El paso del álgebra al calculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas

Gloria Ines
Neira Sanabria

RESUMEN

En los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo se evidencian problemas como la incomprensión de los conceptos , el mal manèjo de los razonamientos, la repitencia y la deserción escolar, entre otros. Este artículo plantea buscar las causas del problema no solo en el cálculo mismo, sino en la transición del álgebra al cálculo, ya que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, el tratamiento de los signos usados en el cálculo, plantean una ruptura con lo que se hace en álgebra. Es conveniente entonces dejar de creer que hay un paso natural y un desarrollo continuo a partir de los conocimientos algebraicos a los del análisis y centrarnos en el concepto de límite, los obstáculos epistemológicos, el lenguaje, y empezar a atacar dichos obstáculos mediante acciones epistemológicas.

Palabras Claves: aprendizaje, enseñanza, cálculo, comprensión, , ruptura, obstáculo epistemológico.

THE TRANSITION FROM ALGEBRA TO CALCULUS: KEY TO ACHIEVE A MEANINGFUL UNDERSTANDING IN MATHEMATICS.

ABSTRACT

In teaching and learning Calculus are very important problems, indicated by the poor understanding concepts, the deficient hability of reasoning, the constant repitence of the calculus courses, and the scholar desertion. This article proposes to study the causes problem not only in the calculus itself, but also the transition algebra to calculus, because the lenguage, the reasoning, the logic, the signs meaning, make an epistemological rupture with the traditional scholar algebra treatment. Then it isn´t pertinent suppose that there is a natural transition and a continuos development from the algebraic knowledge to the calculus domain, and focus on limit concept, learning epistemological obstacles of the calculus and lenguage, and begin to trascend that obstacles by the way of epistemological pedagogic actions.

-Key Words : **learning, understanding, teaching, calculus, epistemological obstacle.**

...Si la ruptura numérico/algebraico se identificó de forma clara en las investigaciones sobre la comprensión del álgebra, la ruptura álgebra-cálculo, por el contrario, se ha trabajado muy poco hasta el presente en las investigaciones sobre la comprensión del cálculo. [*1*], ***p. 115, 1996***

INTRODUCCIÓN

Uno de los fines de la Ingeniería en la Universidad Distrital es formar un profesional sólido en el conocimiento de su disciplina; la formación matemática emerge en el plan de estudios de su formación básica, para proporcionarle rigor en los razonamientos, fundamentos lógicos en la toma de decisiones; bases para plantear y resolver problemas, y una disciplina en la forma de razonar que lo conduzcan a la autonomía y a la independencia cognitiva. Sin embargo, a lo largo de 15 años de

La formación matemática emerge en el plan de estudios de su formación básica, para proporcionarle rigor en los razonamientos.

trabajo pedagógico con estudiantes de grado 11 y con estudiantes de primeros semestres de Matemáticas y de Ingeniería de diversas Universidades, oficiales y privadas, he logrado evidenciar los problemas que estos estudiantes viven con el cálculo: mortalidad académica, repitencia, pruebas de suficiencia, validaciones; a muchos hasta les cuesta salir de la Universidad, o el "grado" en el caso de la educación media. Por otra parte, lo que se encuentra en el escenario propio del cálculo, es ***incomprensión*** de los conceptos, mal manejo de los ***razonamientos,*** aparte de una no muy sólida competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas, y por parte de los profesores la frustración causada por la certeza de que no nos han comprendido, porque en el fondo, no hemos conducido a aprendizajes significativos a los alumnos. Es decir, el cálculo es un fuerte "dolor de cabeza", es una piedra en el zapato", es un "talón de Aquiles", en el ámbito de la educación matemática, en el camino del desarrollo del pensamiento, en el camino del aprendizaje y de la enseñanza.

