

El dinero en el modelo Arrow-Debreu bajo incertidumbre

Introducción. I. La Incertidumbre en el modelo Arrow-Debreu. II. El Dinero en el Modelo Arrow-Debreu con Incertidumbre. III. Algunas Consideraciones del Modelo Arrow-Debreu-Radner con Dinero. Referencias

Introducción

Desde la publicación de la obra de Walras [1874], el dinero se ha intentado introducir en la teoría del equilibrio general competitivo. Mientras que los aspectos no monetarios de la teoría se han ido mejorando de forma más o menos armoniosa, los desarrollos sobre los aspectos monetarios han surgido con ciertos problemas y resultados insatisfactorios. Las razones de esto pueden deberse a la falta de unidad de las dos vertientes de la teoría monetaria, i) los desarrollos de la macroeconomía, y ii) la teoría del equilibrio general que busca establecer si el dinero, como medio de intercambio, juega un papel esencial.

Walras, el propio fundador del equilibrio general, es el primero en modelar el concepto de equilibrio para una economía con el dinero. Introduce, en su sistema de ecuaciones de excesos de demanda de las mercancías de la economía, una ecuación más que representaba el exceso de demanda por dinero. Esto lo realiza, distinguiendo claramente el *stock* de dinero, como algo que carece de utilidad para los que lo poseen, y los *servicios* que presta

el tenerlo. Este último aspecto es el que entra en las funciones de utilidad y producción de los consumidores y productores respectivamente. Para Walras, es el servicio que le presta el tener dinero a los agentes, lo que les brinda utilidad y beneficio, y no la cantidad de dinero simplemente.

Más tarde, Hicks [1935] sugiere que para simplificar la teoría del dinero se le debería integrar a la teoría del valor. El argumento que brindaba era que, como el análisis marginalista era una teoría general de la elección, y como los individuos eligen la cantidad de dinero que pretenden mantener, entonces resultaba natural que la teoría monetaria pudiera eventualmente integrarse a la teoría del valor.

Al final de los años cincuenta, la teoría del valor se consolida definitivamente con la publicación de *Theory of Value* de Debreu [1959], que representaba la formalización definitiva de las ideas iniciales de Walras. Debreu excluye de entrada consideraciones monetarias del modelo, remitiendo al lector interesado a la obra de Patinkin [1956]¹. Es este autor quien en 1965 culmina algunos esfuerzos de integrar el dinero en la teoría del valor. Desarrolla una teoría marginalista de la demanda por dinero, basando su utilidad en el supuesto de que los individuos tratan de no *quedar mal* con sus compromisos, es decir, que un cierto tipo de *vergüenza* motiva a los agentes a mantener dinero (moral hazard).

Patinkin realiza una prueba de existencia del equilibrio en una economía monetaria que conserva los supuestos habituales de una economía Walrasiana (homogeneidad y continuidad de las funciones de exceso de demanda, ley de Walras). Supone a priori que el dinero poseía un valor positivo y que las funciones de exceso de demanda dependen no de la distribución del stock de dinero inicial sino del stock de dinero agregado. Además, Patinkin aporta a la teoría del dinero en el equilibrio general la adecuada formulación del *efecto de saldos reales*, que muestra cómo se determinan simultáneamente las magnitudes reales y nominales en la

1 "Ninguna teoría monetaria es ofrecida aquí y se supone que la economía funciona sin la ayuda de un bien que sirva como medio de intercambio". (Debreu [1959] p. 28).

economía, y la definición de *neutralidad* del dinero en consideraciones de largo y corto plazo.

Hahn [1965] critica la prueba realizada por Patinkin arguyendo que el valor positivo del dinero debería ser una conclusión de un buen modelo monetario y no una hipótesis inicial de él. Además, considera que la exclusión de los efectos distribucionales del dinero sobre las funciones de exceso de demanda de los agentes es un supuesto implausible dentro de una teoría monetaria. Concluye finalmente que Patinkin había fallado en ofrecer un modelo que sirviera como fundamento adecuado para una teoría monetaria.

Clower [1967] afirma que los agentes deberían realizar los intercambios únicamente en dinero, y por ello deberían poseer una cantidad suficiente de él. Veremos que es necesario suponer la restricción de Clower en el modelo A-D, porque de otra forma no existiría un motivo para demandar dinero.

Grandmont [1983] incluye, dentro de las funciones de exceso de demanda, la distribución del stock de dinero inicial, atendiendo la observación que realizó Hahn al modelo de Patinkin. Grandmont muestra que para una economía de intercambio puro, bajo ciertas hipótesis sobre las funciones de utilidad de los consumidores y sus funciones de expectativas de precios, existe un equilibrio monetario. Sin embargo, su análisis estuvo explícitamente enmarcado dentro del equilibrio temporal y no en la estructura general A-D.

Por otra parte, Hahn [1983] publica un comentario sobre el problema del equilibrio general walrasiano y su relación con el dinero. En este artículo se muestra bastante escéptico sobre los logros realizados hasta la fecha, sugiriendo las preguntas fundamentales que debería resolver una verdadera teoría monetaria. Hahn concluyó afirmando: *el modelo A-D describe un mundo en el cual ninguno de los problemas que interesaron a Keynes puede suceder*. Según Hahn y otros autores, una verdadera teoría monetaria debería dar cuenta de los determinantes de la demanda de dinero, lo cual es equivalente a probar la existencia de un equilibrio con valor positivo del dinero. Hahn enfatiza que *el valor positivo del dinero debe ser un resultado de la prueba de existencia y no un supuesto a priori*.

En la segunda sección se presenta la versión del modelo A-D bajo una incertidumbre objetiva, mostrándose las condiciones que se requieren para garantizar la existencia de un Equilibrio, así como su relación con los Óptimos de Pareto. En la tercera sección se muestra el modelo A-D bajo incertidumbre con una estructura financiera y se presentan condiciones suficientes para garantizar la existencia de un Equilibrio Monetario, examinándose sus condiciones de optimalidad. Además, se ilustra el modus operandi del modelo con dos ejemplos y se hacen algunas consideraciones finales sobre el dinero.

I. La Incertidumbre en el modelo Arrow-Debreu

Consideraremos una incertidumbre objetiva, es decir, una incertidumbre que tienen los agentes sobre los estados de la naturaleza. Radner [1968] fue el primero que analiza este tipo de incertidumbre en el modelo A-D. Nosotros seguiremos su presentación y no consideramos la incertidumbre que surge cuando los agentes actúan estratégicamente; es decir, cuando existe interdependencia entre las decisiones y no se conoce con certeza el resultado de su interacción.

Definición 1. Sea S un conjunto con un número finito de elementos $|S|$, llamado el conjunto de *estados de la naturaleza*. Los estados en S son mutuamente excluyentes y están por fuera del control de cualquiera de los agentes.

Definición 2. (Noción de Mercancía A-D bajo Incertidumbre). Bajo incertidumbre una mercancía A-D es un bien o servicio que está caracterizado, además de sus propiedades físicas, temporales y espaciales, por el estado de la naturaleza en que se encuentra disponible. Así, dos bienes con características físicas idénticas, en una fecha y lugar determinados, pero disponibles en dos estados de la naturaleza diferentes, se consideran dos mercancías diferentes. Por ejemplo, una sombrilla en una fecha y lugar específicos será una mercancía diferente si el día es soleado o lluvioso.

