UNA DERIVADA EN GRUPOS METRIZABLES

HECTOR ANDRES GRANADA
Matemático.
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
hagranadad@yahoo.es

SIMEON CASANOVA TRUJILLO
Licenciado en Matemáticas y Física M.Sc. Matemáticas.
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
scasanovat@unal.edu.co
scasanov2003@yahoo.es

RESUMEN
Se construye una derivada para funciones $f:G\to H$, donde G es un grupo divisible metrizable cualquiera y H es un grupo abeliano metrizable con métrica de grupo. Se enuncian y demuestran alguna propiedades de esta derivada.

PALABRAS CLAVES: Grupo metrizable, grupo divisible, continuidad, homomorfismo de grupos.

ABSTRACT.
In this paper we construct a derivative for functions $f:G\to H$, where G is a metrizable divisible group and H is any abelian metrizable group with the group metric.

KEYWORDS: *Metrizable group, divisible group, continuity, homomorphism of groups.*

1. INTRODUCCIÓN

Los grupos metrizables surgen de la unión de la estructura algebraica de grupo y la topológica de métrica. Es decir, se tiene una operación de grupo en un conjunto y una forma de medir distancias entre dos elementos cualesquiera de dicho conjunto. Al tener una métrica en un grupo, podemos hablar de qué tan cerca están dos elementos de dicho grupo. Este conlleva de una manera natural a la definición de límite. Del cálculo elemental sabemos que el concepto de derivada está relacionado con el de límite en la forma que ya conocemos. Ahora, al tener una métrica en un grupo surge la pregunta de si es posible definir una derivada en grupos metrizables, la cual satisfaga las regls básicas del cálculo diferencial. Una definición de derivada en grupos topológicos apareció por primera vez en [1]. En este artículo usamos la definición dada en [1] y trabajamos con funciones $f:G\to H$ donde G y H son grupos metrizables y al espacio $\widetilde{Hom}(G,H)$ (homomorfismos continuos de G en H) lo dotamos de una métrica que lo hace a su vez un espacio métrico. Obtenemos así una derivada en grupos metrizables y mostraremos propiedades básicas como lo son la linealidad y que diferenciación implica continuidad, entre otras.

2. UNA DERIVADA EN GRUPOS METRIZABLES

En primer lugar recordemos lo que es un grupo metrizable. Un grupo metrizable es una dupla (G,d) donde G es un grupo y d es una métrica en G tal que las siguientes aplicaciones son continuas con la métrica d:

$$\begin{array}{ll} m:G\times G\to G & inv:G\to G \\ (a,b)\mapsto ab & a\mapsto a^{-1} \end{array}$$

Usando la definición de diferenciabilidad en grupos topológicos dada en [1], podemos llevarla a grupos metrizables dotando al espacio $\widetilde{Hom}(G,H)$ de una métrica adecuada. Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición 2.1. Sean G y H grupos metrizables. Una aplicación $f:G\to H$ es diferenciable en un punto $a\in G$ si existe una función $\phi_f:G\to\widetilde{Hom}(G,H)$ continua en a y tal que

$$f(x)f(a)^{-1}=\phi_f(x)[xa^{-1}]\quad \forall x\in G$$

Si esto sucede, la derivada de f en a es $\phi_f(a)$. En realidad la función ϕ_f depende tanto de f como de a, o sea que deberíamos escribir $\phi_{f,a}$ a cambio de ϕ_f, pero no lo haremos para no recargar la notación.

El espacio $\widetilde{Hom}(G,H)$ lo dotaremos de la métrica

$$\tilde{d}(\varphi,\psi)=\sup_{\substack{t\in G\\ t\neq e}}\left\{\frac{d_H(\varphi[t],\psi[t])}{d_G(t,e)+d_H(\varphi[t],\psi[t])}\right\}$$

Para demostrar algunas propiedades de esta derivada haremos uso de la siguiente definición

Definición 2.2. Sea (H,d) un grupo metrizable, $*$ la operación del grupo H y e el elemento identidad de H. d es *métrica de grupo* si para todo $x,y,z,w\in H$ se tiene:

$$d(x*y,z*w)\le d(x,z)+d(y,w)$$

Fecha de Recepción: 31 Enero de 2006
Fecha de Aceptación: 12 Abril de 2006

Como ejemplos de métrica de grupo tenemos la métrica inducida por las normas usuales en (○,+), (⊂,+), (∐[0,1],+) y (S^1, .).

