

# Estimación de los parámetros de un modelo de pronóstico con componente cíclico con programación lineal

César Amílcar López Bello<sup>1</sup>

Leonardo José González Rodríguez<sup>2</sup>

## RESUMEN

Los modelos de pronóstico con componente cíclico son poco estudiados, y la estimación de los parámetros de esta clase de modelos usualmente se realiza con el método de los mínimos cuadrados. Se propone en este artículo el uso de la programación lineal para la estimación de parámetros en un modelo de pronóstico con componente cíclico basado en series de Fourier, usando como criterio la minimización de la suma absoluta del error, posteriormente se realiza un análisis comparativo de esta técnica y la de mínimos cuadrados usando simulación.

**Palabras clave:** Técnicas de pronóstico, Ciclicidad, Series de Fourier, Regresión lineal, Estimación de parámetros, Error absoluto, Programación lineal.

## ABSTRACT

The forecasting models with cyclic component are few treated, and the parameters estimations of those kind of models usually can be made with minimis squares method. In this article is proposed the use of linear programming for made parameter estimation, in a forecasting model with cyclic component based in Fourier series, using as criteria the minimization of sum of absolute error. Finally, is make a comparative analysis of this technique, with, the minimis squares method using simulating.

**Key words:** Forecasting technique, Cycling , Fourier series, Linear regression, Parameter estimation, Absolute error, Linear programming.

se pueden mencionar los estudios de mercado, el método Delfi, el análisis de ciclo de vida del producto y el juicio de expertos entre otros; por otra parte las técnicas de carácter cuantitativo se agrupan en dos grandes clases, los modelos del orden causa efecto (como modelos de regresión, modelos econométricos, etc.) y las técnicas de pronóstico de serie de tiempos, de las que trata el presente artículo. Estas herramientas y su aplicación individual y combinada constituyen el marco de referencia de la ciencia de la predicción.

El tratamiento de la predicción de eventos con modelos de series de tiempo requiere de la identificación y el análisis de componentes tales como: la tendencia, la estacionalidad y la ciclicidad [1],[2], para lo cual existen diferentes metodologías, siendo una, la formulación de modelos de regresión con estructuras semejantes a las series de Fourier [3], para lo cual es necesario la estimación de los parámetros del modelo representativo del fenómeno presente en el sistema real.

La estimación de los parámetros de una función de predicción se realiza normalmente con el método de los mínimos cuadrados, cuyo propósito es minimizar la suma de los errores cuadráticos, es decir la suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor estimado por la función de regresión y el valor observado en el sistema real [4]. Es así como este artículo presenta otra metodología de regresión fundamentada en el criterio de minimización de la suma de los valores absolutos de las desviaciones, lo cual se logra utilizando un modelo de programación lineal.

La novedad radica en la posibilidad de construir modelos con características cíclicas de una manera rápida y con un nivel de representabilidad alto, para ilustrar el proceso de construcción del modelo se efectúa una simulación y se compara la estimación por el método de optimización lineal y la obtenida utilizando el método de los mínimos cuadrados.

## II. MODELO DE PRONÓSTICO

El pronóstico es una verdadera herramienta de "sistemas". Los conceptos subyacentes del análisis de series de tiempo provienen de la teoría del control automático y del análisis estadístico[5]. Ciertas técnicas para determinar las frecuencias predominantes en la teoría de la información también son aplicables para encontrar las relaciones cíclicas en los

Modelos de pronósticos con características cíclicas y alta representabilidad pueden ser construidos de manera rápida utilizando P.L.

## I. INTRODUCCIÓN

Los pronósticos de la demanda de bienes y/o servicios son vitales como insumo de información para realizar los procesos de planeación, programación y control de la función de operaciones en las organizaciones productivas, por esto de su adecuada estimación depende la formulación de planes que se puedan ajustar más a los hechos reales y que por lo tanto conlleven a que las empresas sean más productivas y competitivas.

Los procesos de pronóstico en el ámbito empresarial se soportan en herramientas, técnicas y métodos sistemáticos estructurados de naturaleza cuantitativa y cualitativa. Entre los de carácter cualitativo,

<sup>1</sup> Miembro grupo de investigación en Modelos Matemáticos Aplicados a la Industria MMAI, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

<sup>2</sup> Miembro grupo de investigación en Modelos Matemáticos Aplicados a la Industria MMAI, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

datos de las ventas. Los procedimientos matemáticos para determinar las relaciones polinómicas se pueden aplicar ciertamente para determinar las tendencias de crecimiento en datos de venta [6].

Para realizar el análisis cíclico se tiene un modelo basado en una serie de análisis de Fourier. El análisis cíclico se usa para obtener los valores aproximados de las características estacionales.

El modelo de predicción cíclico se ajusta a la expresión (1)

Donde  $p_1$  y  $p_2$  representan los periodos más significativos y se determinan por un análisis espectral,

$$\hat{Y}(t) = a + bt + (c + dt) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) + (f + gt) \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \quad (1)$$

es posible que se requiera de varios ajustes para eliminar ruido.

El propósito es encontrar los valores de los parámetros  $a, b, c, d, f, g$  por un procedimiento de re-

gresión, de tal manera que se obtenga un modelo que estime los valores lo más cercano posible a la realidad en función del tiempo.

### III. ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

El procedimiento de estimación de un modelo de regresión es el método de los mínimos cuadrados. El objetivo es encontrar los valores de los parámetros [7], [8], de una función que minimiza la suma de los cuadrados de los errores (desviaciones) como se muestra en la expresión (2)

$$\text{Min} \sum_{t=1}^n e^2(t) = \sum_{t=1}^n [Y(t) - \hat{Y}(t)]^2 \quad (2)$$

Utilizando la optimización clásica se deriva parcialmente con respecto a los parámetros  $a, b, c, d, f, g$  de tal manera que se obtienen las expresiones (3), (4), (5), (6), (7), (8)