La economía A-D con Incertidumbre está caracterizada así:

i. Una economía con T fechas y C diferentes mercancías A-D en cada fecha. Un *acto* de un agente económico es una T -tupla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_T)$, donde

para cada t , α_t es una función de \mathbf{S} en \mathbb{R}^C . Para un agente la c -ésima coordenada de $\alpha_t(s)$ es la cantidad de la mercancía c en la fecha t si s es el verdadero estado de la naturaleza.² Un sistema de precios es una T -tupla $p = (p_1, p_2, \dots, p_T)$ diferente de cero, donde para cada t , p_t es una función de \mathbf{S} en \mathbb{R}^C . La c -ésima coordenada de $p_t(s)$ es el precio de la mercancía c en la fecha t si s es el verdadero estado de la naturaleza. Todo acto y todo sistema de precios es un punto de $L = \mathbb{R}^T$, donde $l \equiv \text{TxCx} | \mathbf{S} |$. El producto punto $p\alpha$ representa el valor de un acto α relativo a un sistema de precios p : $p\alpha \equiv \sum_s \sum_t p_t(s) \alpha_t(s)$.

ii. Denote \mathcal{S}_t una partición de \mathbf{S} sobre la que un agente dado basa sus decisiones en una fecha t . La T -tupla $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_T)$ es llamada *la estructura de información* del agente dado. La estructura de información restringe los actos del agente dado de la siguiente forma: para todo t , todo conjunto $M \in \mathcal{S}_t$, si $s, s' \in M$, entonces $\alpha_t(s) = \alpha_t(s')$. Sea $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ el conjunto de todos los actos que satisfacen esta restricción. Este conjunto es un subespacio lineal de L . El subconjunto M en la partición \mathcal{S}_t representa la idea que si el verdadero estado de la naturaleza está en M , entonces la información del agente en la fecha t le permite determinar que el verdadero estado está en M , pero no le permite determinar cuál de los estados en M es el verdadero estado. Es decir, el agente realiza el mismo acto en la fecha t para cualquier estado de la naturaleza en M , aunque no conozca cuál de los estados de la naturaleza en M es el verdadero. Dado un conjunto de estados de la naturaleza, en una fecha determinada, si todo M en \mathcal{S}_t es un conjunto unitario se dice que *el agente tiene información completa* con respecto a los estados de la naturaleza, mientras que si $\mathcal{S}_t = \{\mathbf{S}\}$ se dice que *el agente no tiene información*.

iii. El i -ésimo consumidor está caracterizado por:

Una estructura de información $\mathcal{S}_i = (\mathcal{S}_{i1}, \mathcal{S}_{i2}, \dots, \mathcal{S}_{iT})$. Un conjunto de consumo X_i subconjunto de $\mathcal{A}(\mathcal{S}_i)$, que representa el conjunto de actos factibles para el i -ésimo consumidor. Se define un preorden completo sobre

2 Para los consumidores, las cantidades de bienes a consumir se representan mediante números positivos y las cantidades de las distintas clases de trabajo a ofrecer se representan mediante números negativos. Para los productores, los insumos se representarán mediante números negativos y los productos mediante números positivos.

X_i , denotado \preceq_i y se lee "a lo más tan bueno como"³. Dado un consumo x_i para cada consumidor, $x = \sum_i x_i$ se llama el consumo total; el conjunto $X = \sum_i X_i$ se llama el conjunto de consumo agregado. Dado un sistema de precios p y su riqueza ω_i , un número real, el i -ésimo consumidor elige su plan de consumo x_i en su conjunto de consumo X_i tal que $px_i \leq \omega_i$ y tal que x_i es un mayor elemento para \preceq_i , sobre el conjunto de planes de consumo que satisfacen la restricción de riqueza. Un plan de consumo elegido de esta forma se llama un consumo de equilibrio del i -ésimo consumidor relativo a p correspondiente a la estructura de información \mathcal{S}_i .

Una T -tupla $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iT})$ en $\mathcal{A}(\mathcal{S}_i)$, que representa los recursos del i -ésimo consumidor ($w_{it}(s)$ representa el vector de cantidades de mercancías disponibles al consumidor i en la fecha t si s es el verdadero estado de la naturaleza).

Un conjunto de números no negativos θ_{ij} que representa la participación del i -ésimo consumidor en los beneficios del j -ésimo productor tal que $\sum_i \theta_{ij} = 1$ para todo j .

iv. El j -ésimo productor está caracterizado por:

Una estructura de información $\mathcal{J}_j = (\mathcal{J}_{j1}, \mathcal{J}_{j2}, \dots, \mathcal{J}_{jT})$. Un conjunto de producción Y_j , subconjunto de $\mathcal{A}(\mathcal{J}_j)$, que representa el conjunto de actos factibles para el j -ésimo productor. El j -ésimo productor elige un vector, su plan de producción y_j en Y_j . Dada una producción y_j para cada productor, $y = \sum_j y_j$ se llama la producción total; el conjunto $Y = \sum_j Y_j$ se llama el conjunto de producción agregado. Dado un sistema de precios p y una producción y_j , el beneficio del j -ésimo productor se define py_j . El beneficio agregado se define como py . Dado un sistema de precios p el j -ésimo productor elige su producción en su conjunto de producción Y_j para maximizar su beneficio. El plan de producción elegido se llama la producción de equilibrio del j -ésimo productor relativo a p correspondiente a la estructura de información \mathcal{J}_j .

3 $x_1^1 \preceq x_1^2$ se define como $x_1^1 \preceq x_1^2$ y no $x_1^1 \succ x_1^2$ y se lee " x_1^2 es preferido a x_1^1 ".

Definición 3. Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} dos particiones de \mathbf{S} . Se dice que \mathcal{U} es tan fina (más particionada) como \mathcal{V} si para todo $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$ se satisface o $U \subseteq V$ o $U \cap V = \emptyset$.⁴

Sean $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_t)$ y $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}'_t)$. \mathbf{S} se dice tan fina como \mathcal{S}' si, para todo t , \mathcal{S}_t es una partición tan fina como \mathcal{S}'_t . Para cada consumidor i , \mathcal{S}_i^0 denote la estructura de información menos fina compatible con w_i .

Una estructura de información de la economía es una $(m + n)$ tupla $\mathcal{H} = ((\mathcal{S}_i, \mathcal{T}_j))$ de estructuras de información. \mathcal{H} se dice admisible si, para todo consumidor i , \mathcal{S}_i es tan fina como \mathcal{S}_i^0 . La estructura de información mínima admisible, \mathcal{H}^0 , está definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i &= \mathcal{S}_i^0 && \text{para todo } i = 1, \dots, m, \\ \mathcal{T}_{jt} &= \{\mathbf{R}^C\} \equiv \mathcal{T}_{jt}^0 && \text{para todo } j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

La estructura de información máxima, \mathcal{H}^1 , está caracterizada tomando \mathcal{S}_{it} y \mathcal{T}_{jt} como las particiones de información completa.

Para cualquier estructura de información admisible $\mathcal{H} = ((\mathcal{S}_i, \mathcal{T}_j))$ para la economía, se definen

$$\begin{aligned} X_i(\mathcal{H}) &= X_i^1 \cap \mathcal{A}(\mathcal{S}_i) \\ Y_j(\mathcal{H}) &= Y_j^1 \cap \mathcal{A}(\mathcal{T}_j) \end{aligned}$$

Una economía está generada por una estructura de información \mathcal{H} tomando $X_i(\mathcal{H})$ como el conjunto de consumo del i -ésimo consumidor, con recursos w_i , y con la restricción a $X_i(\mathcal{H})$ del preorden de preferencias original sobre X_i^1 ; y tomando $Y_j(\mathcal{H})$ como el conjunto de producción del j -ésimo productor.

4 Si un agente no olvida la información de una fecha a otra, entonces se podría representar la estructura de información \mathcal{S} en la cual cada partición \mathcal{S}_t fuera tan fina como la que le precede. Esto se llama *una estructura de información en expansión*.

Definición 4. Un acto $((x_i), (y_j))$ es *sostenible* si satisface: $x_i \in X_i$ para todo i , $y_j \in Y_j$ para todo j , $x - y = w$. Es decir, un acto $((x_i), (y_j))$ es sostenible si x_i es un consumo posible para cada consumidor, y_j es una producción posible para cada productor, y es un equilibrio de mercado.

Un acto x_i para el i -ésimo consumidor es sostenible si existe un acto sostenible cuya componente correspondiente a este consumidor es x_i . El conjunto de todos sus actos sostenibles es llamado su conjunto de consumo sostenible y se denota X_i^{\wedge} .

Definición 5. Sea D la intersección de todos los conos con vértice en cero que contienen todos los puntos de la forma $\sum_i (x_i - w_i)$ donde $x_i \succ_i X_i^{\wedge}$ para todo i .⁵

Definición 6. Una Economía de Propiedad Privada \mathcal{E} está definida por: una Economía $((X_i, \preceq_i), (Y_j), w)$ con una estructura de información $\mathcal{H} = ((\mathcal{S}_i), (\mathcal{T}_j))$; para cada i , una T -tupla $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iT})$ en $\mathcal{A}(\mathcal{S}_i)$ tal que $\sum_i w_i = w$; y para cada par (i, j) , un número real no-negativo θ_{ij} tal que $\sum_i \theta_{ij} = 1$ para todo j .

