

# MÉTODO ANOVA UTILIZADO PARA REALIZAR EL ESTUDIO DE REPETIBILIDAD Y REPRODUCIBILIDAD DENTRO DEL CONTROL DE CALIDAD DE UN SISTEMA DE MEDICIÓN

**ANOVA's method used to develop the study of repeatability and reproducibility inside of measure system.**

## RESUMEN

En este artículo se desarrolla paso a paso el método Anova utilizado para realizar el estudio de repetibilidad y reproducibilidad dentro de cualquier sistema de medición. Para ilustrar de una manera más clara la forma de realizar este estudio se hacen dos ejemplos de diferentes procesos en los cuales se utiliza el método mencionado.

**PALABRAS CLAVES:** Repetibilidad y reproducibilidad, varianza.

## ABSTRACT:

*In the present article is developing step by step the Anova's method used in the study of repeatability and reproducibility inside of any measure system. For a simple illustration of the way of how it has become, are introducing two different examples when this procedure was applied.*

**KEYWORDS:** repeatability and reproducibility, variance.

## MARCELA BOTERO ARBELÁEZ

Ingeniero Electricista  
Profesor Asistente  
Universidad Tecnológica de Pereira  
maboar@utp.edu.co

## OSIEL ARBELÁEZ SALAZAR

Ingeniero en Control Electrónico e Instrumentación  
Profesor Asistente  
Universidad Tecnológica de Pereira  
osiel@utp.edu.co

## JAIRO A. MENDOZA VARGAS

Ingeniero Electricista, M.Sc  
Profesor Asistente  
Universidad Tecnológica de Pereira  
jam@utp.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

Cualquier tipo de proceso requiere dentro de su organización un sistema de medición apropiado que permita medir la calidad de las características de los productos que se fabrican.

Un sistema de medición está formado por el instrumento con el cual se mide y por las personas que lo utilizan. Tanto los operadores como el instrumento de medida producen dentro del sistema de medición dos tipos de variaciones: unas que se deben al azar y que son imposibles de eliminar y otras que se producen generalmente por descuido o accidente dentro del proceso y que pueden ser corregidas una vez que se detectan.

El estudio de repetibilidad y reproducibilidad (r&R) permite calcular la variabilidad dentro de cualquier tipo de proceso y determinar si esta variación es aceptable o no.

Existen varios métodos para realizar el estudio r&R, pero el método ANOVA es el más exacto para calcular la variabilidad dentro de un proceso.

## 2. CONTENIDO

**2.1 DEFINICIONES:** Los conceptos centrales para el estudio r&R son la repetibilidad y la reproducibilidad, dentro de un sistema de medición, el significado de estos parámetros de acuerdo con [1] es el siguiente:

**2.1.1 Repetibilidad:** Esta variación se presenta cuando el mismo instrumento es utilizado por una persona al

medir repetidas veces la misma parte, es decir, es la variación de las lecturas individuales que se han repetido con el mismo instrumento y la misma persona.

**2.1.2 Reproducibilidad:** Se refiere a la variación observada entre los promedios de varios operadores, cuando cada operador realiza varias lecturas sobre la misma parte y usando el mismo instrumento.

**2.1.3 Varianza:** La varianza de los datos que se obtienen al realizar una medición, es un estimador de la dispersión que existe entre la característica de calidad medida y su promedio.

## 2.2. ESTUDIO DE REPETIBILIDAD Y REPRODUCIBILIDAD:

El estudio de repetibilidad y reproducibilidad debe iniciarse realizando un experimento diseñado estadísticamente; cualquier tipo de experimento desarrollado dentro de un proceso debe contener dos elementos:

- Partes o unidades del producto las cuales son seleccionadas por medio de un muestreo aleatorio.
- Cierta número de operadores que se seleccionan aleatoriamente, estos operadores son los encargados de realizar las mediciones sobre las partes varias veces.