En lo que sigue H será un grupo abeliano metrizable con métrica de grupo y G cualquier grupo metrizable.

A continuación dotaremos a $\widetilde{Hom}(G,H)$ de una operación binaria y posteriormente demostraremos que este espacio con esta operación binaria es un grupo abeliano.

Definición 2.3. En el espacio $\widetilde{Hom}(G,H)$ definimos la siguiente operación binaria:
$\oplus(\varphi,\psi)=\varphi\oplus\psi$ donde $(\varphi\oplus\psi)[x]=\varphi[x]\psi[x]$

Se demuestra fácilmente que $\varphi\oplus\psi$ está bien definida, y que es un homomorfismo continuo de G en H, es decir, $\varphi\oplus\psi\in\widetilde{Hom}(G,H)$.

La siguiente proposición será de utilidad para mostrar que la dupla $(\widetilde{Hom}(G,H),\oplus)$ es un grupo. Su demostración es inmediata y la omitimos.

Proposición 2.1. Sea $\varphi\in\widetilde{Hom}(G,H)$ y $h:G\to G$ continua en a. Entonces $\lim\limits_{x\to a}\varphi(h(x))=\varphi(h(a))$

Proposición 2.2. $(\widetilde{Hom}(G,H),\oplus)$ es un grupo abeliano.

Demostración: Sean $\varphi,\psi,\lambda\in\widetilde{Hom}(G,H)$. Entonces
$i)$ La asociatividad de $\oplus$ se sigue de la asociatividad de la operación binaria en H.
$ii)$ La aplicación constante $\sigma:G\to H$ definida como $\sigma(x)=e_H$ es el módulo de $(\widetilde{Hom}(G,H),\oplus)$.
$iii)$ La aplicación $\varphi^{-1}:G\to H$ definida como $\varphi^{-1}(x)=\varphi(x^{-1})$ es la inversa de φ. Veamos que φ^{-1} es continua: como la aplicación inv es continua tenemos que
$\lim\limits_{x\to e}\varphi^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to e}\varphi(x^{-1})=\lim\limits_{x\to e}\varphi(inv(x))$
$=\varphi(inv(e))=\varphi(e^{-1})=\varphi^{-1}(e)$.
Hemos demostrado que el homomorfismo φ^{-1} es continuo en e y por lo tanto φ^{-1} es continuo en G.
$iv)$ La conmutatividad de $\oplus$ se sigue de la conmutatividad de la operación binaria en H.

En la siguiente proposición demostramos que la métrica de grupo en H hace que la métrica que definimos en el espacio $\widetilde{Hom}(G,H)$ sea también una métrica de grupo. Este resultado lo usaremos para demostrar la aditividad de la derivada.

Proposición 2.3. La métrica $\widetilde{d}$ definida en el espacio $\widetilde{Hom}(G,H)$ es métrica de grupo.

Demostración: Sean $\varphi,\psi,\xi,\lambda\in\widetilde{Hom}(G,H)$, $t\in G,\ t\neq e_G$. Dado que H tiene métrica de grupo entonces $d_G(t,e)+d_H(\varphi[t]\psi[t],\xi[t]\lambda[t])\leq d_G(t,e)+d_H(\varphi[t],\xi[t])+d_H(\psi[t],\lambda[t])$ de donde

$$\frac{d_H((\varphi\oplus\psi)[t],(\xi\oplus\lambda)[t])}{d_G(t,e)+d_H((\varphi\oplus\psi)[t],(\xi\oplus\lambda)[t])}$$
$$=\frac{d_H(\varphi[t]\psi[t],\xi[t]\lambda[t])}{d_G(t,e)+d_H(\varphi[t]\psi[t],\xi[t]\lambda[t])}$$
$$=1-\frac{d_G(t,e)}{d_G(t,e)+d_H(\varphi[t]\psi[t],\xi[t]\lambda[t])}$$
$$\leq 1-\frac{d_G(t,e)}{d_G(t,e)+d_H(\varphi[t],\xi[t])+d_H(\psi[t],\lambda[t])}$$
$$=\frac{d_H(\varphi[t],\xi[t])+d_H(\psi[t],\lambda[t])}{d_G(t,e)+d_H(\varphi[t],\xi[t])+d_H(\psi[t],\lambda[t])}$$
$$\leq\frac{d_H(\varphi[t],\xi[t])}{d_G(t,e)+d_H(\varphi[t],\xi[t])}+\frac{d_H(\psi[t],\lambda[t])}{d_G(t,e)+d_H(\psi[t],\lambda[t])}$$