De otro lado, la historia del cálculo nos muestra que incluso los grandes creadores (Newton-Leibniz) sufrieron de titubeos, y que aunque solucionaban problemas, los fundamentos del nuevo cálculo descansaban sobre bases deleznables, débiles, muy débiles, al punto que un obispo: ***Berkeley***, en su conocido opúsculo ***The Analyst***, [16] acierta al señalar algunos puntos particularmente oscuros en el cálculo de estos dos grandes. Para ampliar este episodio, remito al lector en la bibliografía a otros tres escritos sobre el tema.[2], [3], [4]. Entonces cabe la pregunta: Si a los grandes les costó trabajo, no es de esperar que a nuestros alumnos también? Y la historia de la ciencia en general, y de la matemática en particular, nos muestra además dos aspectos importantes: El primero, que en la historia de los conceptos, el ***status operacional y dinámico*** se da primero, antes que el ***status esructural*** y ***estático*** (vuelve como ejemplo la historia del cálculo infinitesimal); en otras palabras, el rigor y la axiomatización es el último paso en el proceso de construcción del conocimiento, y que en el aprendizaje individual sucede lo mismo.
El segundo, que así como se presentan a nivel histórico ***rupturas epistemológicas*** en la construcción de los conocimientos científicos, en los individuos también tienen lugar rupturas durante los procesos de desequilibración y re-equilibración que supone el aprendizaje del conocimiento científico en cualquiera de sus vertientes.

Este escrito pone de manifiesto que la investigación en el paso del álgebra al cálculo es pertinente y fundamental en el ámbito del aprendizaje del cálculo

Por tanto, además de vivenciar a diario los problemas señalados, he estudiado profundamente el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz, y sobre todo la crítica de Berkeley, siempre con la inquietud de encontrar en esta controversia y polémica, elementos de aplicación en el campo de la enseñanza del cálculo. Frente a esta polémica deseo señalar dos cosas más: Primero, que la evidencia de los problemas enunciados es tan fuerte que ha desencadenado en diferentes partes del mundo: Francia, Estados Unidos, Mejico, ...[5], [6], reformas e innovaciones curriculares, fruto de la pregunta: Se debe enseñar cálculo en la educación media? , en la preparatoria?, en el college? Y si la respuesta es afirmativa, De qué manera?, con qué grado de rigor? De manera intuitiva o formal? Y segundo, que basta echar una mirada a los Handbooks, [7], a las investigaciones actuales de Educación Matemática en Francia, E.U, Méjico, [8], [9], [10], a los reportes de investigación presentadas en la última RELME *"Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa"*, [11], para darse cuenta de lo actual y presente de las investigaciones didácticas en el campo del cálculo.

La cita con la que empiezo este escrito pone de manifiesto que la investigación en el paso del álgebra al cálculo es pertinente y fundamental en el ámbito del aprendizaje del cálculo y que el hecho de no existir actualmente en nuestro medio este tipo de investigaciones, la hace aún más pertinente y significativa.

DESARROLLO

Puedo señalar en este momento que la enseñanza del cálculo que tradicionalmente tiene lugar en grado 11 y en primeros semestres de Universidad, no está conduciendo a los estudiantes a aprendizajes significativos: los cursos se desarrollan en forma mecánica y el trabajo descansa en lo puramente algorítmico y en el álgebra, sin alcanzar una comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo. Ah! pero este problema no es sólo nuestro. En particular, los artículos [3] y [4] señalados en la bibliografía, nos muestran los resultados de estudios recientes realizados con estudiantes de college, de cursos terminales y de primeros semestres de Universidad, que dejan ver los problemas conceptuales que se presentan con las nociones del cálculo y por lo tanto en su posterior desarrollo. Es que como bien lo afirman los investigadores y la comunidad académica, [12], [13] , esta problemática es universal, y no importa que la discusión se desarrolle en otras partes del mundo, sus problemas y viscisitudes son nuestros problemas y viscisitudes y ya es hora de discutir, debatir e investigar sobre esta problemática y aportar a la comunidad académica y educativa nacional e internacional, y sobre todo, de aliviar en algún grado, este problema que aqueja a estudiantes de todos los cursos, de todos los semestres, de todas partes del mundo, de todas las universidades, de muchas carreras.

Entonces, tenemos un problema en esta área de la educación matemática: en la enseñanza y en el aprendizaje del cálculo se presentan situaciones que explican las dificultades enunciadas al comienzo de este escrito. Propongo categorizarlas así: Hay problemas de tipo ***teórico***; otros que tienen que ver puramente con el ***concepto de límite***; unos que tratan de la ***ruptura***, del paso del álgebra al cálculo, los hay de tipo ***didáctico***, de tipo ***semántico*** y también de tipo ***cognoscitivo***, entre otros.