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n e^2(t)}{\partial a} = -2 \left[ \sum_{t=1}^n \left[ Y(t) - a - bt - (c + dt) \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) - (f + gt) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \right] \right] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n e^2(t)}{\partial b} = -2 \left[ \sum_{t=1}^n \left[ Y(t) - a - bt - (c + dt) \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) - (f + gt) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \right] t \right] = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n e^2(t)}{\partial c} = -2 \left[ \sum_{t=1}^n \left[ Y(t) - a - bt - (c + dt) \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) - (f + gt) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \right] \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) \right] = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n e^2(t)}{\partial d} = -2 \left[ \sum_{t=1}^n \left[ Y(t) - a - bt - (c + dt) \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) - (f + gt) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \right] t \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) \right] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n e^2(t)}{\partial f} = -2 \left[ \sum_{t=1}^n \left[ Y(t) - a - bt - (c + dt) \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) - (f + gt) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \right] \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \right] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n e^2(t)}{\partial g} = -2 \left[ \sum_{t=1}^n \left[ Y(t) - a - bt - (c + dt) \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) - (f + gt) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \right] t \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \right] = 0 \quad (8)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se realizan las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{t=1}^n t & S_2 &= \sum_{t=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) & S_3 &= \sum_{t=1}^n t \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) & S_4 &= \sum_{t=1}^n \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \\ S_5 &= \sum_{t=1}^n t \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) & S_6 &= \sum_{t=1}^n t^2 & S_7 &= \sum_{t=1}^n t^2 \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) & S_8 &= \sum_{t=1}^n t^2 \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \\ S_9 &= \sum_{t=1}^n \text{sen}^2\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) & S_{10} &= \sum_{t=1}^n t \text{sen}^2\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) & S_{11} &= \sum_{t=1}^n \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) & S_{12} &= \sum_{t=1}^n t \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \\ S_{13} &= \sum_{t=1}^n t^2 \text{sen}^2\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) & S_{14} &= \sum_{t=1}^n t^2 \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) & S_{15} &= \sum_{t=1}^n \text{cos}^2\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) & S_{16} &= \sum_{t=1}^n t \cdot \text{cos}^2\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \\ S_{17} &= \sum_{t=1}^n t^2 \cdot \text{cos}^2\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \\ H_1 &= \sum_{t=1}^n Y(t) & H_2 &= \sum_{t=1}^n tY(t) & H_3 &= \sum_{t=1}^n Y(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) \\ H_4 &= \sum_{t=1}^n Y(t) \cdot t \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p_1}\right) & H_5 &= \sum_{t=1}^n Y(t) \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) & H_6 &= \sum_{t=1}^n Y(t) \cdot t \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi t}{p_2}\right) \end{aligned}$$

Debido a que el modelo es lineal en los parámetros se tiene un modelo de regresión múltiple, de tal manera que el problema consiste en resolver el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} Na + s_1b + s_2c + s_3d + s_4f + s_5g &= h_1 \\ s_1a + s_6b + s_3c + s_7d + s_5f + s_8g &= h_2 \\ s_2a + s_3b + s_9c + s_{10}d + s_{11}f + s_{12}g &= h_3 \\ s_3a + s_7b + s_{10}c + s_{13}d + s_{12}f + s_{14}g &= h_4 \\ s_4a + s_5b + s_{11}c + s_{12}d + s_{15}f + s_{16}g &= h_5 \\ s_5a + s_8b + s_{12}c + s_{14}d + s_{16}f + s_{17}g &= h_6 \end{aligned}$$

#### IV. MODELO DE ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA POR PROGRAMACIÓN LINEAL

Otra alternativa de estimación es la utilización de la programación matemática, en donde se pueden determinar los parámetros en función de la suma de los valores absolutos de las desviaciones [9] y que con algunas transformaciones se puede expresar como un modelo de programación lineal. La función de estimación general de un pronóstico de serie de tiempo se muestra en la expresión (9).

$$\hat{Y}(t) = W_1 + W_2t + W_3t^2 + \dots + W_n t^{n-1} + W_{n+1}t^n \quad (9)$$

Ahora bien, visto como una función de regresión múltiple se expresa como (10)

$$\hat{Y}_i = W_1Z_{i1} + W_2Z_{i2} + W_3Z_{i3} + \dots + W_nZ_{in} \quad \text{para } i=1,2,\dots,m \quad (10)$$

Siendo el problema escoger los parámetros  $W_1, W_2, \dots, W_n$ , donde,  $\hat{Y}(t)$  es la variable dependiente y  $Z_{ij}, j=1,2,\dots,n$  son las variables independientes. Para caracterizar el problema se supone que existen m observaciones como se muestra en la matriz  $[Y_i | Z_{ij}]$  así:

	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>	.....	Z <sub>j</sub>	.....	Z <sub>n</sub>
O <sub>1</sub>	Z <sub>11</sub>	Z <sub>12</sub>	Z <sub>13</sub>	.....	Z <sub>1j</sub>	.....	Z <sub>1n</sub>
O <sub>2</sub>	Z <sub>21</sub>	Z <sub>22</sub>	Z <sub>23</sub>	.....	Z <sub>2j</sub>	.....	Z <sub>2n</sub>
O <sub>3</sub>	Z <sub>31</sub>	Z <sub>32</sub>	Z <sub>33</sub>	.....	Z <sub>3j</sub>	.....	Z <sub>3n</sub>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
O <sub>i</sub>	Z <sub>i1</sub>	Z <sub>i2</sub>	Z <sub>i3</sub>	.....	Z <sub>ij</sub>	.....	Z <sub>in</sub>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
O <sub>m</sub>	Z <sub>m1</sub>	Z <sub>m2</sub>	Z <sub>m3</sub>	.....	Z <sub>mj</sub>	.....	Z <sub>mn</sub>

El problema consiste en determinar los valores  $W_j$ , que minimice la suma del valor absoluto de las desviaciones entre  $\hat{Y}_i$  y  $Y_i$ ,  $i=1,2,\dots,m$ .

Se podría formular un modelo con otro criterio por ejemplo encontrar los parámetros de la función de pronóstico que minimicen la máxima desviación absoluta. La formulación del modelo es la siguiente:

**Objetivo:** Determinar el vector de coeficientes de peso en una función de regresión que minimice la suma de las desviaciones absolutas

**Variables de decisión:**

$W_j$ : Vector de pesos de la función de pronóstico, donde  $j=1,2,\dots,n$

$D_i$ : Vector de desviaciones de la observación "i" diferencia ( $Y_i - \hat{Y}_i$ ). Donde  $i=1,2,\dots,m$

$S_i^+$ : Vector de desviaciones positivas, ( $Y_i - \hat{Y}_i > 0$ ). Donde  $i=1,2,\dots,m$

$S_i^-$ : Vector de desviaciones negativas, ( $Y_i - \hat{Y}_i < 0$ ). Donde  $i=1,2,\dots,m$

**Parámetros:**

$Z_{ij}$ : Matriz de observaciones de los valores de las variables independientes "j", del modelo de regresión en la observación "i" para  $i=1,2,\dots,m$  y  $j=1,2,\dots,n$

$Y_i$ : Valor real de la variable dependiente en la observación "i" para  $i=1,2,\dots,m$