Ahora bien, al variar t en G con $t\neq e_G$ y tomando el supremo obtenemos lo siguiente:

$$\widetilde{d}(\varphi\oplus\psi,\xi\oplus\lambda)=$$
$$\sup_{\substack{t\in G\\ t\neq e}}\left\{\frac{d_H((\varphi\oplus\psi)[t],(\xi\oplus\lambda)[t])}{d_G(t,e)+d_H((\varphi\oplus\psi)[t],(\xi\oplus\lambda)[t])}\right\}$$
$$\leq\sup_{\substack{t\in G\\ t\neq e}}\left\{\frac{d_H(\varphi[t],\xi[t])}{d_G(t,e)+d_H(\varphi[t],\xi[t])}\right\}$$
$$+\sup_{\substack{t\in G\\ t\neq e}}\left\{\frac{d_H(\psi[t],\lambda[t])}{d_G(t,e)+d_H(\psi[t],\lambda[t])}\right\}$$
$$=\widetilde{d}(\varphi,\xi)+\widetilde{d}(\psi,\lambda)$$

La siguiente definición la usaremos para demostrar la unicidad de la derivada.

Definición 2.4. Un grupo G es *divisible*, si para todo elemento $g \in G$ y todo $n \in$ existe un elemento $x \in G$ tal que la ecuación $g = x^n$ tiene única solución.

Exigiremos además que en el grupo G se cumpla que $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = e$ para todo $x \in G$. Si la operación del grupo G se da en forma aditiva, entonces la ecuación anterior se escribe como $g = nx$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = e$.

Como ejemplos de grupos divisibles con las anteriores condiciones tenemos (○,+), (S^1, .), ($M_{2\times 2}$(○),+) .

La siguiente proposición la usamos para demostrar la unicidad de la derivada.

Proposición 2.4. Sean $\varphi : G \to H$ continua en a y $k \in H$. Entonces $\lim_{x\to a} \varphi(x)k = \varphi(a)k$

Demostración: Dado que H tiene métrica de grupo entonces para todo $z, w \in H$ tenemos que

$d_H(zk, wk) \le d_H(z, w) + d_H(k, k) = d_H(z, w)$

Como φ es continua en a, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_G(x, a) < \delta$ implica $d_H(\varphi(x), \varphi(a)) < \varepsilon$.

Luego, $d_G(x, a) < \delta$ implica $d_H(\varphi(x)k, \varphi(a)k) < \varepsilon$, lo cual nos demuestra la proposición.

Corolario 2.1. Sea G un grupo metrizable y divisible y $\varphi : G \to \widetilde{Hom}(G, H)$ continua en a. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(z^{1/n}a\right) = \varphi(a)$$

Demostración:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(z^{1/n}a\right) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty}\left(z^{1/n}a\right)\right) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} z^{1/n}a\right)$$
$$= \varphi(a)$$

Teorema 2.1. (unicidad de la derivada). Sean G grupo metrizable y divisible, H grupo abeliano metrizable con métrica de grupo. Si $f : G \to H$ es diferenciable en a, entonces $f'(a) = \phi_f(a)$ es única.

Demostración: Supongamos que existen dos funciones $\phi_f, \psi_f : G \to \widetilde{Hom}(G, H)$ continuas en a y tales que

$f(x) f(a)^{-1} = \phi_f(x)[xa^{-1}] = \psi_f(x)[xa^{-1}]$

para todo $x \in G$. Sea $y = xa^{-1}$. Entonces $\phi_f(ya)[y] = \psi_f(ya)[y]$ para todo $y \in G$. Sea $n \in$ y $z \in G$ tal que $z = y^n$, o bien, $y = z^{1/n}$. Así $\phi_f(z^{1/n}a)[z^{1/n}] = \psi_f(z^{1/n}a)[z^{1/n}]$ para todo $z \in G$, de donde $\left(\phi_f(z^{1/n}a)[z^{1/n}]\right)^n = \left(\psi_f(z^{1/n}a)[z^{1/n}]\right)^n$