Todas estas, las podemos acomodar en tres categorías, siguiendo de cerca de Sierpinska en [14] y [15]

- La psicológica,
- La epistemológica, y
- La semántica.

Yo me voy a referir y a centrar en las dos últimas: Entonces profundizaré en lo que he llamado problemas de tipo teórico, en las que tienen que ver con la conceptualización de la noción de límite, y en el paso del álgebra al cálculo.

DESCRIPCION DE LA PROPUESTA

Bien! Entremos en la primera categoría: ***Problemas de tipo teórico.*** Preguntémonos: Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? O una más elemental que se relaciona con la anterior: Sobre qué predica el cálculo? Qué requiero para acceder al cálculo? Y en la búsqueda de respuestas posibles a estas preguntas, nos encontramos con entidades como: ***funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades***, entre otras, es decir conceptos que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización, pues por ejemplo, las funciones en el algebra se manejan muy dependientes de su representación gráfica o tabular, o de los procesos que las engendran, y ahora debe trabajarlas como entes conceptuales sobre las cuales va a aplicar nuevos conceptos: Este tema de funciones tiene su propio campo de estudio y es él mismo un núcleo de investigación en educación matemática en nuestro país y en países vanguardistas en estas temáticas.

Aquí hay que destacar el doble status de los objetos matemáticos: el operacional (dinámico) y el estructural (estático). En la historia de los conceptos, el primer status precede al segundo, aunque luego se vuelve un proceso dialéctico, y las investigaciones realizadas [5] , muestran que en la comprensión individual sucede lo mismo. A ese salto cualitativo, que se refiere al paso de una concepción en un status dinámico a un status estructural se le ha denominado ***"encapsulación"*** o "***reificación***. D. Tall ha denominado "***proceptual***" al carácter de las nociones matemáticas que representa a la vez los objetos y los procesos: Aquí se presenta un problema: esa flexibilidad es condición necesaria en la comprensión del cálculo, pero a la vez se evidencia la dificultad que hay para desarrollar individualmente tal flexibilidad.

Esa flexibilidad es condición necesaria en la comprensión del cálculo, pero a la vez se evidencia la dificultad que hay para desarrollar individualmente tal flexibilidad.

- En cuanto a los Números Reales: Será que los estudiantes tienen una clara diferencia de los diferentes referentes numéricos? Algunas investigaciones muestran la tendencia a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora. Entonces en ese estadio, los Números Decimales son iguales a los Números Reales? Otras investigaciones han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de college y de primeros semestres de universidad, como que entre 3,25 y 3,26 no hay ningún número , o que 3,138 es mayor que 3,4, lo cual muestra la complejidad de estos referentes. No es difícil hacer un sondeo entre nuestros estudiantes para confirmar que adolecen de los mismos vacíos conceptuales repecto a estos refrentes.

Para abordar el segundo problema tomaré una idea de David Tall, [2] ,quien afirma que si ***bien es el concepto de función el núcleo y centro de la matemática moderna***, es el concepto de límite el que significa un paso a un plano más avanzado de pensamiento matemático, y el jalonador de procesos de ***desarrollo del pensamiento***, y sabemos bien que el concepto de límite no sólo es fundamental en la historia y evolución del cálculo, sino que lo es también en la enseñanza del mismo. El ***límite*** aparece en variados contextos matemáticos: de sucesiones, de series, de funciones, en la noción de continuidad, de diferencial, de integral; es pertinente entonces diferenciar entre estos tipos de límites: por ejemplo el carácter discreto del límite de una sucesión *(An) cuando n* ∞ y el carácter continuo del límite de una función *f(c)* cuando *c - · a,* categorías que han de tenerse claras para ganarle a las dificultades, inherentes que conlleva el concepto de límite. Hay algunas justificaciones interesantes de los estudiantes respecto a los límites. Por ejemplo el hecho de que el límite de la sucesión *0.9, 0.99, 0.999,*...debe ser menor que *1*; que 0.9, 0.99, 0.999 no tiende a 1 pero tiene límite 1 (porque tiende a tener la propiedad de 0.9999 que nunca puede pasar del límite 1). Estas ideas que se han catalogado como el ***Principio de Continuidad (Leibniz)*** o el "**generic limit property**', que consiste en creer que cualquier propiedad común a todos los términos de una sucesión también la tiene el límite.