Definición 7. Un Equilibrio de la Economía de Propiedad Privada \mathcal{E} es una $(m + n + 1)$ -tupla $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ de puntos de R^l tal que:

- $\alpha)$ x_i^* es un mayor elemento de $\{x_i \in X_i / p^*x_i \leq p^*w_i + \sum_j \theta_{ij} p^*y_j^*\}$ para \preceq_i , para todo i ;
- $\beta)$ y_j^* maximiza el beneficio relativo a p^* sobre Y_j , para todo j ,
- $\gamma)$ $x^* - y^* = w$.
- $\delta)$ $p^* \neq 0$

El siguiente teorema garantiza bajo qué condiciones existe un Equilibrio para la Economía de Propiedad Privada con incertidumbre, dada una estructura de información para cada agente⁶.

5 Sea W un subconjunto de R^m y x un punto en W . W se dice un cono con vértice en x si contiene la semirecta x, z , para todo z en W , $z \neq x$.

6 Puede mostrarse también que existe un Equilibrio para cualquier estructura de información de la economía compatible con las dotaciones iniciales de los consumidores. Ver Radner [1968, pp. 41-42]

Teorema 1 (Teorema de Existencia del Equilibrio bajo Incertidumbre)

Un equilibrio existe si^{7,8}:

$$(a.1) \mathbf{AX} \cap (-\mathbf{AX}) = \{0\};$$

para todo i ,

(a.2) X_i es cerrado y convexo,

(b.1) para todo consumo x_i en X_i existe un consumo en X_i preferido a x_i ,

(b.2) para todo x_i' en X_i los conjuntos $\{x_i \in X_i / x_i \succeq_i x_i'\}$ y $\{x_i \in X_i / x_i \preceq_i x_i'\}$ son cerrados en X_i ,

(b.3) para todo x_i' en X_i , el conjunto $\{x_i \in X_i / x_i \succ_i x_i'\}$ es convexo;

(c.1) Y es cerrado y convexo y los interiores relativos de $(X - \{w\})$ y Y tienen una intersección no-vacía,

$$(c.2) (\mathbf{AY} - \text{Int}_C D) \cap [X_i - \{w_i\}] \neq \emptyset, \text{ donde } C \equiv \sum_i \mathcal{A}(\delta_i);$$

para todo j ,

$$(d.1) 0 \in Y_j;$$

$$(d.2) \mathbf{AX} \cap \mathbf{AY} = \{0\}.$$

Prueba. Ver Radner [1968].

A continuación se mostrará la relación que existe entre un Óptimo de Pareto correspondiente a una estructura de información dada de la economía y un Equilibrio relativo a un sistema de precios.

7 Sea W un subconjunto de \mathbb{R}^n . Para todo $k \geq 0$ sea $W_k = \{x \in W / |x| \geq k\}$ y sea $\Gamma(W_k)$ el menor cono cerrado con vértice en cero que contiene a W_k . El cono asintótico de W , denotado \mathbf{AW} , se define como la intersección de todos los $\Gamma(W_k)$, es decir, $\mathbf{AW} = \bigcap_k \geq 0 \Gamma(W_k)$.

8 El interior relativo de un conjunto W en \mathbb{R}^n es el interior de W relativo a la intersección de todas las variedades lineales que contienen a W . El interior de W relativo a un conjunto C se denotará $\text{Int}_C W$.

Definición 8. Un preorden \preceq es definido sobre el conjunto \mathbf{F} de estados sostenibles de una Economía por $((x_i), (y_j)) \preceq ((x_i'), (y_j'))$ si, para todo i , $x_i \preceq_i x_i'$. Un *Óptimo de Pareto* es un elemento maximal de \mathbf{F} para \preceq . Es decir, un estado $((x_i), (y_j))$ es Óptimo de Pareto si no existe otro estado sostenible $((x_i'), (y_j'))$ tal que para todo i , $x_i \preceq_i x_i'$ y para al menos un i , $x_i \prec_i x_i'$.

Un Óptimo de Pareto es un estado sostenible para el cual no existe un estado sostenible tal que todos los consumidores se encuentren por los menos en la misma situación, en términos de preferencia, y al menos alguno de ellos mejor.

Definición 9. Un estado $((x_i^*), (y_j^*))$ es un Equilibrio relativo al sistema de precios p en L si:

- $\alpha) x_i^*$ es un mayor elemento de $\{x_i \in X_i / px_i \leq px_i^*\}$ para \preceq_i , para todo i ,
- $\beta) y_j^*$ maximiza py_j sobre Y_j , para todo j ,
- $\gamma) x^* - y^* = w$.

Teorema 2 (Primer Teorema de la Economía del Bienestar)

Sea una economía tal que, para todo i ,

(a) X_i es convexo,

(b) si x_i^1 y x_i^2 son dos puntos de X_i , y si λ es un número real en $(0, 1)$, entonces $x_i^2 \succ_i x_i^1$ implica $[\lambda x_i^2 + (1 - \lambda) x_i^1] \succ_i x_i^1$.

Un equilibrio $((x_i^*), (y_j^*))$ relativo a un sistema de precios p , donde ningún x_i^* es un consumo de saciedad, es un Óptimo de Pareto.

Prueba. Ver Debreu [1959].

El primer teorema de la Economía del Bienestar muestra cuándo un *Equilibrio es un Óptimo de Pareto*. Las condiciones bajo las que se obtiene esta conclusión son bastante restrictivas: convexidad de los conjuntos de consumo

y de las preferencias e insaciabilidad local alrededor de los consumos de equilibrio, para todos los consumidores.

Teorema 3 (Segundo Teorema de la Economía del Bienestar)

Sea una economía tal que, para todo i ,

- (a) X_i es convexo,
- (b.1) para todo x_i' en X_i , los conjuntos $\{x_i \in X_i / x_i \succeq_i x_i'\}$ y $\{x_i \in X_i / x_i \preceq_i x_i'\}$ son cerrados en X_i ,
- (b.2) si x_i^1 y x_i^2 son dos puntos de X_i , y si λ es un número real en $(0, 1)$, entonces $x_i^2 \succ_i x_i^1$ implica $[\lambda x_i^2 + (1 - \lambda) x_i^1] \succ_i x_i^1$,
- (b.3) $w_i \neq \text{Min } pX_i$;
- (c) Y es convexo.

Dado un óptimo $((x_i^*), (y_j^*))$ donde algún x_i^* no es un consumo de saciedad, existe un sistema de precios diferente de 0 tal que $((x_i^*), (y_j^*))$ es un equilibrio relativo a p .

Prueba. Ver Debreu [1959].

El segundo teorema de la Economía del Bienestar afirma que dada una asignación Óptima de Pareto, ésta puede ser soportada por un vector de precios diferente de cero. Las hipótesis bajo las cuales se tiene este resultado son aún más restrictivas que las del primer teorema. Además de la convexidad de los conjuntos de consumo y de las preferencias para todos los consumidores, se requiere la continuidad de las preferencias, la exclusión del caso que la riqueza sea el mínimo del conjunto de consumo y la convexidad del conjunto de producción agregado.

Dos observaciones deben hacerse sobre los dos teoremas del Bienestar bajo incertidumbre: i) ambos teoremas se mantienen para una estructura de información dada (\mathcal{H}) para la economía. Se deben reinterpretar los conjuntos de consumo y producción en los dos teoremas del Bienestar como aquéllos que son compatibles con la estructura de información dada,

es decir, $X_i(\mathcal{H}) = X_i$ y $Y(\mathcal{H}) = Y$; y ii) la hipótesis de convexidad que se requiere en ambos teoremas del Bienestar es más restrictiva que la hipótesis de convexidad utilizada en el teorema de Existencia de un Equilibrio bajo Incertidumbre.

II. El Dinero en el Modelo Arrow-Debreu con Incertidumbre

Una pregunta que se plantea es si los axiomas sobre productores y consumidores en el modelo A-D con incertidumbre (en adelante notado A-D-R) son consistentes con la introducción de algún tipo de dinero. El modelo A-D-R en la formulación presentada en el capítulo anterior no presenta explícitamente una estructura monetaria. Sin embargo, se le puede explicitar una, adicionándole algunas hipótesis al modelo.

Es necesario precisar la noción de dinero que utilizaremos y para ello introducimos la siguiente definición.

