN HACIA ABAJO. *Una solución F verifica la propiedad de composición hacia abajo si, para todo problema (E,c) de* ***Bn****, y para todo* $E' > E$, $F(E,c) = F\left[E,\ F(E',c)\right]$.

Esta propiedad es de aplicación cuando hemos realizado un reparto excesivamente optimista y resulta que el presupuesto efectivamente disponible es inferior a la cantidad que habíamos estimado. Lo que nos dice es que el resultado de aplicar correctamente la solución debe coincidir con el que se obtendría tomando la inalcanzable asignación inicial como nuevo vector de reclamaciones. Este criterio viene a decir que aunque la propuesta realizada pueda definir un nuevo *statu quo,* ello no debe afectar a la resolución final del problema.

La siguiente propiedad, *consistencia*, se refiere al caso de una población variable. Se trata de un requerimiento que permite relacionar los resultados derivados de la aplicación de una cierta regla en una población con los asociados a la aplicación de la misma regla a subconjuntos de esa misma población.

Para definir formalmente esta propiedad sea *B* la clase de problemas de bancarrota con cualquier número (finito) de agentes. Un problema es ahora una tripleta *(N,E,c)* donde *N* es un conjunto de *n* agentes (donde *n* es el cardinal de *N*), *E* un escalar positivo y *c* un vector *n*-dimensional. Sea ahora $S \subset N$ un subconjunto arbitrario de los agentes de *N* y *F* una función definida sobre *B*. Supongamos que, una vez resuelto el problema de bancarrota *(N,E,c)*, el subconjunto de agentes *S* considera el resultado que ser derivaría de aplicar la misma regla de reparto *F* al problema reducido que consiste en repartir la suma de lo que han obtenido los agentes de *S* con respecto a sus reclamaciones originales, es decir, se plantean resolver el problema en B_s $\left(S, \sum_{i\in S} F_i(N,E,c), (c_i)_{i\in S}\right)$, donde $(c_i)_{i\in S}$ es el vector de reclamaciones de los *s* miembros de *S*. La propiedad de consistencia requiere que el resultado de aplicar la solución *F* a cualquiera de los problemas reducidos que podamos considerar no altere lo que la regla asignó al resolver el problema con todos los agentes juntos.

Formalmente:

CONSISTENCIA. *Una solución F definida sobre* ***B*** *verifica la propiedad de consistencia si, para todo problema (N,E,c) de B, para todo* $S \subset N$ *, y para todo i de S,*

$$F_i(N,E,c) = F_i\left(S, \sum_{i\in S} F_i(N,E,c), (c_i)_{i\in S}\right)$$

Cuando una regla es consistente ningún grupo de agentes tiene interés en volver a discutir la distribución aplicando los mismos criterios, dado que sus asignaciones no cambiarán. En otras palabras, la consistencia establece que si un criterio de reparto es bueno para la sociedad en su conjunto también será bueno para cualquier grupo social que consideremos.

Es relativamente fácil comprobar que las soluciones proporcional, igualitaria e igual pérdida verifican estas cinco propiedades. Mucho más difícil es demostrar que son las únicas que lo hacen, como establece el siguiente resultado:

TEOREMA 1 [Moulin (2000)] *Hay tres y solamente tres soluciones que verifican simultáneamente las propiedades de tratamiento igualitario, independencia de a escala, composición hacia arriba y hacia abajo y consistencia. Son la solución proporcional, la solución igualitaria y la solución de igual pérdida.*

Este teorema nos dice que si queremos tomar en consideración otros criterios de reparto distintos de estas tres reglas deberemos violar necesariamente alguna de las cinco propiedades enunciadas. O bien la propiedad ética fundamental del tratamiento igualitario o bien alguna de las propiedades operativas que la acompañan. Pero eliminar cualquiera de ellas implica que podemos encontrarnos con comportamientos no deseables de la nueva solución. Así, si no se verifica independencia de la escala, un cambio en las unidades alteraría el resultado, cosa difícilmente admisible. Si una solución no es consistente entonces va a ser poco estable porque los individuos tendrán incentivos a renegociar los repartos. Y si no se cumplen las propiedades de composición se abre la posibilidad de que los errores de estimación tengan consecuencias relevantes en los repartos finales. Este Teorema pone énfasis en los elementos comunes de tres de estas soluciones. Veamos ahora qué propiedades permiten separarlas.