$j$ : Índice que identifica la variable independiente, (causa),  $j=1,2,\dots,n$

$i$ : Índice que identifica el número de la observación,  $i=1,2,\dots,m$

$m$ : Número de observaciones

$n$ : Número de variables independientes o términos en la función de pronóstico

Entonces el modelo se muestra en la expresión

$$\min F = \sum_{i=1}^m |D_i| \quad (11)$$

sujeito a:

$$\hat{Y}_i = \sum_{j=1}^n W_j Z_{i,j} \quad \text{para cada } i=1,2,\dots,m$$

$$D_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad \text{para cada } i=1,2,\dots,m$$

$$W_j \text{ no restringida } j=1,2,\dots,n$$

$$D_i \text{ no restringida } i=1,2,\dots,m$$

Como  $D_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) son no restringidas entonces se expresa en términos de la diferencia entre dos variables positivas así:

$$D_i = S_i^+ - S_i^- \quad \text{para } i=1,2,\dots,m$$

$$S_i^+, S_i^- \geq 0 \quad \text{para cada } i=1,2,\dots,m$$

Esto significa que puede existir una desviación por encima o por debajo pero no las dos simultáneamente de tal manera que el modelo se puede escribir como (12):

$$\min F = \sum_{i=1}^m (S_i^+ + S_i^-) \quad (12)$$

sujeito a:

$$S_i^+ - S_i^- + \sum_{j=1}^n W_j Z_{ij} = Y_i \quad \text{Paracada } i=1,2,\dots,m$$

$$W_j \text{ no restringida } j=1,2,\dots,n$$

$$S_i^+, S_i^- \geq 0 \quad \text{para cada } i=1,2,\dots,m$$

#### V. ESTIMACIÓN DEL MODELO POR PROGRAMACIÓN LINEAL

Para el modelo de estimación que se está considerando para el análisis cíclico en particular se tiene la siguiente formulación:

**Objetivo:** Determinar los coeficientes paramétricos de una función de pronósticos que contempla tendencia, estacionalidad y ciclicidad con el objeto de minimizar la suma de las desviaciones absolutas.

**Función Objetivo:**  $F = f(D_i, t=1,2,\dots,n)$  = Función de la suma de desviaciones absolutas.

El método de los mínimos cuadrados penaliza en mayor grado los grandes errores de pronóstico.

El criterio de la suma de los valores absolutos de las desviaciones penalizan igualmente pequeños y grandes errores de pronóstico.

**Variables de decisión:**

$D_t$ : Desviación de la observación “ $t$ ” con respecto al valor estimado para ese período, donde  $t=1,2,\dots,n$

$S_t^+$ : Desviación positiva de la observación “ $t$ ”, donde  $t=1,2,\dots,n$

$S_t^-$ : Desviación negativa de la observación “ $t$ ”, donde  $t=1,2,\dots,n$

$a, b, c, d, f, g$ : Parámetros de la función de regresión.

**Parámetros:**

$P_1, P_2$ : Período del ciclicidad

$t$ : Índice que identifica el número de la observación, donde  $t=1,2,\dots,n$

$Y_t$ : Valor real de la variable dependiente en la observación “ $t$ ”, donde  $t=1,2,\dots,n$

**Función de pronóstico:**

$$\hat{Y}_t = a + bt + (c + dt) \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi t}{P_1} \right] + (f + gt) \operatorname{cos} \left[ \frac{2\pi t}{P_2} \right]$$

Donde:

$\hat{Y}_t$ : Valor estimado en la observación “ $t$ ”, donde  $t=1,2,\dots,n$

$(a + bt)$ : Componente de tendencia

$[(c + dt) \operatorname{sen}(2\pi t/P_1)]$ : Componente de ciclicidad

$[(f + gt) \operatorname{cos}(2\pi t/P_2)]$ : Componente de estacionalidad.

Por lo tanto, el modelo de programación matemática se resume de acuerdo a la expresión (13)

$$\min F = \sum_{t=1}^n |D_t| \quad (13)$$

$$D_t = Y_t - a - bt - c \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi t}{P_1} \right) - dt \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi t}{P_1} \right) - f \operatorname{cos} \left( \frac{2\pi t}{P_2} \right) - g \operatorname{cos} \left( \frac{2\pi t}{P_2} \right)$$

*para cada  $t = 1, 2, \dots, n$*

sujeto a:

$$a, b, c, d, f, g, D_t \in \mathbb{R} \quad t=1, 2, \dots, n$$

Para poder resolver el problema dado que la función objetivo es no lineal entonces se sustituyen las variables de decisión “ $D_t$ ” por la suma de dos variables positivas  $S_t^+$  y  $S_t^-$  para cada  $t=1,2,\dots,n$  de tal manera, que de cada par de variables, una sola variable asuma valor ( donde una represente una desviación por encima y la otra una desviación por debajo del valor estimado con respecto al valor real ) basado en la relación  $S_t^+ \cdot S_t^- = 0$  para cada  $t=1,2,\dots,n$  de tal manera, que el modelo transformado se muestra según la expresión (14)

$$\min F = \sum_{t=1}^n (S_t^+ + S_t^-) \quad (14)$$

sujeto a:

$$S_t^+ - S_t^- + a + bt + c \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi t}{P_1} \right) + dt \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi t}{P_1} \right) + f \operatorname{cos} \left( \frac{2\pi t}{P_2} \right) + g \operatorname{cos} \left( \frac{2\pi t}{P_2} \right) = Y_t \quad \text{para cada } t = 1, 2, \dots, n$$

$$S_t^+, S_t^- \geq 0 \quad \text{para cada } t = 1, 2, \dots, n$$

$$a, b, c, d, f, g \text{ no restringidas}$$

## VI. EVALUACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN POR LAS TÉCNICAS MÍNIMOS CUADRADOS Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Para comparar las técnicas de estimación del modelo de pronóstico propuesto, se diseñó un proceso experimental de diez replicas de simulación con ruido aleatorio en hoja electrónica en donde se obtuvieron los siguientes resultados:

t	$Y_t^1$	$Y_t^2$	$Y_t^3$	$Y_t^4$	$Y_t^5$	$Y_t^6$	$Y_t^7$	$Y_t^8$	$Y_t^9$	$Y_t^{10}$
1	114.02	124.26	113.78	120.67	105.71	116.33	115.57	118.27	114.37	130.12
2	124.31	137.74	131.42	134.83	115.42	127.83	125.27	130.52	117.95	118.55
3	122.28	115.77	106.80	125.40	119.77	128.96	129.01	120.97	126.93	129.81
4	123.25	104.61	128.67	121.49	131.82	112.69	124.54	139.32	114.65	133.14
5	119.07	113.70	109.71	122.89	118.35	118.58	126.25	105.87	103.40	108.16
6	109.42	122.72	129.31	112.11	110.17	119.30	101.57	100.58	125.76	112.47
7	116.85	118.90	115.96	108.05	109.00	85.84	97.87	111.40	117.88	107.61
8	130.89	113.13	122.09	113.25	127.08	107.65	122.69	136.52	121.34	93.59
9	99.04	120.20	114.50	134.37	112.69	130.45	118.02	119.55	115.38	144.10
10	141.86	128.68	129.88	131.07	133.29	130.42	113.75	122.53	128.70	115.96
11	133.89	134.12	135.75	156.45	140.76	141.24	131.97	146.35	138.27	121.15
12	153.49	131.04	150.99	163.08	133.11	150.38	148.73	115.81	122.03	156.86
13	145.65	133.76	141.59	138.95	163.46	146.91	133.40	139.76	144.45	130.76
14	147.51	139.68	140.04	148.60	137.50	159.98	144.84	134.97	141.34	141.14
15	142.00	139.24	140.50	126.60	123.64	149.03	151.05	119.25	135.14	136.21
16	149.33	104.57	127.15	121.12	135.51	111.75	121.16	133.34	107.53	131.17
17	120.12	108.92	127.81	112.44	115.14	118.01	124.09	117.92	102.63	120.43
18	110.13	122.93	96.67	110.35	115.98	129.15	134.23	127.56	108.26	108.45
19	97.57	136.37	112.56	120.67	104.23	116.86	110.81	101.77	124.98	116.04
20	98.91	126.56	97.28	129.68	111.30	118.10	124.41	134.02	106.49	121.64
21	115.72	118.26	89.61	117.01	124.97	148.15	121.06	112.92	142.83	123.47
22	124.82	147.73	143.52	150.91	134.09	144.61	127.79	125.95	150.19	133.70
23	165.69	151.32	153.71	148.82	153.16	142.50	155.37	154.84	154.17	162.40
24	178.74	131.18	177.57	160.04	184.09	183.40	155.76	170.85	157.51	165.35