Definición 10. Dinero A-D es una unidad de cuenta que cumple dos funciones adicionales en la Economía: reserva de valor y medio de intercambio.

El siguiente teorema muestra que, en equilibrio, existe por lo menos una mercancía cuyo precio es estrictamente positivo.

Teorema 4. Si $p^* = (p_k^*)$ es un vector de precios de equilibrio de la Economía \mathcal{E} , entonces existe k tal que $p_k^* > 0$.

Prueba. Bajo las hipótesis del teorema 1.1 existe, en equilibrio, dicha mercancía con precio positivo. (Ver Radner [1968]).

El siguiente teorema muestra que, en equilibrio, dado que los agentes son maximizadores de utilidad o beneficio, *cualquiera de las mercancías con precio positivo posee la propiedad de servir como unidad de cuenta*⁹.

9 Debe notarse que por fuera del Equilibrio todos los precios podrían ser nulos. Por tanto, no existiría una mercancía cuyo precio sirviera como numerario.

Teorema 5 (Teorema de No-Ilusión Monetaria). $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ es un Equilibrio de \mathcal{E} si y sólo si $((x_i^*), (y_j^*), \lambda p^*)$ es un Equilibrio de \mathcal{E} para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Prueba. Ver Debreu [1959].

Este teorema es una conclusión inmediata del hecho de que, bajo las hipótesis del modelo, las elecciones óptimas tanto de productores como consumidores, no se alteran ante una variación escalar del vector de precios. El teorema implica que, *en equilibrio*, puede tomarse un bien como *numeraire*; es decir, una mercancía cuyo precio sirve para expresar los precios de las demás. El precio de dicha mercancía elegida debe ser estrictamente positivo. Es natural entonces, seguir la idea de que cualquier mercancía con precio positivo pueda servir como unidad de cuenta de la Economía, *aun por fuera del equilibrio*.

Aunque, en equilibrio, cualquier mercancía con precio positivo podría servir como unidad de cuenta, esto no implica necesariamente que sirva como medio de intercambio. Algo que sirva como medio de intercambio debe ser aceptado por todos los agentes de la economía para llevar a cabo las transacciones. Una mercancía puede cumplir el papel de ser medio de intercambio *si y sólo si todos los agentes la aceptan*. Por lo tanto, es difícil elegir una mercancía específica como medio de intercambio. Una forma de sobrepasar esta dificultad es considerar la posible existencia de un *algo diferente* a las mercancías que sirve como medio de intercambio. El problema fundamental que surge es: ¿por qué los consumidores y productores aceptarían *ese algo*? Una posibilidad para que fuera aceptado como medio de intercambio es que brindara utilidad, es decir, que fuera valorado por los consumidores. Sin embargo, si brindara utilidad sería como cualquier otra mercancía y no surgiría, de forma natural, como un medio de intercambio¹⁰.

10 Aunque una mercancía brinde utilidad para algunos consumidores, no serviría como medio de intercambio si existen algunos que no la acepten. Incluir el medio de intercambio en la función de utilidad de los consumidores es problemático, porque sería confuso establecer cuáles son transacciones reales y cuáles nominales, y su papel tendría características *antagónicas* muy complicadas. Luego no podría establecerse una diferencia entre la demanda como medio de intercambio y la demanda como mercancía que brinda utilidad.

La otra posibilidad es que *ese algo* no brinde utilidad. Entonces, ¿qué induciría a los consumidores y productores a aceptarlo? Algo que no brinde utilidad a los consumidores difícilmente será aceptado en el intercambio, porque los consumidores no estarían dispuestos a entregar cierta cantidad de mercancías que le brindan utilidad por algo que no. Sólo sería aceptado si existe una confianza generalizada en él. Para soslayar este problema, supongamos que existiera una *Autoridad Monetaria llamada el Banco Central que impone un medio de intercambio* y que los agentes aceptan para realizar todas sus transacciones. Obsérvese que este medio de intercambio debe guardar valor entre una transacción y otra durante las fechas del período. Además, es natural que la unidad de lo que sirve como medio de intercambio sea a su vez el numerario. Se tendría entonces que el Banco Central respalda lo que hemos llamado *dinero A-D*.

Supondremos, que el Banco Central emite dinero *inside*, es decir, dinero creado por él cuando cambia bonos emitidos por los consumidores y productores.¹¹ El dinero emitido toma la forma de depósitos bancarios o efectivo: a los precios que prevalecen para el período, los consumidores valoran, en la misma unidad de cuenta de los precios, en cada estado de la naturaleza, sus dotaciones iniciales respectivas y sus participaciones en los beneficios de las empresas porque saben, para cada estado de la naturaleza, el valor de sus participaciones en los beneficios de las empresas, pues conocen la estructura productiva de las empresas de las que son accionistas¹². Para cada estado de la naturaleza, cada consumidor elabora un plan de emisión de bonos equivalente al valor de sus dotaciones iniciales más el valor de sus participaciones en los beneficios de las empresas. Cada productor, a los precios vigentes para el período, valora los costos de sus insumos para cada uno de los estados de la naturaleza y elabora un plan de emisión de bonos por este valor.

11 En contraste, dinero *outside* es dinero que no es pasivo para el Banco.

12 En la definición de Economía de Propiedad Privada, las participaciones de los consumidores en los beneficios de las empresas *están dadas*, de modo que no existe un mercado de acciones. (Debreu [1959]).

La emisión de bonos ocurre de la siguiente forma: para cada fecha del período, cada consumidor y productor emite bonos por el valor de las dotaciones iniciales más el valor de sus participaciones en los beneficios de las empresas y por el valor de los planes de producción, respectivamente.

Además, se supondrá explícitamente que se satisface la *Restricción de Clower*: “dinero A-D compra mercancías, mercancías compran dinero A-D, pero mercancías no compran mercancías”. Dicho de otra forma, para realizar cualquier transacción, los agentes necesitan dinero A-D y no tienen la posibilidad de realizar trueques¹³. Así, los agentes tienen un motivo para demandar dinero: el motivo transacción. La Restricción de Clower se supone para sobrepasar la dificultad que surge por la falta de información de cada agente sobre las decisiones de consumo y producción de los demás. Los agentes no conocen los excesos de demanda agregada y no saben si los precios dados al comienzo del período son o no de equilibrio. Por tanto, la falta de información impediría que una de las mercancías surgiera de forma natural como medio de intercambio: si los precios no son de equilibrio, los planes de oferta y demanda de los agentes no son compatibles. Así, si la Restricción de Clower es de *conocimiento común*¹⁴, los agentes tienen la información necesaria para aceptar el dinero como medio de intercambio, aun a precios de no-equilibrio.¹⁵

Por los Teoremas 4 y 5 existe, en equilibrio, una mercancía que sirve como numerario y si el Banco Central, *exógenamente*, fija el precio de la unidad monetaria en términos de él, todos los precios de la Economía podrían expresarse en unidades monetarias. Para cada una de las fechas del período, la Autoridad Monetaria cambia los bonos emitidos por los

13 La operación de cambio de bonos por dinero A-D realizada entre los agentes y el Banco no se considera una transacción, porque los bonos no son una mercancía A-D.

14 Conocimiento común significa que cada agente conoce que el único medio de intercambio es el dinero A-D, que cada agente conoce que los demás conocen la Restricción de Clower, que cada agente conoce que los demás agentes conocen que ellos conocen la Restricción de Clower y así ad infinitum.

15 La justificación tradicional de la Restricción de Clower, la información asimétrica, no se contempla en este modelo porque todos los agentes conocen perfectamente todas las mercancías de la economía.

consumidores y productores por dinero oficial¹⁶, y abre unas cuentas respectivas como contrapartida por el valor de los bonos expresados en unidades monetarias.

El Banco Central no es un agente extraño al modelo; es considerado como cualquier productor que produce un servicio, el de acreditar y debitar las cuentas de los agentes; es decir, realizar la contabilidad de todas las transacciones hechas por ellos. Estas transacciones pueden ser llevadas a cabo en cheques o en efectivo. Podría pensarse también, que no circula efectivo en esta Economía, sino que lo que circula son cheques, que los agentes consignan y cobran en el Banco Central. De esta forma, el dinero no sale de allí, sino que se traslada entre las cuentas de los agentes.

La Restricción de Clower y el Banco Central como productor y emisor garantizan la existencia de dinero A-D.