Una vez realizado el experimento y se tienen todas las medidas de la característica de interés se procede a calcular la variabilidad del proceso utilizando el método Anova (Análisis de varianza).

**2.2.1 Método de Análisis de Varianza (ANOVA):** El método Anova, conocido también como análisis de varianza es el método más exacto para calcular la variabilidad de un sistema de medición porque posee la ventaja de cuantificar la variación debida a la interacción entre los operadores y las partes. Este método está basado en la misma técnica estadística utilizada para analizar los efectos de los diferentes factores en el diseño de experimentos.

Para un sistema de medición, el método Anova debe realizarse para estudiar simultáneamente los efectos de dos fuentes de variación: Operadores y Partes.

La Tabla de Anova para un sistema de medición es la que se muestra en la Tabla 1.

Fuente de variación	Suma cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios
Operador	SSA	$a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{a - 1}$
Partes	SSB	$b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{b - 1}$
Interacción	SSAB	$(a - 1)(b - 1)$	$MSAB = \frac{SSAB}{(a - 1)(b - 1)}$
Error	SSE	$ab(n - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{ab(n - 1)}$
Total	SST	$N - 1$	

Tabla 1. Anova para un sistema de medición con dos factores [3]

donde:  $a$  es el número de operadores  
 $b$  es el número de partes  
 $n$  es el número de medidas para cada parte por cada operador  
 $N$  es el número total de datos

Los pasos que se deben seguir para realizar la tabla del Anova de dos factores son [2]:

1. Se calcula la suma total de todos los datos, como lo muestra la ecuación 1.

$$T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n x_{ijk} \quad (1)$$

donde  $x_{ijk}$  son cada uno de los datos del experimento.

2. Se calcula la suma del cuadrado de todos los datos por medio de la ecuación 2.

$$T_x^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n x_{ijk}^2 \quad (2)$$

donde  $x_{ijk}$  son cada uno de los datos del experimento.

3. Se calcula la suma de los cuadrados totales de las combinaciones de factores dividido por el tamaño muestral respectivo como lo muestra la ecuación 3.

$$T_c^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b T_{ij}^2 \quad (3)$$

donde  $T_{ij}$  es la suma de los datos de cada por cada operador.

4. Se calcula la suma de los totales para el factor 1 (Operadores) y se divide por su espacio muestral respectivo por medio de la ecuación 4.

$$T_1^2 = \frac{1}{bn} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n T_{jk}^2 \quad (4)$$

donde  $T_{jk}$  es la suma de los datos de cada operador.

5. Se calcula la suma de los totales para el factor 2 (Partes) y se divide por su tamaño muestral respectivo por medio de la ecuación 5.

$$T_2^2 = \frac{1}{an} \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n T_{ik}^2 \quad (5)$$

donde  $T_{ik}$  es la suma de los datos para cada parte.

6. Se calculan las sumas de los cuadrados necesarias por medio de las ecuaciones (6), (7), (8), (9) y (10).

$$SSA = T_1^2 - \frac{T^2}{N} \quad (6)$$

$$SSB = T_2^2 - \frac{T^2}{N} \quad (7)$$

$$SSAB = T_c^2 + \frac{T^2}{N} - T_1^2 - T_2^2 \quad (8)$$

$$SSE = T_x^2 - T_c^2 \quad (9)$$

$$SST = T_x^2 - \frac{T^2}{N} \quad (10)$$

Después de obtener la Tabla del Anova, se procede a calcular la variación del sistema de medida, siguiendo los siguientes pasos:

1. La repetibilidad del sistema de medida [3] está dada por la ecuación 11.

$$r = 5,15\sqrt{MSE} \quad (11)$$

2. El porcentaje de repetibilidad se calcula por medio de la ecuación 12.

$$\%r = \frac{r}{T} \times 100\% \quad (12)$$

donde  $T$  es la tolerancia de la característica medida.