Pero las dificultades que conlleva el concepto de límite tienen varias connotaciones. Pensemos en una de tipo lingüístico: La palabra límite, en el lenguaje cotidiano tiene en general significados que no favorecen la idea matemática: es algo que nunca puede ser alcanzado; el último término de un proceso, etc., nociones que refuerzan concepciones erradas del concepto matemático. Pero aparte de la palabra, está la idea: a más de lo lingüístico está lo epistemológico, es decir, las ideas que esas palabras evocan, que tiene sus orígenes en experiencias tempranas: preconcepciones de las representaciones de las palabras. Para estudiar estas dificultades inherentes al concepto de límite es preciso remitirnos al concepto de "***Obstáculo epistemológico***" introducido por G. ***Bachelard***, concepto que en el campo de la educación matemática apenas empieza a estudiarse y muy raramente se ha trabajado fuera de Francia, según la consulta bibliográfica rastreada hasta el momento. Sierpinska [12] [13] clasifica los obstáculos epistemológicos en cinco categorías:

- El rechazo al status operacional que permite el paso al límite,
- El referente al Principio de Continuidad,
- Los obstáculos relacionados con la noción de función,
- Los obstáculos geométricos,
- Los obstáculos lógicos, y
- Los obstáculos simbólicos.

Y de hecho existen obstáculos en matemáticas: el paso de los números positivos a los números negativos, el concebir una suma menor que los sumandos, el paso de lo discreto a lo continuo (distinción sutil entre radián y grado). ***Se trata entonces de estudiar en nuestro contexto estos obstáculos epistemológicos, a partir del trabajo de Sierpinska, pues dichos obstáculos han de atacarse mediante actos epistemológicos.***

Y abordemos ahora la última categoría: el paso del álgebra al cálculo, o más bien la ***RUPTURA Algebra-Cálculo***, diría yo, pues el tratamiento, los razonamientos, la alternancia de cuantificadores, las aproximaciones, el simbolismo, rompen con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores. Michéle Artigue, parte del equipo investigador francés que va a la vanguardia en Ingeniería Didáctica y Educación Matemática, afirma que generalmente se han atacado los problemas de incomprensión del cálculo con reformas e innovaciones al interior del cálculo mismo, sin estudiar todo ese proceso que le antecede, y propone centrarse allí, para emprender una investigación que se ubique en la Transición Algebra-Cálculo, postulando que no existe un paso natural del álgebra al cálculo, que no existe un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino que se da un desarrollo caótico: **una ruptura**, frente a la cual se debe emprender una investigación, con la esperanza de lograr resultados que conduzcan a una comprensión significativa de los conceptos de esta rama de la matemática. Al acceder al cálculo en general, lo que se encuentra es incomprensión de los conceptos, mal manejo de los algoritmos, mal manejo de los razonamientos, aparte de una no muy sólida competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas, ó, un estudio basado en lo

Al acceder al cálculo en general, lo que se encuentra es incomprensión de los conceptos, mal manejo de los algoritmos, mal manejo de los razonamientos.

puramente algorítmico y en las competencias algebraicas, sin alcanzar una comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo. Y si bien es cierto que el cálculo se apoya fuertemente en el álgebra y que, históricamente el desarrollo del cálculo tuvo lugar sobre un avanzado desarrollo del álgebra , al mismo tiempo es un dominio donde se necesita de una ruptura con una cierta cantidad de prácticas algebraicas para acceder a él ,y otro nivel de comprensión de las mismas. Veamos un ejemplo:

En el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura $a(x) = b(x)$ en una sucesión de escrituras $ai(x)=bi(x)$ hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Mientras que en el cálculo, se hace un encaje con la proposición $\forall \in >0, |a-b| <. \in$ Lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar que en la vecindad de un punto a, $f(x) < g(x)$, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante aproximaciones y estimaciones. ***<u>Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.</u>*** Lo que nos permite ver que en efecto hay rupturas: En el razonamiento, en el tratamiento de la igualdad, en el lenguaje, en el simbolismo, en las demostraciones, entre otras.