B. Una propiedad de simetría: la auto-dualidad

Habíamos comentado en la introducción que la resolución de un problema de bancarrota puede entenderse tanto como el reparto de una cantidad E en función de unas reclamaciones c, como el reparto de una pérdida $(C - E)$ en función de estas reclamaciones. Esta idea sugiere que a cada solución F podemos asociarle su ***solución dual F**** del siguiente modo:

$$F^*(E,c) = c - F(C - E,c)$$

La solución dual se puede entender construida del siguiente modo. Inicialmente concedemos a cada agente lo que pide, es decir el vector c. Como este reparto no es factible, entonces tenemos que deducir de ese reparto ideal la cantidad que falta, $(C - E)$. La solución F^* reparte "lo que hay" del mismo modo que la solución F reparte "lo que falta". La propiedad de auto-dualidad establece que una regla y su dual coinciden. Es decir:

AUTO-DUALIDAD. *Una solución F definida sobre* ***Bn,*** *verifica la propiedad de auto-dualidad si, para todo problema (E,c) de* ***Bn,***

$$F^*(E,c) = F(E,c)$$

La propiedad de auto-dualidad introduce un elemento de simetría en el comportamiento de la solución con respecto a las ganancias y las pérdidas. Establece que el mismo principio debe ser aplicado si consideramos *(E,c)* como un problema de distribución de ganancias o de pérdidas. Obsérvese que, de acuerdo con la definición de solución, podemos escribir $c = F(C,c)$ para cualquier F. Por tanto, la propiedad de auto-dualidad puede expresarse también como:

$$F(C,c) - F(E,c) = F(C-E,c)$$

que nos da una formulación de esta propiedad relacionada con la aditividad de la solución en la cantidad a repartir. Tanto la solución proporcional como la regla del Talmud son auto-duales. Pero además:

TEOREMA *2* [Young (1988)] *Una solución verifica las propiedades de composición hacia arriba y auto-dualidad si y sólo si es la solución proporcional.*

C. Exención, exclusión y aseguramiento

Introducimos ahora tres propiedades que aplican criterios de compensación de los agentes, condicionales a la magnitud de sus reclamaciones en relación con la cuantía del bien disponible.

Las propiedades de exención y exclusión incorporan prescripciones duales sobre el tratamiento que la solución debe dar a aquellos agentes cuyas reclamaciones son muy pequeñas en relación con la cantidad del bien a repartir.

La propiedad de *exención* establece que cuando los recursos disponibles son suficientemente grandes, únicamente los agentes con mayores reclamaciones deben ser racionados. Puede verse como una instancia particular del principio general de "progresividad" según el cual los agentes con menores reclamaciones tienen prioridad en el reparto. Más concretamente, la propiedad de compensación condicional total establece que, si un individuo reclama menos de la cantidad disponible per capita, entonces debe recibir todo lo que pide. Formalmente:

EXENCIÓN. *Una solución F verifica la propiedad de exención si, para todo problema (E, c) y para todo i de N,*

$$c_i \leq \frac{E}{n} \Rightarrow F_i(E,c) = c_i$$

Obsérvese que el principio ético que hay detrás de esta propiedad se aplica por ley en algunas situaciones reales. Un caso relevante es el relativo a la bancarrota de una institución financiera, donde el pago de las deudas de los pequeños impositores tiene preferencia. La razón de fondo es que en estos casos los agentes con menores reclamaciones son aquellos para los que éstas representan una mayor proporción de su riqueza.

Otra situación familiar donde se aplica este principio es la exención en el pago de impuestos a los ciudadanos con rentas bajas. Si interpretamos el problema de bancarrota como un problema de impuestos donde $\boldsymbol{c}$ es el vector de rentas brutas, E la renta total después de impuestos y, consecuentemente, $C-E$ es la cantidad a recaudar, entonces la propiedad de compensación condicional total nos dice que aquellos ciudadanos con una renta bruta inferior a la renta neta media están exentos de pagar impuestos.