Teniendo en cuenta que tanto $\phi_f\left(z^{1/n}a\right)$ como $\phi_f\left(z^{1/n}a\right)$ pertenecen a $\widetilde{Hom}(G, H)$, entonces de la anterior igualdad se sigue que $\phi_f(z^{1/n}a)[z] = \psi_f(z^{1/n}a)[z]$ para todo $z \in G$ y de ahí que $\phi_f(z^{1/n}a) = \psi_f(z^{1/n}a)$. Tomando en ambos lados de esta igualdad el límite cuando $n \to \infty$ y usando el corolario 2.1 y la unicidad del límite se tiene que $\phi_f(a) = \psi_f(a)$.

El siguiente teorema lo usaremos para demostrar que diferenciabilidad implica continuidad.

Teorema 2.2. Sean $\varphi : G \to \widetilde{Hom}(G, H)$ y $h : G \to G$ continuas en a. Entonces $\lim_{x\to a} \varphi(x)[h(x)] = \varphi(a)[h(a)]$

Demostración: Para $x \in G$ tenemos que $\varphi(x) \in \widetilde{Hom}(G, H)$. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $d_G(h(x), h(a)) < \delta_1$ implica

$d_H(\varphi(x)[h(x)], \varphi(x)[h(a)]) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como h es continua en a para δ_1 existe $\delta_2 > 0$ tal que $d_G(x, a) < \delta_2$ implica $d_G(h(x), h(a)) < \delta_1$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $d_G(x, a) < \delta_2$ implica

$d_H(\varphi(x)[h(x)], \varphi(x)[h(a)]) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $h(a) = e$ entonces para todo $x \in G$ tenemos que $\varphi(x)[h(a)] = e_H$ y en consecuencia $d_G(x, a) < \delta_2$ implica:

$$d_H(\varphi(x)[h(x)], \varphi(a)[h(a)]) = d_H(\varphi(x)[h(x)], e_H)$$
$$= d_H(\varphi(x)[h(x)]e_H, \varphi(x)[h(a)]e_H)$$
$$\le d_H(\varphi(x)[h(x)], \varphi(x)[h(a)]) < \varepsilon$$

Si $h(a) \neq e$, como φ es continua en a entonces para $\dfrac{\varepsilon}{2d_G(h(a),e)+\varepsilon}$ existe $\delta_3 > 0$ tal que $d_G(x,a) < \delta_3$ implica $\tilde{d}(\varphi(x),\varphi(a)) <$ $\dfrac{\varepsilon}{2d_G(h(a),e)+\varepsilon}$ de donde

$$\frac{d_H(\varphi(x)[h(a)],\varphi(a)[h(a)])}{d_G(h(a),e)+d_H(\varphi(x)[h(a)],\varphi(a)[h(a)])} \leq$$

$$\sup_{\substack{t\in G\\ t\neq e}}\left\{\frac{d_H(\varphi(x)[t],\varphi(a)[t])}{d_G(t,e)+d_H(\varphi(x)[t],\varphi(a)[t])}\right\} <$$

$\dfrac{\varepsilon}{2d_G(h(a),e)+\varepsilon}$ y consecuencia $d_G(x,a) < \delta_3$ implica $d_H(\varphi(x)[h(a)],\varphi(a)[h(a)]) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta = mín\{\delta_1,\delta_2\}$. Entonces, $d_G(x,a) < \delta$ implica

$$d_H(\varphi(x)[h(x)],\varphi(a)[h(a)]) \leq$$
$$d_H(\varphi(x)[h(x)],\varphi(x)[h(a)]) +$$
$$d_H(\varphi(x)[h(a)],\varphi(a)[h(a)]) < \varepsilon$$

Es decir, $\lim_{x\to a}\varphi(x)[h(x)] = \varphi(a)[h(a)]$.

La siguiente proposición será usada para demostrar la linealidad de la derivada. Su demostración es sencilla y la omitimos.

Proposición 2.5. Sean $\varphi,\psi : G \to \tilde{H}om(G,H)$ continuas en a. Entonces la función $\omega : G \to \tilde{H}om(G,H)$ definida como

$$\omega(x) = \varphi(x) \oplus \psi(x)$$

es continua en a.