Hasta aquí he enunciado las tres dificultades principales en la comprensión del cálculo:

1. Las vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos.

2. Las que se refieren a la complejidad de los objetos básicos del cálculo (funciones, números reales, ...).
La tercera, tiene que ver con la conceptualización de la noción de límite, que no sólo es fundamental en la historia del cálculo, sino que lo es también en la comprensión del mismo.

Se ha de plantear nuestra posición como Universidad, fruto del debate y la reflexión en la comunidad académica educativa del país, acerca de la pertinencia del cálculo en la educación media, y de su tratamiento en cuanto a formal y/o intuitivo.

CONCLUSIONES

Todo lo hasta aquí planteado deja tres vertientes o espacios abiertos, respecto a los problemas a estudiar y a las propuestas que ellos han de generar.

¨Se propone hacer una revisión bibliográfica que vaya hasta un estado del arte en el tema propuesto, con base en la bibliografía que aparece al final de este proyecto.
¨Se ha de abordar el problema planteado de la ruptura álgebra-cálculo implicando en éste los problemas que he catalogado como teóricos y epistemológicos, en particular los denominados obstáculos epistemológicos a la luz de los trabajos de Sierpinska y Brosseau, para tener un estudio real de nuestro propio medio y contexto.
¨Se ha de plantear nuestra posición como Universidad, fruto del debate y la reflexión en la comunidad académica educativa del país, acerca de la pertinencia del cálculo en la educación media, y de su tratamiento en cuanto a formal y/o intuitivo.

De cada una de esas tres vertientes han de brotar propuestas: Didácticas, Curriculares, Epistemológicas

Es decir, además de gestar una propuesta pedagógica y didáctica, gestar otra de tipo curricular con todo lo que ello implica.Por otro lado, puedo enunciar algunos temas que propongo hagan parte de la docencia y la investigación en nuestra Facultad y que vayan aportando a los problemas que a diario vivimos estudiantes y maestros con el cálculo y las matemáticas:

·*Ruptura Algebra-Cálculo*: Problemas teóricos y epistemológicos. (Hasta un Estado del Arte a nivel nacional e internacional de la investigación en esta temática.

- ***El concepto de límite como jalonador del desarrollo del pensamiento avanzado.***
- ***Núcleos puntuales de investigación: Función, Límite, Infinito.***
- ***De lo discreto a lo continuo y de otras rupturas en matemáticas.***
- ***Implicaciones Didácticas de la Historia de la Matemática.***
- ***Fundamentos del Cálculo: Problemas Cognitivos, Epistemológicos y Didácticos.***
- ***Hacia un pensamiento matemático avanzado: Funciones, Límites, Infinito y Demostración.***

Aunque la propuesta aquí presentada no constituye aún un proyecto de investigación institucional, sí se han emprendido algunas acciones para su desarrollo; por ejemplo se tienen avances en el estado del arte del tema en la revisión bibliográfica, dado que la gran mayoría de los textos citados se encuentran en inglés o en francés, lo cual requiere de un trabajo adicional de traducción para entender fielmente los planteamientos de los investigadores. Traducciones que además han de enriquecer la biblioteca de la comunidad académica. Otros avances, fruto de los cursos de Matemática I y Laboratorio que he asumido en los más recientes semestres en Ingeniería de Sistemas, con la suerte de poder contrastar grupos paralelos de primer semestre y de repitentes, ambos de Matemática I, con los cuales se ha podido confirmar las teorías de Brousseau y Sierpinska acerca de los obstáculos epistemológicos del cálculo y de las matemáticas. Las pruebas de entrada, las evaluaciones periódicas y algunos test aplicados muestran que en efecto "aprendemos mal", tanto en Educación media, como en la Universidad, los conceptos jalonadores del desarrollo del pensamiento y básicos en el aprendizaje del cálculo. Confirmamos que tenemos problemas cognitivos, didácticos y epistemológicos. El trabajo que debemos emprender ahora es de dise'ño curricular de todo nuestro pénsum de matemáticas, en el sentido amplio de currículo que implica objetivos de enseñanza, objetivos de aprendizaje, enfoques pedagógicos, estrategias metodológicas, nivel de complejidad del conocimiento a ensenar, desarrollo de competencias básicas para trascender esos obstáculos epistemológicos, que a decir de los investigadores en educación matemática, se han de atacar mediante acciones epistemológicas.