Definición 11. (Economía Monetaria) Una Economía Monetaria de Propiedad Privada \mathcal{M} consiste en

i. Dinero A-D en forma de depósitos bancarios y/o efectivo cuya unidad de cuenta es fijada exógenamente.

ii. Una economía con T fechas, C diferentes mercancías A-D en cada fecha y $|S|$ estados de la naturaleza y un sistema de precios p en L expresado en unidades monetarias.

iii. Un número entero positivo $(n-1)$ de productores. Cada productor está indizado por $j = 1, 2, \dots, n-1$. El j -ésimo productor tiene una estructura de información $\mathcal{J}_j = (\mathcal{J}_{j1}, \mathcal{J}_{j2}, \dots, \mathcal{J}_{jT})$ y un conjunto de producción Y_j subconjunto de $\mathcal{A}(\mathcal{J}_j)$. El j -ésimo productor demanda una cantidad de dinero m_{jt}^d equivalente al valor de sus insumos para cada fecha $t = 1, \dots, T$.

iv. El n -ésimo productor es el *Banco Central* que cumple doble papel en la Economía: productor de servicios y emisor del dinero A-D oficial. Se supone

16 Aunque cada consumidor conoce desde el comienzo del período sus ingresos salariales, su recepción se realiza durante el período. Los ingresos salariales no hacen parte del valor de las dotaciones iniciales. Desde esta perspectiva, los salarios no se pagan necesariamente al inicio del período.

explícitamente que el Banco Central posee *información completa* sobre los estados de la naturaleza y conoce las demandas y ofertas de todos los agentes a cada nivel de precios, las dotaciones iniciales y las participaciones en los beneficios de las empresas de cada consumidor. Para cada una de las fechas del período, una vez conocido el verdadero estado de la naturaleza, la Autoridad Monetaria cambia los bonos emitidos por los consumidores y productores por dinero A-D oficial.

v. Un número entero positivo m de consumidores. Cada consumidor está indizado por $i = 1, 2, \dots, m$. El i -ésimo consumidor tiene una estructura de información $\mathcal{S}_i = (\mathcal{S}_{i1}, \mathcal{S}_{i2}, \dots, \mathcal{S}_{iT})$; se supone que su conjunto de consumo X_i es un subconjunto de $\mathcal{A}(\mathcal{S}_i)$. El i -ésimo consumidor demanda una cantidad de dinero m_{it}^d equivalente al valor de sus dotaciones iniciales más el valor de sus participaciones en los beneficios de las empresas de las que es accionista para cada fecha $t = 1, \dots, T$.

Una T -tupla $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iT})$ en $\mathcal{A}(\mathcal{S}_i)$. El vector de dotaciones iniciales de la economía es $w = \sum_i w_i$.

Un conjunto de números reales no-negativos θ_{ij} tal que $\sum_i \theta_{ij} = 1$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

La diferencia entre la Economía \mathcal{E} y la Economía Monetaria π radica en i) la existencia de dinero A-D y ii) la existencia del Banco Central en su doble papel de agente productor de mercancías y agente emisor de dinero A-D.

Definición 12. Dada una cantidad de oferta de dinero A-D, m^s , emitida por el Banco Central, definimos un Equilibrio Monetario de π como una $(ml + nl + l + T)$ -tupla $((x_i^*), (y_j^*), p^*, m_t^*)$ de puntos de \mathbb{R} tal que:

- $\alpha)$ x_i^* es un mayor elemento de $\{x_i \in X_i / p^* x_i \leq p^* w_i + \sum_j \theta_{ij} p^* y_j^*\}$ para \leq , para todo i ;
- $\beta)$ y_j^* maximiza el beneficio relativo a p^* sobre Y_j , para todo j ,
- $\gamma)$ $\sum_i x_i^* - \sum_j y_j^* = \sum_i w_i$.

$\delta)$ $m_t^s = m_t^* = \sum_i m_{it}^d + \sum_j m_{jt}^d$, para todo $t = 1, 2, \dots, T$. (La cantidad de dinero A-D emitida por el Banco Central es igual a la cantidad demandada por los agentes para cada una de las fechas del período).

La condición $\delta)$ exige que la cantidad demandada de dinero A-D sea *exactamente igual a la cantidad ofrecida*; porque si fuera mayor, los agentes no podrían llevar a cabo sus planes de consumo y producción de equilibrio; y si fuera menor, los agentes tendrían saldos de dinero que les son inútiles dado que el dinero A-D no brinda utilidad.

Teorema 6 (Teorema de Existencia de un Equilibrio Monetario).

La Economía Monetaria de Propiedad Privada $\mathcal{M} = ((X_i, \preceq_i), (\mathcal{S}_i), (Y_j), (\mathcal{T}_j), (w_i), (\theta_{ij}))$ tiene un Equilibrio si:

- (a.1) $\mathbf{AX} \cap (-\mathbf{AX}) = \{0\}$;
para todo i ,
- (a.2) X_i es cerrado y convexo,
- (b.1) para todo consumo x_i en X_i^\wedge , existe un consumo en X_i preferido a x_i ,
- (b.2) para todo x_i' en X_i los conjuntos $\{x_i \in X_i / x_i \succeq_i x_i'\}$ y $\{x_i \in X_i / x_i \preceq_i x_i'\}$ son cerrados en X_i ,
- (b.3) para todo x_i' en X_i , el conjunto $\{x_i \in X_i / x_i \succ_i x_i'\}$ es convexo;
- (c.1) Y es cerrado y convexo y los interiores relativos de $(X - \{w\})$ y Y tienen una intersección no-vacía,
- (c.2) $(\mathbf{AY} - \text{Int}_C D) \cap [X_i - \{w_i\}] \neq \emptyset$, donde $C \equiv \sum_i \mathcal{A}(\mathcal{S}_i)$;
para todo j ,
- (d.1) $0 \in Y_j$;
- (d.2) $\mathbf{AX} \cap \mathbf{AY} = \{0\}$.
- (e) *La Restricción de Clower es de conocimiento común.*
- (f) *Aceptación del Banco Central como agente emisor de dinero A-D por parte de todos los agentes.*

Prueba. Las condiciones α , β y γ de la definición [12] de Equilibrio Monetario son idénticas a las de la definición de Equilibrio [7]. Luego estas condiciones se satisfacen por el Teorema de Existencia del Equilibrio sin dinero [Teorema 1]. En cada fecha, la cantidad de dinero A-D emitida por la Autoridad Monetaria está determinada por la cantidad de bonos que emiten los consumidores y productores, luego, se satisface la condición δ automáticamente.

La presencia del dinero sólo sirve para expresar los precios de las mercancías en términos monetarios. No existe un mercado de dinero y por lo tanto no hay un precio a determinar. El precio del dinero está dado exógenamente por el Banco Central. Esta es la razón por la cual las asignaciones reales no se ven afectadas por la presencia de dinero en la Economía: el dinero A-D es neutral.

A. La Optimalidad de Pareto y el Equilibrio Monetario

En el modelo A-D-R sin dinero existe una diferencia entre los planes de demanda y oferta que los consumidores y productores realizan al principio del período con los planes de demanda y oferta que efectivamente llevan a cabo. Aun a precios de equilibrio, pueden no llevarse a cabo los planes de los agentes si no existe una *doble coincidencia de deseos* entre todos los agentes. Suponer que existe esta doble coincidencia es una hipótesis muy restrictiva, por lo cual es necesaria la introducción de un medio de intercambio para que se lleven a cabo las transacciones. El dinero A-D *facilita* a los agentes realizar efectivamente sus planes de demanda y oferta, pero esto no significa que la presencia de dinero A-D en la Economía aumente el conjunto de asignaciones sostenibles de la Economía. Una asignación $((x_i), (y_j))$ es sostenible si x_i es un consumo posible para cada consumidor, y_j es una producción posible para cada productor, y es un equilibrio de mercado. Luego una asignación sostenible no es una asignación que sea factible, en el sentido que se pueda realizar efectivamente. De esta forma, el conjunto de estados sostenibles de las Economías con y sin dinero A-D-R son iguales.

Bajo consistencia temporal y memoria perfecta, los dos Teoremas de la Economía del Bienestar (Teoremas 2. y 3.) se seguirían manteniendo en esta

Economía A-D-R con dinero.¹⁷ Sin embargo, *la noción de equilibrio monetario es incompatible con una emisión de dinero temporalmente consistente por parte del Banco Central*, como se mostrará en el ejemplo 2.