Posteriormente se calcularon los parámetros por el método de los mínimos cuadrados como se muestra en la tabla I

**TABLA I: CÁLCULOS PRELIMINARES**  
Cálculos para estimar los parámetros de la simulación del modelo de pronóstico por el método de los mínimos cuadrados para una de las réplicas

t	t <sup>2</sup>	y(t)	t.y(t)	y(t).sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )	y(t).t.sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )	y(t).cos (2.π.t/p <sub>2</sub> )	y(t).t.cos (2.π.t/p <sub>2</sub> )	Sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )	t.sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )	Cos (2.π.t/p <sub>2</sub> )	t <sup>2</sup> .sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )
1.00	1.00	122.42	122.42								
2.00	4.00	123.18	246.35	106.67	213.35	61.59	123.18	0.87	1.73	0.50	3.46
3.00	9.00	129.44	388.33	129.44	388.33	0.00	0.00	1.00	3.00	0.00	9.00
4.00	16.00	103.38	413.51	89.53	358.11	-51.69	-206.76	0.87	3.46	-0.50	13.86
5.00	25.00	114.82	574.10	57.41	287.05	-99.44	-497.18	0.50	2.50	-0.87	12.50
6.00	36.00	113.16	678.98	0.00	0.00	-113.16	-678.98	0.00	0.00	-1.00	0.00
7.00	49.00	128.18	897.28	-64.09	-448.64	-111.01	-777.07	-0.50	-3.50	-0.87	-24.50
8.00	64.00	103.70	829.56	-89.80	-718.42	-51.85	-414.78	-0.87	-6.93	-0.50	-55.43
9.00	81.00	116.46	1,048.12	-116.46	-1,048.12	0.00	0.00	-1.00	-9.00	0.00	-81.00
10.00	100.00	123.79	1,237.88	-107.20	-1,072.03	61.89	618.94	-0.87	-8.66	0.50	-86.60
11.00	121.00	122.27	1,344.97	-61.13	-672.48	105.89	1,164.78	-0.50	-5.50	0.87	-60.50
12.00	144.00	134.06	1,608.77	0.00	0.00	134.06	1,608.77	0.00	0.00	1.00	0.00
13.00	169.00	139.65	1,815.39	69.82	907.69	120.94	1,572.17	0.50	6.50	0.87	84.50
14.00	196.00	155.55	2,177.69	134.71	1,885.93	77.77	1,088.84	0.87	12.12	0.50	169.74
15.00	225.00	132.16	1,982.39	132.16	1,982.39	0.00	0.00	1.00	15.00	0.00	225.00
16.00	256.00	129.98	2,079.74	112.57	1,801.11	-64.99	-1,039.87	0.87	13.86	-0.50	221.70
17.00	289.00	109.91	1,868.44	54.95	934.22	-95.18	-1,618.12	0.50	8.50	-0.87	144.50
18.00	324.00	108.71	1,956.86	0.00	0.00	-108.71	-1,956.86	0.00	0.00	-1.00	0.00
19.00	361.00	94.68	1,798.86	-47.34	-899.43	-81.99	-1,557.86	-0.50	-9.50	-0.87	-180.50
20.00	400.00	97.48	1,949.63	-84.42	-1,688.42	-48.74	-974.81	-0.87	-17.32	-0.50	-346.41
21.00	441.00	124.94	2,623.82	-124.94	-2,623.82	0.00	0.00	-1.00	-21.00	0.00	-441.00
22.00	484.00	131.94	2,902.61	-114.26	-2,513.73	65.97	1,451.30	-0.87	-19.05	0.50	-419.16
23.00	529.00	132.41	3,045.43	-66.20	-1,522.71	114.67	2,637.42	-0.50	-11.50	0.87	-264.50
24.00	576.00	165.80	3,979.31	0.00	0.00	165.80	3,979.31	0.00	0.00	1.00	0.00
300.0	4,900.00	2,958.07	37,570.42	72.62	-4,388.43	187.83	4,628.44	0.00	-44.78	0.00	-1,074.83
S <sub>1</sub>	S <sub>6</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>7</sub>

t	t <sup>2</sup>	y(t)	t.y(t)	y(t).sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )	y(t).t.sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )	y(t).cos (2.π.t/p <sub>2</sub> )	y(t).t.cos (2.π.t/p <sub>2</sub> )	Sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )	t.sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )	Cos (2.π.t/p <sub>2</sub> )	t <sup>2</sup> .sen (2.π.t/p <sub>1</sub> )
1.00	1.00	122.42	122.42	61.21	61.21	106.01	106.01	0.50	0.50	0.87	0.50
2.00	4.00	123.18	246.35	106.67	213.35	61.59	123.18	0.87	1.73	0.50	3.46
3.00	9.00	129.44	388.33	129.44	388.33	0.00	0.00	1.00	3.00	0.00	9.00
4.00	16.00	103.38	413.51	89.53	358.11	-51.69	-206.76	0.87	3.46	-0.50	13.86
5.00	25.00	114.82	574.10	57.41	287.05	-99.44	-497.18	0.50	2.50	-0.87	12.50
6.00	36.00	113.16	678.98	0.00	0.00	-113.16	-678.98	0.00	0.00	-1.00	0.00
7.00	49.00	128.18	897.28	-64.09	-448.64	-111.01	-777.07	-0.50	-3.50	-0.87	-24.50
8.00	64.00	103.70	829.56	-89.80	-718.42	-51.85	-414.78	-0.87	-6.93	-0.50	-55.43
9.00	81.00	116.46	1,048.12	-116.46	-1,048.12	0.00	0.00	-1.00	-9.00	0.00	-81.00
10.00	100.00	123.79	1,237.88	-107.20	-1,072.03	61.89	618.94	-0.87	-8.66	0.50	-86.60
11.00	121.00	122.27	1,344.97	-61.13	-672.48	105.89	1,164.78	-0.50	-5.50	0.87	-60.50
12.00	144.00	134.06	1,608.77	0.00	0.00	134.06	1,608.77	0.00	0.00	1.00	0.00
13.00	169.00	139.65	1,815.39	69.82	907.69	120.94	1,572.17	0.50	6.50	0.87	84.50
14.00	196.00	155.55	2,177.69	134.71	1,885.93	77.77	1,088.84	0.87	12.12	0.50	169.74
15.00	225.00	132.16	1,982.39	132.16	1,982.39	0.00	0.00	1.00	15.00	0.00	225.00
16.00	256.00	129.98	2,079.74	112.57	1,801.11	-64.99	-1,039.87	0.87	13.86	-0.50	221.70
17.00	289.00	109.91	1,868.44	54.95	934.22	-95.18	-1,618.12	0.50	8.50	-0.87	144.50
18.00	324.00	108.71	1,956.86	0.00	0.00	-108.71	-1,956.86	0.00	0.00	-1.00	0.00
19.00	361.00	94.68	1,798.86	-47.34	-899.43	-81.99	-1,557.86	-0.50	-9.50	-0.87	-180.50
20.00	400.00	97.48	1,949.63	-84.42	-1,688.42	-48.74	-974.81	-0.87	-17.32	-0.50	-346.41
21.00	441.00	124.94	2,623.82	-124.94	-2,623.82	0.00	0.00	-1.00	-21.00	0.00	-441.00
22.00	484.00	131.94	2,902.61	-114.26	-2,513.73	65.97	1,451.30	-0.87	-19.05	0.50	-419.16
23.00	529.00	132.41	3,045.43	-66.20	-1,522.71	114.67	2,637.42	-0.50	-11.50	0.87	-264.50
24.00	576.00	165.80	3,979.31	0.00	0.00	165.80	3,979.31	0.00	0.00	1.00	0.00
300.0	4,900.00	2,958.07	37,570.42	72.62	-4,388.43	187.83	4,628.44	0.00	-44.78	0.00	-1,074.83
S <sub>1</sub>	S <sub>6</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>7</sub>