La propiedad de *exclusión* introduce un juicio de valor opuesto al anterior: los agentes con reclamaciones muy pequeñas deben ser ignorados. Este principio ético puede resultar de aplicación cuando las reclamaciones corresponden en realidad a necesidades más que a demandas monetarias. Traduciría el principio de que cuando hay escasez de un bien esencial no hay que dar nada a los agentes con necesidades menores. Esta propiedad se aplica en contextos relacionados con la sanidad donde se financian los fármacos caros o las intervenciones quirúrgicas de cierta envergadura, pero no las aspirinas o la cirugía estética. También en el reparto de alimentos o medicinas en campos de refugiados, por ejemplo. La exclusión dice que si un agente presenta una reclamación (tiene una necesidad) inferior al déficit per capita, entonces no recibe nada. Formalmente:

EXCLUSIÓN. *Una solución F verifica la propiedad de exclusión si, para todo problema (E, c) y para todo i de N,*

$$c_i \leq \frac{C-E}{n} \Rightarrow F_i(E,c)=0$$

Es fácil comprobar que la regla de igual ganancia verifica exención pero no exclusión, que la regla de igual pérdida verifica exclusión pero no exención y que la regla proporcional no verifica ninguna de estas dos propiedades. Pero además puede probarse lo siguiente:

TEOREMA 3 [Herrero y Villar (2001)] *Una solución verifica las propiedades de composición hacia abajo, exención y consistencia si y sólo si es la solución de igual ganancia.*

TEOREMA 4 [Herrero y Villar (2001)] *Una solución verifica las propiedades de composición hacia arriba, exclusión y consistencia si y sólo si es la solución de igual pérdida.*

Las propiedades de exención y exclusión representan criterios extremos sobre el comportamiento de la solución con respecto a los agentes con reclamaciones pequeñas. Introducimos ahora un criterio más moderado que garantiza unos pagos mínimos a los agentes según que sus reclamaciones sean menores o mayores que la cantidad disponible. La propiedad de *aseguramiento* establece que si un agente tiene una reclamación $c_i \leq E$ entonces recibirá al menos c_i/n. Y que si, por el contrario, tenemos que $c_i > E$, entonces recibirá al menos E/n.

Formalmente:

ASEGURAMIENTO. *Una solución F verifica la propiedad de aseguramiento si, para todo problema (E,* ***c****) y para todo i de N,*

$$F_i(E,\ c) \geq \frac{1}{n}\min\{c_i,\ \ E\}$$

Es interesante observar que el pago mínimo garantizado para cada agente solo depende de su propia reclamación, el número de agentes implicados en el problema y la cantidad a repartir. Pero no de las reclamaciones de otros agentes. Por tanto, si una solución cumple esta propiedad el individuo puede saber la compensación mínima que recibirá aun antes de conocer las reclamaciones de los demás agentes. La solución de igual pérdida como la regla del Talmud verifican esta propiedad. Pero además:

TEOREMA 5 [Moreno-Ternero y Villar (2004)] *Una solución verifica las propiedades de consistencia, aseguramiento y auto-dualidad si y sólo si es la regla del Talmud.*

III. Comentarios finales

Hemos presentado aquí cuatro reglas clásicas que permiten solucionar los problemas de bancarrota aplicando diferentes criterios de equidad. Qué principio ético es adecuado dependerá por lo general del tipo concreto de problema de que se trate. Las soluciones: proporcional, de igual ganancia y de igual pérdida, aplican un principio igualitario y difieren en la variable que toman como referencia (ratios, ganancias o pérdidas). La regla del Talmud aplica un principio de protección que asegura que todos los individuos sufrirán un racionamiento del mismo tipo que el racionamiento que experimenta la sociedad en su conjunto.