B. El Modus Operandi de la Economía Monetaria π

Para entender cómo funciona el dinero en el modelo A-D-R, consideraremos primero una Economía Monetaria de Propiedad Privada π compuesta por dos consumidores, un productor, el Banco Central (como agente emisor), dos mercancías y un único estado de la naturaleza (ausencia de incertidumbre). Luego consideraremos una Economía Monetaria de Propiedad Privada π con incertidumbre caracterizada por dos consumidores, un productor, el Banco Central, dos mercancías y tres estados de la naturaleza.

Ejemplo 1. El objetivo de este primer ejemplo es mostrar que si los precios anunciados para el período no son de equilibrio, algunos consumidores mantendrían saldos positivos de dinero, *inútiles* al final del período, porque todas las transacciones han sido realizadas y no existe un segundo período que los incentive a ahorrar en dinero A-D.

Sea $\pi = ((X_i, U_i), Y, (w_i), (\theta_i), m)$, para $i = A, B$, donde las funciones de utilidad y las dotaciones de los consumidores son:

$$U^A(x^A, y^A) = x^A y^A \qquad w^A = (1, 2)$$

$$U^B(x^B, y^B) = (x^B)^2 y^B \qquad w^B = (2, 2)$$

El conjunto de producción es

$$Y = \{ (x, y) / x < 1, y \leq x / (x-1) \}$$

Las participaciones en los beneficios de los dos consumidores en esta empresa son: $\theta^A = 0.5, \theta^B = 0.5$.

¹⁷ Un agente tiene memoria perfecta si en cualquier fecha del período recuerda sus elecciones en cada una de las fechas precedentes.

Al resolver el problema de maximización del beneficio, se obtienen las siguientes funciones de oferta y/o demanda¹⁸:

$$x(p_x, p_y) = (p_y / p_x)^{1/2} + 1 \quad y(p_x, p_y) = (p_x / p_y)^{1/2} + 1$$

La función de beneficios es:

$$\pi(p_x, p_y) = p_x + p_y + 2(p_x p_y)^{1/2}$$

Supongamos que el Banco Central emite dinero *inside* por el valor de las dotaciones iniciales de cada consumidor más el valor de sus participaciones en la empresa y lo fija como numerario. Luego, la riqueza monetaria para cada consumidor está dada por:

$$\omega^A = p_x^m + 2p_y^m + [p_x^m + p_y^m + 2(p_x^m p_y^m)^{1/2}] / 2$$

$$\omega^B = 2p_x^m + 2p_y^m + [p_x^m + p_y^m + 2(p_x^m p_y^m)^{1/2}] / 2$$

donde p_x^m es el precio monetario del bien X, y p_y^m es el precio monetario del bien Y.

Las funciones de demanda individual son:

$$x^A(p_x^m, p_y^m) = \omega^A / 2p_x^m \quad y^A(p_x^m, p_y^m) = \omega^A / 2p_y^m$$

$$x^B(p_x^m, p_y^m) = 2\omega^B / 3p_x^m \quad y^B(p_x^m, p_y^m) = \omega^B / 3p_y^m$$

Las funciones de exceso de demanda son:

$$z_x(p_x^m, p_y^m) = [(3\omega^A + 4\omega^B - 18 p_x^m) / 6p_x^m] - [(p_y^m / p_x^m)^{1/2} + 1]$$

$$z_y(p_x^m, p_y^m) = [(3\omega^A + 2\omega^B - 24 p_y^m) / 6p_y^m] - [(p_x^m / p_y^m)^{1/2} + 1]$$

18 Un lector cuidadoso debe notar que para que se satisfaga la restricción del conjunto de producción, debe tomarse la parte negativa de la raíz cuadrada de la relación de precios.

Los precios monetarios de equilibrio para esta Economía son:

$$p_x^m = \$1, p_y^m = \$0.587$$

Supongamos que se anuncian estos precios para el período. Los consumidores A y B valoran sus dotaciones iniciales más sus participaciones en los beneficios de la empresa y emiten unos bonos por ese valor, que cambian en el Banco Central. La riqueza monetaria de cada consumidor es \$2.2 y \$3.2, respectivamente. A su vez, la empresa valora sus costos de producción en el período y emite unos bonos por \$0.176. El Banco Central abre tres cuentas, una para cada consumidor y una para la empresa por estos valores¹⁹.

Las demandas de los bienes X y Y para cada consumidor son:

$$\begin{aligned}x^A(\$1, \$0.587) &= 1.1 & y^A(\$1, \$0.587) &= 1.87 \\x^B(\$1, \$0.587) &= 2.13 & y^B(\$1, \$0.587) &= 1.83\end{aligned}$$

La oferta del bien X es:

$$x(\$1, \$0.587) = 0.23$$

La demanda del insumo Y es:

$$y(\$1, \$0.587) = -0.3$$

Dado que cada consumidor gasta todo su presupuesto monetario, al final del período sus tenencias de dinero son nulas, es decir, el Banco Central debita la cuenta del consumidor A por un valor de \$2.2 y la del consumidor B por un valor de \$3.2. El productor recibe ingresos por la venta del producto por valor de \$0.23. De estos ingresos, paga al Banco Central el valor de sus costos,

¹⁹ Debido a que el ejemplo intenta mostrar cómo funciona la Economía con dinero, se ha hecho abstracción de que el Banco sea un productor de la mercancía "servicios bancarios". Aunque se puede incluir el Banco como un productor de dicha mercancía, esto complicaría innecesariamente la exposición.

iguales a \$0.176 y obtiene unos beneficios de \$0.054, que distribuye entre ambos consumidores de acuerdo a sus participaciones dentro de la empresa.

Esta Economía Monetaria de Propiedad Privada funciona adecuadamente si los precios monetarios son los de equilibrio. Veamos qué sucede en esta Economía Monetaria si se anuncian unos precios monetarios que no son de equilibrio. Supongamos que los precios al inicio del período son: $p_x = \$1$ y $p_y = \$1$.

A estos precios la empresa no opera, es decir, demanda cero del insumo y ofrece cero del bien. De modo que los beneficios de la empresa son nulos. Por lo tanto el consumidor A tendría en el Banco Central una cuenta por valor de \$3 y el consumidor B tendría una por valor de \$4, equivalentes al valor de sus dotaciones iniciales respectivas.

Las demandas de cada consumidor a estos precios son:

$$x^A(\$1, \$1) = 3/2$$

$$y^A(\$1, \$1) = 3/2$$

$$x^B(\$1, \$1) = 4/3$$

$$y^B(\$1, \$1) = 8/3$$

Los excesos de demanda a estos nuevos precios son:

$$z_x(\$1, \$1) = -1/6$$

$$z_y(\$1, \$1) = 1/6$$

Se presenta un exceso de oferta del bien X y un exceso de demanda del bien Y. Podría ocurrir la siguiente situación: el consumidor B logra llevar a cabo su plan de demanda, gastando todo su presupuesto monetario. Por el contrario, el consumidor A, aunque satisface su demanda del bien X, no puede adquirir la cantidad deseada del bien Y: de 3/2 unidades de la mercancía Y que demanda sólo puede comprar 4/3 unidades. Así, el consumidor A tiene un saldo positivo en su cuenta bancaria equivalente a \$1/6, después de que el Banco Central ha debitado las cuentas bancarias.

El ejemplo ilustra que a precios que no son de Equilibrio, algún consumidor queda al final del período con un saldo positivo de dinero A-D.

La pregunta que surge es ¿qué hace el consumidor A con esta cantidad positiva de dinero? Ya que el dinero A-D no brinda utilidad, al final del período no existe motivo para mantener existencias de dinero, *pero esto no implica que los agentes no acepten dinero desde el comienzo del período*. Aunque éste no brinde utilidad, les es útil para realizar sus transacciones dada la Restricción de Clower. Los agentes no conocen desde el principio el resultado de la actividad económica a los precios anunciados, ya que la información de que disponen son los precios, las mercancías disponibles en la economía, sus dotaciones iniciales, y las funciones de beneficio de las empresas en que son accionistas. Los agentes *no conocen* las demandas u ofertas de los demás agentes y no pueden inferir las demandas u ofertas agregadas de las mercancías. *Aunque los agentes conocen los precios anunciados, ellos no saben si son de Equilibrio*. Por esta limitación en la información, los agentes tienen un motivo para aceptar una cantidad de dinero en contrapartida por el valor de sus dotaciones iniciales a los precios vigentes al comienzo del período: *la Restricción de Clower exige que las transacciones se lleven a cabo únicamente en dinero A-D*. Debe enfatizarse que, aun si los agentes conocen si los precios son o no de Equilibrio y conocen si son o no agentes con saldos de dinero al final del período, realizan transacciones para satisfacer las demandas de algunas mercancías: la ley de Walras implica que si en algún mercado existe un exceso de demanda debe existir algún mercado con exceso de oferta. Luego, para realizar estas transacciones, la Restricción de Clower los fuerza a aceptar dinero A-D.