La estimación de parámetros de modelos de pronóstico con componente cíclica puede ser realizada por regresión lineal.

La formulación del P.L. corresponde a un modelo que minimiza la suma de las desviaciones absolutas.

De tal manera que el sistema de ecuaciones a resolver es:

24.00.a +300.00. b +0.00. c +-44.78. d +0.00. f +12.00. g =h <sub>1</sub>
300.00. a +4.900.00. b +-44.78. c +-1,074.83. d +12.00. f +467.14. g= h <sub>2</sub>
0.00. a +-44.78. b +12.00. c +144.00. d +0.00. f +-10.39. g= h <sub>3</sub>
-44.78. a +-1,074.83. b +144.00. c +2,282.00. d +-10.39. f +-249.42. g=h <sub>4</sub>
0.00. a +12.00. b +0.00. c +-10.39. d +12.00. f +156.00. g=h <sub>5</sub>
12.00. a +467.14. b +-10.39. c +-249.42. d +156.00. f +2,618.00. g= h <sub>6</sub>

Se resolvió el sistema de ecuaciones para cada réplica, (se utilizó Derive) dando como resultado las siguientes estimaciones para los parámetros:

replica	n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9	n10
<b>a</b>	119.351	118.428	121.474	124.273	115.701	113.089	112.9	117.60	115.788	114.816
<b>b</b>	0.87743	0.567375	0.54199	0.477764	0.985398	1.40147	1.16883	0.7323250	0.71922900	0.976529
<b>c</b>	-5.33799	2.34576	-8.21432	-0.387326	-2.37859	5.93702	8.31001	1.08080	2.61259000	8.747050
<b>d</b>	1.42057	-0.290812	1.40479	0.101317	0.742593	0.1001702	0.170062	0.254290	-0.2715820	-0.08128880
<b>f</b>	-3.32553	9.79887	-5.82873	10.5036	-6.52789	9.54	3.94494	1.037870	-2.7028500	4.349980
<b>g</b>	1.70737	-0.009988	1.81855	0.623034	1.75218	0.670934	0.547775	0.840924	1.2771	0.8414290

	promedio	desviación	Límite inferior	límite superior	Valor real del parámetro
<b>a</b>	117.342	3.64694807	114.594632	120.089368	118
<b>b</b>	0.844834	0.29530674	0.62236959	1.06729841	0.75
<b>c</b>	1.2715004	5.57695129	-2.9298029	5.4728037	1
<b>d</b>	0.35501094	0.62905491	-0.118877	0.82889897	0.3
<b>f</b>	2.079026	6.53746142	-2.8458616	7.0039136	2
<b>g</b>	1.00693078	0.60899705	0.548153	1.46570855	1

Así se puede apreciar que los parámetros estimados conforman un intervalo de confianza de 95 % de confianza que contiene el valor real de los parámetros, la función con el promedio de los parámetros estimados por regresión se puede apreciar en la expresión (15)

$$\hat{Y}(t) = 117.342 + 0.844834 \cdot t + (1.2715004 + 0.35501094 \cdot t) \operatorname{sen} \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12} \right) + (2.079026 + 1.00693078 \cdot t) \cos \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12} \right) \quad (15)$$

De otra parte se estimaron los valores de los parámetros por programación lineal, (se utilizó el método simplex del paquete (QSBWIN) la formulación se muestra en el tabla II y los resultados en la tabla III

TABLA II: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA LINEAL SIMULADO DATOS DE ENTRADA PARA EL QSB PARA UNA DE LAS REPLICAS