El Teorema 1 proporciona una caracterización conjunta de las tres soluciones igualitarias. Este resultado pone de manifiesto los elementos comunes presentes en estas tres reglas tradicionales. La caracterización separada de las mismas es abordada en los teoremas 2, 3 y 4. En ellas se muestra que añadir auto-dualidad a estas propiedades comunes equivale a seleccionar la solución proporcional, mientras que añadir exención o exclusión equivale a elegir la solución de igual ganancia o la solución de igual pérdida, respectivamente. El teorema 5 sugiere que la regla del Talmud comparte algunos de los principios de estas tres reglas. Es consistente como todas ellas, auto-dual como la solución proporcional, y verifica una propiedad de compensación intermedia entre exención y exclusión. Estos resultados ayudan a entender la naturaleza de las distintas soluciones y los contextos en los que su aplicación puede ser más razonable.

Conviene señalar que los problemas de bancarrota pueden formularse también en términos de juegos cooperativos con utilidad transferible, definiendo adecuadamente la función característica. Así podemos vincular de forma natural algunas de estas reglas de reparto a las soluciones de los juegos cooperativos asociados.[8] También existen extensiones del problema de bancarrota al caso de utilidades no transferibles.[9]

Anexo. *Un sencillo ejemplo numérico*

Terminamos este capítulo con un sencillo ejemplo numérico. Imaginemos a dos amigos, Alberto y Beatriz, que acuerdan comprar un terreno que cuesta 100.000 euros con la idea de venderlo un año después por un precio superior. Beatriz aporta 60.000 € y Alberto los 40.000 € restantes.

Supongamos que cuando llega el momento de vender el terreno y recuperar la inversión con las posibles ganancias, resulta que el valor del suelo ha descendido y es ahora inferior al precio que pagaron Alberto y Beatriz por su adquisición. Tenemos aquí un problema de bancarrota: hay que repartirse el valor de venta del terreno cuando no alcanza para cubrir el valor de la inversión.

Consideremos tres escenarios distintos, que corresponden a tres valores de venta del terreno diferentes. En el primer escenario el terreno se vende por 90.000 €. En el segundo el valor del terreno únicamente alcanza los 50.000 €. Por último analizaremos el caso especialmente negativo en que el terreno sólo puede venderse por 20.000 €.

¿Cómo se reparte el valor del terreno en cada uno de estos casos, como función de las aportaciones iniciales, de acuerdo con las diferentes reglas de reparto? Veámoslo en la tabla 2. Cada columna de la tabla nos informa sobre el

---

8 Véase por ejemplo O'Neill (1982), Aumann & Maschler (1985), Herrero, Maschler & Villar (1999).

9 Véase Mariotti y Villar (2005).

reparto correspondiente a un valor de venta del terrero (que juega el papel de E), para las diferentes soluciones propuestas. En cada celda aparecen dos números que describen lo que le correspondería a Alberto (primer número) y a Beatriz (segundo número) en cada caso. Siempre partiendo de la base de que Alberto tiene una reclamación c_A = 40.000 € y Beatriz una reclamación c_B = 60.000 €. (Véase tabla 2).

*Tabla 2. Repartición del valor del terreno**

	E = 90.000	E = 50.000	E = 20.000
Proporcional	(36.000, 54.000)	(20.000, 30.000)	(8.000, 12.000)
Igual Ganancia	(40.000, 50.000)	(25.000, 25.000)	(10.000, 10.000)
Igual Pérdida	(35.000, 55.000)	(15.000, 35.000)	(0, 20.000)
Talmud	(35.000, 55.000)	(20.000, 30.000)	(10.000, 10.000)

*Ejemplo numérico del anexo.

Los datos ilustran cómo operan las diferentes reglas en un caso muy sencillo. Vemos que la solución proporcional genera siempre distribuciones intermedias entre la de igual ganancia y la de igual pérdida. Y también que la solución del Talmud coincide con la de igual pérdida (cuando E es "grande"), la proporcional (cuando E es precisamente la mitad de la reclamación total), y la solución de igual ganancia (cuando E es "pequeño").

Un buen ejercicio para el lector es comprobar que puede generar los datos de la tabla a partir de las definiciones de las reglas. Y, mejor aún, buscar ejemplos que ilustren cómo las diferentes reglas violan algunas propiedades en este caso concreto (v.g., que si repartimos E en dos pedazos el resultado asociado a la solución del Talmud difiere del reparto de una sola vez).