Ejemplo 2(Radner 1968). El segundo ejemplo muestra la incompatibilidad que genera la incertidumbre entre la consistencia temporal del Banco Central y su papel de emisor de dinero A-D. Además muestra cómo las estructuras de información de los agentes, dada la incertidumbre sobre los estados de la naturaleza, condicionan las elecciones de los consumidores y productores restringiendo sus conjuntos de consumo y producción.

Considere una economía con dos consumidores A y B, un productor, el Banco Central como agente emisor, dos mercancías 1 y 2, y tres estados de la naturaleza I, II y III. Podría pensarse que el bien 1 es un insumo (trabajo) y el bien 2 es un producto (trigo). El período y el espacio están divididos en una fecha y en un lugar, respectivamente.

Los recursos de la economía consisten por completo del bien 1. Sin embargo existe incertidumbre acerca de las cantidades observables de estos recursos. La siguiente tabla resume los recursos del bien 1 en términos de los estados de la naturaleza:

<i>Estados de la Naturaleza</i>	<i>Recursos Iniciales</i>	
	Consumidor A	Consumidor B
I	1	1
II	1	2
III	2	2

La estructura de información de la economía es la siguiente:

i. Los dos consumidores, el productor y el Banco Central conocen la tabla anterior.

ii. Si el verdadero estado de la naturaleza es I o II, entonces el consumidor A sabe que tiene una unidad del bien 1, aunque no sabe en cuál estado de la naturaleza está, porque no conoce la dotación recibida por el consumidor B. Mientras que si el verdadero estado de la naturaleza es III, entonces él sabe que tiene dos unidades.

iii. Si el verdadero estado de la naturaleza es II o III, entonces el consumidor B sabe que tiene dos unidades del bien 1, aunque no sabe en cuál estado de la naturaleza está, porque no conoce la dotación recibida por el consumidor A. Mientras que si el verdadero estado de la naturaleza es I, entonces él sabe que tiene una unidad.

iv. El productor no tiene información adicional a la tabla para determinar cuál es el verdadero estado de la naturaleza.

v. Como el Banco Central tiene información completa sobre los estados de la naturaleza y conoce la tabla, entonces él puede determinar el verdadero estado de la naturaleza a partir de las dotaciones iniciales de A y B.

Ya que el consumo y la producción dependen de cuál es el verdadero estado de la naturaleza, distinguiremos seis mercancías, dos para cada estado. La mercancía 1 es el bien 1 en I, la mercancía 2 es el bien 2 en I, la mercancía 3 es el bien 1 en II, la mercancía 4 es el bien 2 en II, la mercancía 5 es el bien 1 en III y la mercancía 6 es el bien 2 en III.

Suponemos que las *preferencias* de los consumidores A y B se representan por la misma función de utilidad

$$U(x) = 3(x_2 + x_4 + x_6) + (x_1 + x_3 + x_5)$$

Los *recursos iniciales* de los consumidores A y B son

$$w^A = (1,0,1,0,2,0); w^B = (1,0,2,0,2,0)$$

Las *participaciones en los beneficios* de la empresa son $\theta^A = 0.5$ y $\theta^B = 0.5$.

Supongamos que el conjunto de actos factibles del consumidor A satisface las siguientes condiciones

$$x_2^A, x_4^A, x_6^A \geq 0.1$$

$$x_1^A, x_3^A, x_5^A \geq 0$$

$$x_1^A, x_3^A \leq 1; x_5^A \leq 2$$

La estructura de información caracterizada por i.-v. impone las siguientes restricciones sobre la elección del consumidor A

$$x_1^A = x_3^A; x_2^A = x_4^A$$

El conjunto de consumo del consumidor A, X^A , está determinado por el conjunto de restricciones anteriores.

Supongamos que el conjunto de actos factibles del consumidor B satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}x_2^B, x_4^B, x_6^B &\geq 0.1 \\x_1^B, x_3^B, x_5^B &\geq 0 \\x_1^B &\leq 1; \quad x_3^B, x_5^B \leq 2\end{aligned}$$

La estructura de información caracterizada por i.-v. impone las siguientes restricciones sobre la elección del consumidor B

$$x_3^B = x_5^B; \quad x_4^B = x_6^B$$

El conjunto de consumo del consumidor B, X^B , está determinado por el conjunto de restricciones anteriores.

Supongamos que las relaciones técnicas entre los insumos y los productos son:

$$y_1 = -y_2; \quad y_3 = -y_4; \quad y_5 = -y_6; \quad y_2, y_4, y_6 \geq 0$$

La estructura de la información para el productor restringe sus actos de la siguiente forma:

$$y_1 = y_3 = y_5; \quad y_2 = y_4 = y_6$$

De modo que el conjunto de producción Y se determina por estas dos restricciones.

Obsérvese cómo las estructuras de información de los agentes condicionan las elecciones de los consumidores y productores, restringiendo sus conjuntos de consumo y producción.

Denotaremos un *acto de consumo* para el consumidor A y para el consumidor B por

$$x^A = (x_1^A, \dots, x_6^A); \quad x^B = (x_1^B, \dots, x_6^B)$$

Denotaremos un *acto de producción* para el único productor por

$$y = (y_1, \dots, y_6)$$

Un *Equilibrio* para esta economía es

$$p^* = (7, 3, 1, 3, 1, 3); \quad x^{A^*} = (0, 1, 0, 1, 1, 1); \quad x^{B^*} = (0, 1, 1, 1, 1, 1); \quad y^* = (-2, 2, -2, 2, -2, 2)$$

Como la tecnología de la firma presenta rendimientos constantes a escala, los beneficios son nulos. Por tanto, las riquezas de los consumidores A y B valoradas a los precios de Equilibrio, antes de que cualquiera de los estados de la naturaleza ocurra, son $p^*w^A \equiv \omega^A = 10$ y $p^*w^B \equiv \omega^B = 11$.

Una vez conocido el verdadero estado de la naturaleza, el Banco Central emite *dinero A-D* inside a ambos consumidores por el valor correspondiente a su riqueza y lo fija como numerario. La siguiente tabla resume la *riqueza monetaria* para cada consumidor, para cada uno de los estados de la naturaleza

<i>Estados de la Naturaleza</i>	<i>Riqueza Monetaria</i>	
	ω_m^A	ω_m^B
I	\$3	\$3
II	\$3	\$4
III	\$4	\$4

Si la Autoridad Monetaria emite dinero al comienzo del período sin conocer cuál de los estados de la naturaleza es el verdadero, todos los consumidores tendrían saldos de dinero positivos al final del período, aun a los precios de Equilibrio. Como el dinero A-D no brinda utilidad, el modelo no explica lo que sucede con estos saldos de dinero A-D. *Esto muestra que la presencia de una Autoridad Monetaria que emite dinero que no brinda utilidad es incompatible con el supuesto de comportamiento de consistencia temporal de los agentes, en particular, con la consistencia temporal del Banco*

Central como agente emisor y productor de servicios bancarios²⁰. Es por ello que hemos supuesto que el Banco Central emite dinero A-D para cada fecha, una vez que ha conocido el verdadero estado de la naturaleza. Sin embargo, por un resultado de la Teoría de Juegos, la emisión de dinero A-D del Banco Central en cada una de la fechas, una vez conocido el verdadero estado de la naturaleza, no es Óptimo de Pareto: *para problemas de decisión extensiva (juegos extensivos con un sólo jugador) con memoria perfecta, una estrategia es Óptima sí y sólo si es consistente temporalmente.* (Ver Monsalve [1997]). De aquí se desprende que en esta economía monetaria no se satisface el Primer Teorema del Bienestar: un Equilibrio no es necesariamente un Óptimo de Pareto. Entonces, la emisión de dinero de equilibrio que realiza el Banco Central para cada una de las fechas, puede ser mejorada por alguna emisión diferente. Luego, *la simetría del modelo A-D-R se rompe con la introducción del dinero.*