<p>MINIMIZAR=1S1<sup>+</sup>+S2<sup>+</sup>+1S3<sup>+</sup>+1S4<sup>+</sup>+1S5<sup>+</sup>+1S6<sup>+</sup>+1S7<sup>+</sup>+1S8<sup>+</sup>+1S9<sup>+</sup>+1S10<sup>+</sup>+1S11<sup>+</sup>+1S12<sup>+</sup>+1S13<sup>+</sup>+1S14<sup>+</sup>+1S15<sup>+</sup>+1S16<sup>+</sup>+1S17<sup>+</sup>+1S18<sup>+</sup>+1S19<sup>+</sup>+1S20<sup>+</sup>+1S21<sup>+</sup>+1S22<sup>+</sup>+1S23<sup>+</sup>+1S24<sup>+</sup>+1S1<sup>-</sup>+1S2<sup>-</sup>+1S3<sup>-</sup>+1S4<sup>-</sup>+1S5<sup>-</sup>+1S6<sup>-</sup>+1S7<sup>-</sup>+1S8<sup>-</sup>+1S9<sup>-</sup>+1S10<sup>-</sup>+1S11<sup>-</sup>+1S12<sup>-</sup>+1S13<sup>-</sup>+1S14<sup>-</sup>+1S15<sup>-</sup>+1S16<sup>-</sup>+1S17<sup>-</sup>+1S18<sup>-</sup>+1S19<sup>-</sup>+1S20<sup>-</sup>+1S21<sup>-</sup>+1S22<sup>-</sup>+1S23<sup>-</sup>+1S24<sup>-</sup>S.A.</p> <p>1S1<sup>+</sup>-1S1<sup>-</sup>+1A+1B+0.5C+0.5D+0.8660254F+0.8660254G=122.4154</p> <p>1S2<sup>+</sup>-1S2<sup>-</sup>+1A+2B+0.8660254C+1.732051D+0.5F+1G=123.1758</p> <p>1S3<sup>+</sup>-1S3<sup>-</sup>+1A+3B+1C+3D+F+G=129.4432</p> <p>1S4<sup>+</sup>-1S4<sup>-</sup>+1A+4B+0.8660254C+3.464102D-0.5F-2G=103.3781</p> <p>1S5<sup>+</sup>-1S5<sup>-</sup>+1A+5B+0.5C+2.5D-0.8660254F-4.330127G=114.8192</p> <p>1S6<sup>+</sup>-1S6<sup>-</sup>+1A+6B+C+D-1F-6G=113.1629</p> <p>1S7<sup>+</sup>-1S7<sup>-</sup>+1A+7B-0.5C-3.5D-0.8660254F-6.062178G=128.1832</p> <p>1S8<sup>+</sup>-1S8<sup>-</sup>+1A+8B-0.8660254C-6.928203D-0.5F-4G=103.6956</p> <p>1S9<sup>+</sup>-1S9<sup>-</sup>+1A+9B-1C-9DF-1.65395E-15G=116.4579</p> <p>1S10<sup>+</sup>-1S10<sup>-</sup>+1A+10B-0.8660254C-8.660254D+0.5F+5G=123.7878</p> <p>1S11<sup>+</sup>-1S11<sup>-</sup>+1A+11B-0.5C-5.5D+0.8660254F+9.526279G=122.2698</p> <p>1S12<sup>+</sup>-1S12<sup>-</sup>+1A+12BC-2.94036E-15D+1F+12G=134.0641</p> <p>1S13<sup>+</sup>-1S13<sup>-</sup>+1A+13B+0.5C+6.5D+0.8660254F+11.25833G=139.6453</p> <p>1S14<sup>+</sup>-1S14<sup>-</sup>+1A+14B+0.8660254C+12.12436D+0.5F+7G=155.5491</p> <p>1S15<sup>+</sup>-1S15<sup>-</sup>+1A+15B+1C+15D+1.19447E-15F+1.7917E-14G=132.1592</p> <p>1S16<sup>+</sup>-1S16<sup>-</sup>+1A+16B+0.8660254C+13.85641D-0.5F-8G=129.9837</p> <p>1S17<sup>+</sup>-1S17<sup>-</sup>+1A+17B+0.5C+8.5D-0.8660254F-14.72243G=109.9085</p> <p>1S18<sup>+</sup>-1S18<sup>-</sup>+1A+18B+C+6.6158E-15D-1F-18G=108.7145</p> <p>1S19<sup>+</sup>-1S19<sup>-</sup>+1A+19B-0.5C-9.5D-0.8660254F-16.45448G=94.67673</p> <p>1S20<sup>+</sup>-1S20<sup>-</sup>+1A+20B-0.8660254C-17.32051D-0.5F-10G=97.48125</p> <p>1S21<sup>+</sup>-1S21<sup>-</sup>+1A+21B-1C-21DF-9.00484E-15G=124.9436</p> <p>1S22<sup>+</sup>-1S22<sup>-</sup>+1A+22B-0.8660254C-19.05256D+0.5F+11G=131.9368</p> <p>1S23<sup>+</sup>-1S23<sup>-</sup>+1A+23B-0.5C-11.5D+0.8660254F+19.91858G=132.4099</p> <p>1S24<sup>+</sup>-1S24<sup>-</sup>+1A+24BC-1.17614E-14D+1F+24G=165.8046</p> <p>A, B, C, D, F, G NO RESTRINGIDAS</p>
--

La simulación  
 permitió  
 comparar las  
 técnicas de  
 pronóstico por  
 R.L. y P.L.

TABLA III. RESULTADOS DEL PROBLEMA SIMULADO POR PROGRAMACIÓN LINEAL  
 INFORME DE SALIDA QSB PARA UNA DE LAS REPLICAS

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	S1+	1,064	1	1,064	0	basic	-0,2617	1,3799
2	S2+	0	1	0	1,3265	at bound	-0,3265	M
3	S3+	6,3759	1	6,3759	0	basic	0,6333	1,8498
4	S4+	0	1	0	2	at bound	-1	M
5	S5+	0	1	0	2	at bound	-1	M
6	S6+	0	1	0	0,1892	at bound	0,8108	M
7	S7+	17,1571	1	17,1571	0	basic	0,741	3,4782
8	S8+	0	1	0	2	at bound	-1	M
9	S9+	0	1	0	0,8978	at bound	0,1022	M
10	S10+	0,0162	1	0,0162	0	basic	0,1266	1,4814
11	S11+	0	1	0	2	at bound	-1	M
12	S12+	0	1	0	2	at bound	-1	M
13	S13+	0	1	0	2	at bound	-1	M
14	S14+	15,957	1	15,957	0	basic	-0,3476	1,0888
15	S15+	0	1	0	1,8944	at bound	-0,8944	M
16	S16+	8,7173	1	8,7173	0	basic	-1	1,1842
17	S17+	0	1	0	1,5023	at bound	-0,5023	M
18	S18+	7,1488	1	7,1488	0	basic	0,8136	1,3655
19	S19+	0	1	0	2	at bound	-1	M
20	S20+	0	1	0	2	at bound	-1	M
21	S21+	8,9213	1	8,9213	0	basic	0,8444	1,7138
22	S22+	0	1	0	0,1899	at bound	0,8101	M
23	S23+	0	1	0	2	at bound	-1	M
24	S24+	6,6803	1	6,6803	0	basic	0,7611	1,0617
25	S1-	0	1	0	2	at bound	-1	M
26	S2-	0	1	0	0,6735	at bound	0,3265	M
27	S3-	0	1	0	2	at bound	-1	M
28	S4-	17,3972	1	17,3972	0	basic	-0,2374	1,209
29	S5-	2,1709	1	2,1709	0	basic	-0,5948	1,1762
30	S6-	0	1	0	1,8108	at bound	-0,8108	M
31	S7-	0	1	0	2	at bound	-1	M
32	S8-	8,2703	1	8,2703	0	basic	-0,4063	1,5243
33	S9-	0	1	0	1,1022	at bound	-0,1022	M
34	S10-	0	1	0	2	at bound	-1	M
35	S11-	9,7948	1	9,7948	0	basic	0,8037	2,0138
36	S12-	4,8068	1	4,8068	0	basic	0,8795	1,9469
37	S13-	2,2079	1	2,2079	0	basic	0,9064	1,9145
38	S14-	0	1	0	2	at bound	-1	M
39	S15-	0	1	0	0,1056	at bound	0,8944	M
40	S16-	0	1	0	2	at bound	-1	M
41	S17-	0	1	0	0,4977	at bound	0,5023	M
42	S18-	0	1	0	2	at bound	-1	M
43	S19-	4,5039	1	4,5039	0	basic	0,6584	1,111
44	S20-	6,7245	1	6,7245	0	basic	0,5937	1,1045
45	S21-	0	1	0	2	at bound	-1	M
46	S22-	0	1	0	1,8101	at bound	-0,8101	M
47	S23-	15,3926	1	15,3926	0	basic	0,879	1,1942
48	S24-	0	1	0	2	at bound	-1	M
49	a	118,7895	0	0	0	basic	0	0,5298
50	b	0,3607	0	0	0	basic	0	5,9822
51	c	2,0048	0	0	0	basic	0	0,3047
52	d	0,397	0	0	0	basic	0	16,0668
53	f	-0,172	0	0	0	at bound	0	M
54	g	1,3271	0	0	0	basic	0	2,9623