REFERENCIAS

[1] *Artigué, Michele. La Enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognoscitivos y didácticos. En "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática", pp. 97-135. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. 1995. Viii + 140 pp. Una Empresa Docente. Pedro Gómez, editor.*

[2] *Tall, David. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. Pp. 495-510.en: "Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning", Mac Millan Publishing Company, New York, 1993. 1a. Edición. Xi + 771 pp.*

[3] *Ferrery-Mundy, Joan e Guadard, Marie. Secundary School Calculus: Preparation or Pitfall in the study of college calculus. En "Journal of Research in Mathematics Education". 1992. Vol. 23. No. 1, pp.56-71.*

[4] *Williams, Steven. Models of Limit held by College Calculus Students. En "Journal of research in Mathematics Education", 1991, Vol 22. No.3,pp.219-236.*

[5] *Moreno Armella, Luis. En torno a las nociones de número y variación. Pp. 189-204. En "Mathesis", Vol. VII, No. 2, 1991.*

[6] *Grattan-Guinnes, Ivor. Qué es y qué debería ser el cálculo? En "Mathesis", vol VII, No. 2, 1991, No. 3, pp. 363.*

[7]. *Kilpatrick, Jeremy. A History of Research in Mathematics Education. Pp. 3-38. En Handbook or Research on Mathematics Teaching and Learning. Mac Millan Publishing Company, New York, 1992. 1a. edición, xi + 771 pp.*

[8] *Vergnaud, Gerard. Algunas orientaciones teóricas y metodológicas de las investigaciones francesas en didáctica de las matemáticas. Pp. 155-166. En "Módulo Educación Matemática" serie Educación Matemática, #1, 1995, 365 pp.*

[9] *Brousseau, Guy. Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Pp 264-326.En "Módulo Educación Matemática", # 1, 1995. 365 pp.*

[10]. *Acevedo Myriam y García Gloria. Panorama de la Educación Matemática: Escuelas y Tendencias. En "Educación y Cultura, #40. Colombia, Mayo de 1996.*

[11] *Brousseau, 1983. Les Obstacules épistemologiques et les problémes en mathéatiques. Researches en Didactique des Mathematiques, 2(3). 303-346.*

[12]. *Sierpinska, 1988. Sur un programme dee reserche lié á la notion d' obstacle épistemológique. Actes de Colloque:Construction des savoirs: obstacles et conflicts. Montreal, CIRADE.*

[13] *Sierpinska, Obstacles épistemologiques relatifs a la notion d'limite. Researchs en Didactique des Mathématiques, 6 (1), 5-67.*

[14] *Neira, Gloria. Crítica de Berkeley al Cálculo de Newton. XI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.*

[15] *Neira, Gloria. The Analyst de Berkeley: Crítica al Método de las Fluxiones de Newton. Tesis de Magister, Universidad Nacional. 1990.*

[16] *Neira, Gloria. El Analista de George Berkeley. Traducción, prólogo y comentarios. FODUN, Disponible a partir de Junio de 1998.*

[17] *Moschkovich, Shoenfeld y Arcavi. Aspectos de la Comprensión: perspectivas y representaciones múltiples de relaciones lineales y conexiones entre ellas.*

[18] *Gómez, Pedro. Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. 1996, Revista EMA, Vol. I, No. 2, 97 114.*

Gloria Ines Neira Sanabria.
Licenciada en Matemáticas Universidad Pedagógica Nacional - Magíster Scientiae en Matemáticas Universidad Nacional de Colombia - Maestría en Docencia Universitaria Universidad de La Salle - Profesora Facultad de Ingeniería Universidad Distrital - Correo Electrónico: gneira@ uniandes.edu.co