3. TEOREMAS BASICOS DE DIFERENCIACIÓN.

En esta sección mostraremos las propiedades de la derivada que hemos definido. La suma de dos funciones $f,g : G \to H$ la definimos como

$$(f+g)(x) = f(x)g(x)$$

Está claro que la operación de la derecha es la del grupo H.

A partir de la anterior definición y de la composición de funciones daremos tres teoremas básicos de la diferenciación en grupos metrizables.

Teorema 3.1. (Diferenciabilidad implica continuidad)
Sea $f : G \to H$ diferenciable en a. Entonces f es continua en a.

Demostración: Dado que f es diferenciable en a existe $\phi_f : G \to \tilde{H}om(G,H)$ continua en a y tal que

$$f(x)f(a)^{-1} = \phi_f(x)[xa^{-1}] \quad \forall x \in G$$

Luego,

$$f(x) = \phi_f(x)[xa^{-1}]f(a) = \phi_f(x)[\lambda_{a^{-1}}(x)]f(a)$$

donde $\lambda_{a^{-1}} : G \to G$ definida como $\lambda_{a^{-1}}(x) = xa^{-1}$

Es una traslación a derecha, la cual sabemos que es un homeomorfismo (y por lo tanto continua). Tomando elo límite cuando $x \to a$ y usando la proposición 2.4 y el Teorema 2.2 tenemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \phi_f(a)[\lambda_{a^{-1}}(a)]f(a) = \phi_f(a)[aa^{-1}]f(a)$$
$$\phi_f(a)[e]f(a) = e_H f(a) = f(a)$$

Teorema 3.2. (Linealidad de la derivada)
Si $f,g : G \to H$ son diferenciables en a, entonces $f+g$ es diferenciable en a y

$$(f+g)'(a) = f'(a) \oplus g'(a)$$

Demostración: Dado que f,g son diferenciables en a, existen $\phi_f,\phi_g : G \to \tilde{H}om(G,H)$ continuas en a tales que

$$f(x)f(a)^{-1} = \phi_f(x)[xa^{-1}]$$
$$g(x)g(a)^{-1} = \phi_g(x)[xa^{-1}]$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}(f+g)(x)((f+g)(a))^{-1} &= (f(x)g(x))(f(a)g(a))^{-1}\\ &= (f(x)f(a)^{-1})(g(x)g(a)^{-1})\\ &= \phi_f(x)[xa^{-1}]\phi_g(x)[xa^{-1}]\\ &= (\phi_f(x)\oplus\phi_g(x))[xa^{-1}]\end{aligned}$$

Por la proposición 2.5, la aplicación $\phi_{(f+g)}$ de G en $\tilde{H}om(G,H)$ definida como $\phi_{(f+g)} = \phi_f(x) \oplus \phi_g(x)$ es continua en a. Por lo tanto, $f+g$ es diferenciable en a y

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \phi_{(f+g)}(a)\\ &= \phi_f(a) \oplus \phi_g(a)\\ &= f'(a) \oplus g'(a)\end{aligned}$$

La propiedad anterior en realidad debería llamarse aditividad de la derivada, ya que la propiedad $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$ no se tiene. A cambio de esta propiedad tenemos la siguiente:

Proposición 3.1. (Propiedad de absorción). Sea α constante en H. Si $f : G \to H$ es diferenciable en a, entonces $\alpha f : G \to H$ definida como $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ es diferenciable en a y $(\alpha f)'(a) = f'(a)$

Demostración: Como f es diferenciable en a, existe $\phi_f : G \to \widetilde{Hom}(G,H)$ continua en a y tal que

$$f(x) f(a)^{-1} = \phi_f(x)[xa^{-1}] \quad \forall x \in G.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(\alpha f)(x)(\alpha f(a))^{-1} &= (\alpha\alpha^{-1})(f(x)f(a)^{-1}) \\ &= f(x)f(a)^{-1} \\ &= \phi_f(x)[xa^{-1}]\end{aligned}$$

Como ϕ_f es continua en a se sigue que αf es diferenciable en a y $(\alpha f)'(a) = \phi_f(a) = f'(a)$.

Actualmente estamos buscando más propiedades de la derivada que hemos definido, entre otras la regla de la cadena.

Con relación a la regla de la cadena tenemos una conjetura, la cual, de ser cierta, nos permite demostrar con mucha facilidad dicha regla.