Los valores de los parámetros estimados por el método de la mínima distancia calculado con el modelo de programación lineal son:

Réplica	n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9	n10
a	118,6172	113,6283	126,4833	118,4954	110,6135	117,9934	118,9908	112,8698	116,5468	108,5258
b	0,8879	1,1966	0,1549	0,7065	0,9882	1,2899	0,7517	1,0481	0,5826	1,3474
c	-3,1402	4,5068	-5,4544	8,018	5,4304	2,7831	3,2459	5,2778	3,2812	19,5048
d	1,1753	-0,0341	1,1204	-0,6453	0,1536	0,5938	0,4986	-0,1064	-0,6061	-0,7528
f	-7,1138	8,0614	-14,8438	5,9758	-7,3517	6,0161	0,4108	1,1182	-5,8443	-2,6477
g	1,9134	0,2537	2,5039	0,7754	1,5394	0,8144	0,8955	0,9191	1,3676	1,1306

Réplica	Promedio	desviación	Límite inferior	límite superior	Valor real del parámetro
a	116,27643	5,11784329	112,420988	120,131872	118
b	0,89538	0,36288322	0,62200798	1,16875202	0,75
c	4,34534	6,68514551	-0,6908029	9,38148295	1
d	0,1397	0,70152371	-0,3887811	0,66818119	0,3
f	-1,6219	7,28896842	-7,1129228	3,86912288	2
g	1,2113	0,64566913	0,72489592	1,69770408	1

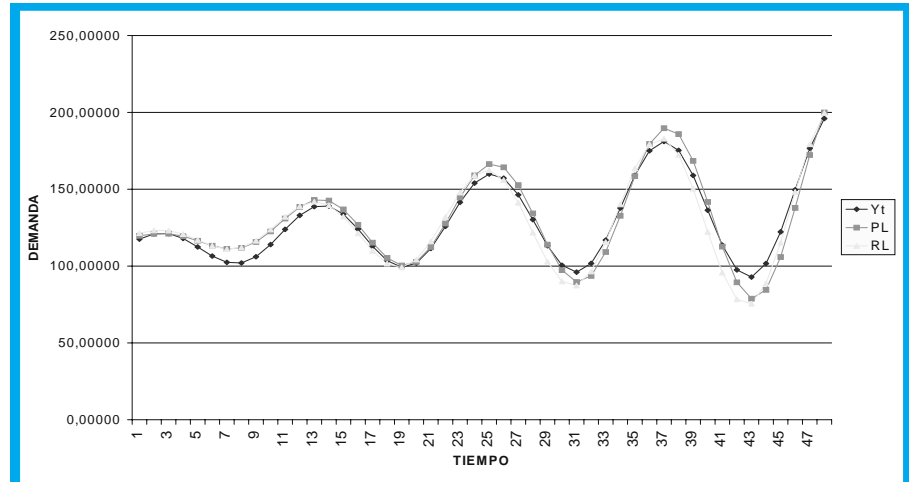
Es así como la función de pronóstico estimada por programación lineal es la expresión (16)

$$\hat{Y}(t) = 116.27643 + 0.89538 + (4.34534 + 0.1397 t) \operatorname{sen} \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12} \right) + (-1.6219 + 1.2113 t) \cos \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12} \right) \quad (16)$$

Para comparar las dos técnicas se utilizó los siguientes criterios:

CRITERIO	DESCRIPCIÓN
1	Suma de las desviaciones cuadráticas
2	Suma de las desviaciones absolutas
3	Máximo error absoluto
4	Coefficiente de correlación

Inicialmente se ilustra el proceso mostrando el modelo gráfico, en donde observan la curva simulada y las curvas estimadas por los dos métodos de estimación, como se observa en la figura 1, para tal efecto se utilizaron las funciones estimadas para ampliar el número de observaciones a 48, con el fin de verificar la utilidad de dichas funciones para la obtención de pronósticos.



**Figura 1. COMPARACIÓN PRONÓSTICOS MÍNIMOS CUADRADOS Vs. PROGRAMACIÓN LINEAL.**  
Comparación de pronósticos obtenidos utilizando programación lineal con el criterio de minimización de la suma de las desviaciones absolutas o error absoluto y los obtenidos con regresión clásica con el criterio de la minimización de la suma de los cuadrados del error

Parece que al observar la gráfica que la curva de estimación por programación lineal ajusta mejor que la estimada por el método de mínimos cuadrados, pero la diferencia entre los dos métodos no es muy significativa.

Para el experimento de simulación se calcularon los criterios de comparación expuestos anteriormente para cada una de las replicas como se muestra en la tabla IV. El resumen de los resultados para el experimento de simulación se muestra en la tabla V

**TABLA IV. CÁLCULOS DE ERROR DE LOS MÉTODOS DE REGRESIÓN SE CALCULAN LAS DESVIACIONES PARA LOS DOS CRITERIOS Y SE DETERMINA EL MÁXIMO ERROR PARA UNA DE LAS REPLICAS**