Bibliografía

AUMANN, Robert y MASCHLER, Michael, 1985, "Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud", *Journal of Economic Theory*, Vol. 36, pp. 195-213.

CHUN, Youngsub, 1988, "The Proportional Solution for Rights Problems", *Mathematical Social Sciences*, Vol. 15, pp. 231-246.

____________, 1999, "Equivalence of Axioms for Bankruptcy Problems", *International Journal of Game Theory*, Vol. 28, pp. 511-520.

CURIEL, I.; MASCHLER, Michael y TIJS, Stef, 1988, "Bankruptcy Games", *Zeitschrift für Operations Research*, Vol. 31, pp. A143-A159.

DAGAN, Nir, 1996, "New Characterizations of Old Bankruptcy Rules", *Social Choice and Welfare*, Vol. 13, pp. 51-59.

____________ y VOLIJ Oscar, 1993, "The Bankruptcy Problem: A Cooperative Bargaining Approach", *Mathematical Social Sciences*, Vol. 26, pp. 287-297.

____________; SERRANO, Roberto y VOLIJ. Oscar, 1997, "A Noncooperative View of Consistent Bankruptcy Rules", *Games and Economic Behavior*, Vol. 18, pp. 55-72.

HERRERO, Carmen; MASCHLER, Michael y VILLAR, Antonio, 1999, "Individual Rights and Collective Responsibility: The Rights Egalitarian Solution", *Mathematical Social Sciences*, Vol. 37, pp. 59-77.

____________ y VILLAR, Antonio, 2001, "The Three Musketeers: Four Classical Solutions to Bankruptcy Problems", *Mathematical Social Sciences*, Vol. 42, pp. 307-328.

____________, 2002, "Sustainability in Bankruptcy Problems", *TOP*, Vol. 10, No. 2, pp. 261-273.

MARIOTTI, Marco y VILLAR, Antonio, 2003, "The Nash Rationing Problem", *International Journal of Game Theory*.

MARTINEZ, R., 2003, *Claims Problems with Indivisible Goods*, Mimeo, Universidad de Alicante.

MORENO-TERNERO, Juan D. y VILLAR, Antonio, 2004, "The Talmud Rule and the Securement of Agents' Awards", *Mathematical Social Sciences*, Vol. 47, pp. 245-257.

____________, 2005, "The TAL Family of Rules for Bankruptcy Problems", *Social Choide and Welfare*.

MOULIN, Hervé, 2000, "Priority Rules and Other Asymmetric Rationing Methods", *Econometrica*, Vol. 68, pp. 643-684.

____________, 2001, Axiomatic Cost and Surplus-Sharing, Capítulo 17 del libro de ARROW, Keneth; SEN Amartya y SUZUMURA, Kotaro, (eds.), *The Handbook of Social Choice and Welfare*, Vol. 1. North-Holland. pp. 289-357.

O'NEILL Barry, 1982, "A Problem of Rights Arbitration from the Talmud", *Mathematical Social Sciences*, Vol. 2, pp. 345-371.

THOMSON, William, 1998, *On the Axiomatic Method and its Applications to Game Theory and Resource Allocation*, Mimeo, University of Rochester.

____________, 2003, "Axiomatic and Game Theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems: A Survey", *Mathematical Social Sciences*, Vol. 45, pp. 249-297.

_____________, 2003, "Axiomatic and Game Theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems: A Survey", *Mathematical Social Sciences*, Vol. 45, pp. 249-297.

YEH, Chun-Hsien, 2003a, "Sustainability, exemption and the equal awards rule: A note", *Mathematical Social Sciences*.

_____________, 2003b, *Protective properties and the constrained equal awards rule for claims problems*, Mimeo, University of Rochester.

YOUNG, Peyton, 1987, "On Dividing an Amount According to Individual Claims or Liabilities", *Mathematics of Operation Research*, Vol. 12, pp. 398-414.

_____________, 1988, "Distributive Justice in Taxation", *Journal of Economic Theory*, Vol. 43, pp. 321-335.

_____________, 1994, *Equity*, Princeton University Press, Princeton.