La conjetura es la siguiente:

Conjetura: Sean ϕ, φ, ξ y η aplicaciones entre espacios métricos tales que se puede realizar las composiciones $\phi \circ \varphi$ y $\xi \circ \eta$. Entonces

$$\tilde{d}(\phi \circ \varphi, \xi \circ \eta) \le \tilde{d}(\phi, \xi) + \tilde{d}(\varphi, \eta)$$

Supongamos que es cierta dicha conjetura y veamos que se obtiene la regla de la cadena:

Sean $f : G \to H$ diferenciable en a y $g : H \to M$ diferenciable en $f(a)$. Entonces $g \circ f : G \to M$ es diferenciable en a y $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$

En efecto, como f es diferenciable en a existe $\phi_f : G \to \widetilde{Hom}(G,H)$ continua en a y tal que

$$f(x) f(a)^{-1} = \phi_f(x)[xa^{-1}]$$

y como g es diferenciable en $f(a)$ existe $\phi_g : H \to \widetilde{Hom}(H,M)$ continua en $f(a)$ y tal que

$$g(f(x))g(f(a))^{-1} = \phi_g(f(x))[f(x)f(a)^{-1}]$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x)(g \circ f)(a)^{-1} &= \phi_g(f(x))[\phi_f(x)[xa^{-1}]] \\ &= (\phi_g(f(x)) \circ \phi_f(x))[xa^{-1}]\end{aligned}$$

Sea $\phi_{g\circ f} : G \to \widetilde{Hom}(G,M)$ definida como $\phi_{g\circ f}(x) = \phi_g(f(x)) \circ \phi_f(x)$. Como $\phi_f(x)$ es continua en G y $\phi_g(f(x))$ es continua en $f(G)$ se sigue que $\phi_{g\circ f}(x) \in \widetilde{Hom}(G,M)$. Veamos ahora la continuidad en a de la aplicación $\phi_{g\circ f}$. Dado que ϕ_f y ϕ_g son continuas en a y $f(a)$, respectivamente, para $\frac{\varepsilon}{2}$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_3 > 0$ tales que

$$d_G(x,a) < \delta_1 \Rightarrow \tilde{d}(\phi_f(x), \phi_f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y}$$

$$d_H(f(x), f(a)) < \delta_3 \Rightarrow \tilde{d}(\phi_g(f(x)), \phi_g(f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como f es diferenciable en a entonces f es continua en a. Así, para δ_3 existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$d_G(x,a) < \delta_2 \Rightarrow d_H(f(x), f(a)) < \delta_3$$

Sea $\delta = mín\{\delta_1, \delta_2\}$. Luego, si es cierta la conjetura tenemos que $d_G(x,a) < \delta$ implica

$$\tilde{d}(\phi_{g\circ f}(x), \phi_{g\circ f}(a)) \le \tilde{d}(\phi_g(f(x)), \phi_g(f(a)) +$$

$$\tilde{d}(\phi_f(x), \phi_f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir, $\phi_{g\circ f}$ es continua en a y por lo tanto $g \circ f : G \to M$ es diferenciable en a y

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \phi_{g\circ f}(a) \\ &= \phi_g(f(a)) \circ \phi_f(a) \\ &= g'(f(a)) \circ f'(a)\end{aligned}$$

4. CONCLUSIONES

Se ha dado una definición de diferenciabilidad en Grupos metrizables la cual satisface reglas básicas de diferenciación. Esto abre una línea de investigación sobre diferenciación en grupos metrizables. Como futuros trabajos de investigación tenemos el de establecer y demostrar un Teorema de Rolle y del Valor Medio en estos grupos.

Queda abierta la demostración de la veracidad o no de la conjetura que hemos establecido. Tenemos indicios de que es verdadera, pero hasta el momento no la hemos podido demostrar. De todas formas, si llegase a suceder que es falsa, esto no implica que no se tenga la regla de la cadena.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] ACOSTA G. Ernesto. Differentiability in Topological Groups. Soochow Journal of Mathematics, Volume 22, No.1, pp39-48. January 1996.

[2] CASANOVA T. Simeón. Teorema del Valor Medio en Grupos Topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. U.Nal. de Colombia, 1997.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales y a la DIMA por su apoyo dentro del programa *semilleros de investigación.*