	Y(t)	Mínimos Cuadrados	Mínima Distancia	ERROR PL	ERROR MC	ERROR <sup>2</sup> PL	ERROR <sup>2</sup> MC	MAXIMO ERROR
1	122.415407	119.681466	121.351446	1.0639607	2.73394088	1.1320125	7.47443272	2.73394088
2	123.175774	120.994956	123.175832	5.7457E-5	2.18081876	3.3013E-09	4.75597046	2.18081876
3	129.443157	121.055756	123.0674	6.3757572	8.38740078	40.65028	70.3484919	8.38740078
4	103.378128	119.431527	120.775556	<b>17.397428</b>	16.0533998	302.67052	257.711644	<b>17.3974286</b>
5	114.819223	116.458542	116.990345	2.1711221	1.63931929	4.71377142	2.68736773	2.17112216
6	113.16287	113.215581	113.1631	0.0002295	0.05271081	5.2672E-08	0.00277843	0.05271081
7	128.183208	111.196754	111.02634	17.156867	16.9864534	294.358097	288.539599	17.1568673
8	103.695593	111.781127	111.965996	8.27040236	8.08553425	68.3995553	65.3758641	8.27040236
9	116.457923	115.676119	116.458	7.7324E-05	0.78180368	5.979E-09	0.611217	0.78180368
10	123.787801	122.533924	123.771671	0.01613003	1.25387773	0.00026018	1.57220936	1.25387773
11	122.269776	130.895741	132.064669	9.79489303	8.62596515	95.9399295	74.4072747	9.79489303
12	134.064084	138.518663	138.8711	4.80701622	4.4545791	23.1074049	19.8432749	4.80701622
13	139.645293	143.014779	141.853474	2.20818113	3.36948602	4.8760639	11.3534361	3.36948602
14	155.549139	142.621039	139.592577	15.9565616	12.9280991	254.611858	167.135746	15.9565616
15	132.159204	136.858753	132.1598	0.00059583	4.69954883	3.5502E-07	22.0857592	4.69954883
16	129.983742	126.85587	121.267101	8.71664103	3.12787208	75.9798309	9.78358378	8.71664103
17	109.908454	115.193718	109.909117	0.00066268	5.28526343	4.3915E-07	27.9340096	5.28526343
18	108.714538	105.279332	101.5663	7.14823755	3.43520514	51.0973001	11.8006344	7.14823755
19	94.6767366	100.394425	99.1811124	4.50437584	5.71768892	20.2894017	32.6919666	5.71768892
20	97.4812581	102.686028	104.206051	6.72479251	5.20476981	45.2228343	27.0896288	6.72479251
21	124.943577	112.404107	116.0224	8.92117725	12.5394707	79.5874035	157.238325	12.5394707
22	131.936791	127.640565	131.936926	0.00013578	4.29622553	1.8436E-08	18.4575538	4.29622553
23	132.409941	144.691549	147.802697	15.3927556	12.2816083	236.936926	150.837902	15.3927556
24	165.804603	158.985896	159.1247	6.67990269	6.81870677	44.6210999	46.4947621	6.81870677
		<b>Suma de desviación absoluta</b>	143.307961	150.939748				
		<b>Suma de error cuadrático</b>				1644.19455	1476.23343	
		<b>Máximo error absoluto</b>		17.3974286	16.9864534			
		<b>Coefficiente de correlación</b>		0.97860315	0.963126441			



TABLA V. COMPARACIÓN DE MÉTODOS POR MEDIO DE INDICES  
LA COMPARACIÓN SE REALIZA UTILIZANDO LOS CRITERIOS MAS COMUNES DE SELECCIÓN  
DE TÉCNICAS DE PRONÓSTICOS PARA CADA REPLICA.

	1		2		3		4		5	
	PL	RL	PL	RL	PL	RL	PL	RL	PL	RL
Suma de las desviaciones absolutas	138.7935	145.2364	176.0074	177.6490	167.9707	177.891	137.7752	152.4716	151.4319	159.0090
Maxima desviacion absoluta	20.13540	20.76533	25.57538	16.11963	22.04982	21.95714	21.85155	15.55206	25.31936	17.22634
Correlacion	0.918453	0.922049	0.639535	0.694463	0.866657	0.887089	0.846160	0.880026	0.891817	0.904897
Suma del cuadrado del error	1595.648	1525.712	2743.661	1917.938	2409.593	1999.884	1846.500	1422.850	2227.585	1514.071

	6		7		8		9		10	
	PL	RL	PL	RL	PL	RL	PL	RL	PL	RL
Suma de las desviaciones absolutas	182.4198	196.2899	156.3368	167.2016	225.5528	235.5754	153.2246	162.2511	161.3119	178.6459
Maxima desviacion absoluta	27.9976	21.4105	18.2389	14.0964	23.3310	21.7070	18.6076	15.0137	36.1802	27.9413
Correlacion	0.8420	0.8604	0.8131	0.8415	0.6788	0.6900	0.8420	0.8625	0.7907	0.8248
Suma del cuadrado del error	2973.692	2494.494	1826.411	1569.353	3527.263	3311.525	1780.532	1564.900	2746.554	2285.712

## VII. CONCLUSIONES

Se puede concluir que la programación lineal es utilizable como una técnica de estimación de parámetros para modelos de pronóstico con componente cíclico desarrollados por regresión usando el criterio de la minimización de la suma absoluta del error. La técnica es de fácil y rápida implementación, dadas las herramientas computacionales con que se cuenta en la actualidad.

La diferencia en el ajuste de los modelos obtenidos por ambas técnicas no es significativa, ya que el grado de representación del modelo cíclico basado en series de Fourier es muy similar, para los criterios correspondientes a la suma de desviaciones absolutas, la suma de error cuadrático, la máxima desviación absoluta y el coeficiente de correlación, por esto, para determinar la superioridad de una técnica sobre la otra se requiere de un proceso experimental y de un análisis muy completo.

Para el modelo simulado al realizar una proyección más grande se observa que la función de regresión obtenida por programación lineal parece que ajustara mejor a la luz de los resultados.

Se puede lograr otras formulaciones, si se toman otros criterios de decisión como por ejemplo buscar la mínima desviación absoluta.

## REFERENCIAS

- [1] Adam E., Ebert R. Jr. Administración de la producción y las Operaciones. Prentice Hall. Mexico. 1991
- [2] Schroeder R. G., Administración de Operaciones, Mexico : Mc GRAW-HILL, Tercera Edición, 1992

- [3] Sneddon I.N., Fourier Series, The Free Press, Glencoe, Ill., 1961.
- [4] Bowman E. H., "Production Scheduling by the Transportation Method of Linear Programming" Operations Research, 3, no. 1, 1956.
- [5] Walpole R. E., et al. "Probability and Statistics for Engineers and Scientists". Prentice Hall, Inc. 1998.
- [6] Bedworth D. D., Bailey J. E., Integred Production Control Systems, John Wiley & sons, Inc. 1995.
- [7] Buffa E., and Miller J. G., Production Inventory Systems : Planning and Control. Homewood, IL : Richard d. Irwin, 1979.
- [8] Johnson, L.A., and Montgomery D.C., Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control. New York: John Wiley & Sons., 1974.
- [9] Silver E., Decision Systems for Inventory Management and Production Planning. New York: John Wiley & Sons. Second Edition, 1985
- [9] Rios Insua S., et al. Programación lineal y aplicaciones. Editorial RA-MA, Madrid España, 1998.

### Cesar Amilcar López Bello

Ingeniero Industrial, Universidad Distrital. Especialista en Ingeniería de Producción, Universidad Distrital. Magíster en Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes. Candidato a Doctor en Ciencias Técnicas, Universidad de Las Villas (Cuba). Docente Tiempo completo, Facultad de Ingeniería Universidad Distrital. Director de la Maestría en Ingeniería Industrial, Universidad Distrital. Correo electrónico: cesaralopez@latinmail.com

### Leonardo José González Rodríguez

Ingeniero Industrial, Universidad Distrital. Candidato a Magister en Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes. Docente Tiempo completo, Facultad de Ingeniería Universidad Distrital. Correo electrónico: le-gonza@uniandes.edu.co

Se abre la posibilidad de utilizar de manera combinada las técnicas de pronóstico por R.L. y P.L. en un modelo multicriterio.