III. Algunas Consideraciones del Modelo Arrow-Debreu-Radner con Dinero

A. Las Funciones del Dinero Arrow-Debreu

Generalmente, se han considerado tres funciones para el dinero: unidad de cuenta, medio de intercambio y reserva de valor. En la Economía A-D-R:

- i. El dinero A-D es *unidad de cuenta* porque el Banco Central impone un precio positivo para él y expresa los precios de todas las mercancías en unidades monetarias.
- ii. Los agentes demandan dinero para poder realizar sus planes de consumo y producción porque el dinero A-D es *el medio de intercambio* de la Economía debido a la Restricción de Clower. Esta demanda por dinero A-D

20 Obsérvese que es muy difícil separar las dos actividades que realiza el Banco Central: la emisión de dinero y la producción de servicios bancarios. Así, la inconsistencia temporal en la emisión de dinero se refleja también, en la inconsistencia temporal en la producción.

para transacciones no proviene de una conducta optimizadora por parte de los agentes, porque es tan sólo la cantidad de dinero requerida para llevar a cabo los planes de demanda y oferta. La Restricción de Clower es una hipótesis ad hoc que no proviene del comportamiento racional de los consumidores y productores.

Suponga que un sistema de precios se anuncia al principio del período y una mercancía se elige como numerario. El Banco Central fija el precio del dinero A-D en términos del numerario y expresa los demás precios en unidades monetarias. Cada productor elige su plan de producción a estos precios y determina la cantidad de dinero que requiere para llevarlo a cabo. Esta cantidad de dinero A-D no es óptima en el sentido de que provenga del comportamiento optimizador del productor, es sólo el requerimiento monetario para poder comprar los insumos especificados en el plan de producción elegido. Una vez que los productores han determinado su plan de producción, cada consumidor calcula su riqueza monetaria: la suma del valor de sus dotaciones iniciales y de sus participaciones en los beneficios de las empresas. Dada esta riqueza monetaria, que es sólo la expresión monetaria de su riqueza real, determina su plan de consumo óptimo.

iii. El dinero A-D guarda valor entre una transacción y otra, es decir, sirve como reserva de valor entre las fechas del período previamente establecido, pero no cumple con la función de ser reserva de valor al final del período. Como se mostró en la sección anterior, a precios de Equilibrio, ningún agente poseerá cantidades de dinero positivas al final del período, pero a precios que no son de Equilibrio, algunos agentes quedan con un saldo positivo de dinero A-D. Como el dinero A-D no hace parte de la función de utilidad de los consumidores y al final del período todas las transacciones factibles se han realizado, éste es inútil aun estando respaldado por el Banco Central. Así, el dinero pierde su función de ser reserva de valor y los agentes no tendrían ningún motivo para ahorrar dinero A-D, porque estamos considerando una Economía de un período y no se contempla, por ejemplo, la posibilidad de que ella se replique en el futuro. El modelo no da cuenta del uso que se daría a las existencias positivas de dinero A-D que pudieran tener los agentes al final del período. El dinero A-D como medio de intercambio debe cumplir con la condición de conservar valor entre las transacciones, pero esto no significa

que los agentes ahorren en dinero porque la economía sólo funciona dentro de un período. En este sentido el dinero no cumple con la función de ser reserva de valor. Los agentes quieren tener dinero A-D para realizar sus transacciones dada la Restricción de Clower, pero una vez que éstas se hayan llevado a cabo los agentes no desean tenerlo.

B. La Cantidad de Dinero y su Valor

La cantidad de dinero A-D depende de los planes de producción elegidos por cada productor y de los planes de consumo elegidos por cada consumidor. A cada sistema de precios le corresponde una cantidad de dinero equivalente al valor de los insumos, más el valor de las dotaciones iniciales, más el valor de las participaciones en los beneficios de las empresas. Esto no significa que se *determine* una cantidad de dinero óptima dentro del modelo; lo que se determina es el requerimiento de dinero A-D para llevar a cabo las decisiones de los agentes.

El valor de la unidad monetaria en términos de la mercancía k se define como $(1/p_k)$ unidades de mercancía k , donde p_k es el precio de la mercancía k en unidades monetarias. *El valor positivo del dinero no es un resultado endógeno del modelo. Es fijado exógena y arbitrariamente por la Autoridad Monetaria.* Por tanto, el dinero no puede ganar o perder valor con respecto a otros bienes.

La Restricción de Clower implica que la positividad del valor del dinero es una hipótesis y no una conclusión como debería serlo en todo buen modelo monetario. En el modelo A-D el dinero presenta un *valor positivo indeterminado* porque la Autoridad Monetaria fija arbitrariamente el precio de la mercancía k en unidades monetarias.

C. Conclusiones

La inclusión de dinero A-D en el modelo A-D-R riñe con la noción de equilibrio utilizada y con la hipótesis de consistencia temporal. La incertidumbre que los agentes tienen sobre el verdadero estado de la naturaleza implica que, dada la noción de equilibrio monetario, el Banco Central deba

emitir dinero fecha tras fecha. Dado un sistema de precios, si la emisión se realizara al comienzo del período antes de conocerse el verdadero estado de la naturaleza, la cantidad de dinero equivalente al valor de las dotaciones iniciales sería siempre mayor que la cantidad de dinero necesaria para realizar las transacciones una vez ocurrido alguno de los estados de la naturaleza. Obsérvese que esto ocurriría aun a precios de equilibrio; es decir, para cualquier sistema de precios, la cantidad emitida de dinero sería mayor que la cantidad requerida para llevar a cabo las transacciones. Luego, la noción de equilibrio monetario es incompatible con la hipótesis de consistencia temporal del Banco Central.

El modelo A-D supone a priori que el valor del dinero es positivo. La Restricción de Clower garantiza la positividad del valor del dinero porque los agentes se ven forzados a demandar dinero para realizar sus transacciones. Así, el dinero tiene valor aunque no brinde utilidad. Sin embargo, al final del período, cuando todas las transacciones posibles se han realizado y los agentes no consideran que la economía se repita en el futuro, el valor del dinero resulta ser necesariamente nulo. Así, aunque el dinero A-D sirve como reserva de valor entre las fechas del período, *la naturaleza estática* del modelo A-D impide que los agentes conserven dinero por algún motivo, al final del período. *Por ello, el modelo A-D es inadecuado para explicar por qué los agentes tienen un motivo para demandar dinero.* Es en este sentido en que no se sobrepasa la crítica de Hahn, quien enfatiza que *el valor positivo del dinero debe ser un resultado de la prueba de existencia y no un supuesto a priori.* Por tanto, se puede decir que el equilibrio monetario no es satisfactorio. Resulta necesario y natural pasar a una estructura dinámica. El escenario natural es el modelo de Generaciones Traslapadas de Samuelson [1958] porque permite modelar *economías competitivas en un marco verdaderamente dinámico.* Es por esto que se dice a veces que el modelo de Generaciones Traslapadas de Samuelson es el *modelo A-D dinámico* (Wallace [1980]).

Referencias

- Clower, Robert. (1967) *A Reconsideration of the Microeconomic Foundations of Monetary Theory*, Western Economic Journal, 6.
- Debreu, Gerard. (1959) *The Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Cowles Foundation, Yale University.
- Grandmont, Jean-Michel. (1983) *Money and Value : A Reconsideration of Classical and Neoclassical Monetary Theories*, Cambridge University Press.
- Hahn, Frank. (1965) "On Some Problems in Proving the Existence of Equilibrium in a Monetary Economy", *The Theory of Interest Rates*, F. Hahn and F. Brechling (eds), London Macmillan, New York: St. Martin's Press.
- _____. (1985) "Money and General Equilibrium", *Money, Growth and Stability*, Basil Blackwell, Oxford,.
- Monsalve, Sergio. (1997) *Una Aproximación a Problemas de Decisión con Memoria Imperfecta*. (No publicado).
- Patinkin, Don. (1956). *Money, Interest and Prices*, Evanston, Illinois, Row, Peterson.
- Radner, Roy. (1968). *Competitive Equilibrium under Uncertainty*, *Econometrica*.
- Samuelson, Paul A. (1980). *An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money*, *Journal of Political Economy*, 66. 1958