3. La reproducibilidad del sistema de medida [3] está dada por la ecuación 13.

$$R = 5,15 \sqrt{\frac{MSA - MSAB}{bn}} \quad (13)$$

Nota: Si en algún caso el término de la raíz es un número negativo, entonces la reproducibilidad es cero.

4. El porcentaje de reproducibilidad se calcula por medio de la ecuación 14.

$$\%R = \frac{R}{T} \times 100\% \quad (14)$$

donde  $T$  es la tolerancia de la característica medida.

5. La interacción entre los operadores y las partes [3] se calcula por medio de la ecuación 15.

$$I = 5,15 \sqrt{\frac{MSAB - MSE}{n}} \quad (15)$$

Nota: Si en algún caso el término de la raíz es un número negativo, la interacción entre operadores y partes es cero.

6. El porcentaje de la interacción entre los operadores y las partes se calcula por medio de la ecuación (16).

$$\%I = \frac{I}{T} \times 100\% \quad (16)$$

donde  $T$  es la tolerancia de la característica medida.

7. La relación entre la repetibilidad y la reproducibilidad está dada por la ecuación 17.

$$r \& R = \sqrt{(r)^2 + (R)^2 + I^2} \quad (17)$$

8. El porcentaje de la relación entre la repetibilidad y la reproducibilidad [3] está dada por la ecuación 18.

$$\%r \& R = \sqrt{(\%r)^2 + (\%R)^2 + (\%I)^2} \quad (18)$$

9. Se interpretan los resultados aplicando los siguientes criterios [4]:

- Si  $\%r \& R < 10\%$  el sistema de medición es aceptable.
- Si  $10\% \leq \%r \& R < 30\%$  el sistema de medición puede ser aceptable según su uso, aplicación, costo del instrumento de medición, costo de reparación.
- Si  $\%r \& R > 30\%$  el sistema de medición es considerado como no aceptable y requiere de mejoras en cuanto al operador, equipo, método, condiciones, etc.

*Ejemplo 1:* En la Tabla 2 se tienen los datos del diámetro (en centímetros) de diez roscas fabricadas en un proceso industrial para cierto tipo de tornillo, estos datos fueron tomados por tres operadores con un mismo instrumento, repitiendo la medida dos veces. Si la tolerancia para este diámetro es de 4 cm, calcule el porcentaje de repetibilidad y reproducibilidad  $\%r \& R$  utilizando el método Anova y diga si este sistema de medición es o no es aceptable.

Parte - Muestra	Operador A		Operador B		Operador C	
	1	2	1	2	1	2
1	0.65	0.60	0.55	0.55	0.50	0.55
2	1.00	1.00	1.05	0.95	1.05	1.00
3	0.85	0.80	0.80	0.75	0.80	0.80
4	0.85	0.95	0.80	0.75	0.80	0.80
5	0.55	0.45	0.40	0.40	0.45	0.50
6	1.00	1.00	1.00	1.05	1.00	1.05
7	0.95	0.95	0.95	0.90	0.95	0.95
8	0.85	0.8	0.75	0.70	0.80	0.80
9	1.00	1.00	1.00	0.95	1.05	1.05
10	0.60	0.70	0.55	0.50	0.85	0.80

Tabla 2. Datos del Diámetro de las roscas en centímetros para el Ejemplo 1 [4]

*Solución:* Utilizando las ecuaciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, se obtienen los valores necesarios para realizar la Tabla de Anova:

$$T = 48,45$$

$$T_x^2 = 41,37$$

$$T_c^2 = 41,33$$

$$T_1^2 = 39,17$$

$$T_2^2 = 41,18$$

$$SSA = 0,048$$

$$SSB = 2,06$$

$$SSAB = 0,10$$

$$SSE = 0,039$$

$$\% r \& R = 86,35\%$$

Los datos del Anova para el Ejemplo 1 se encuentran en la Tabla 3.

Fuente de variación	Suma cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios
Operador	0,048	2	0,024
Partes	2,06	9	0,23
Interacción	0,10	18	0,006
Error	0,04	30	0,001
Total	2,25	59	

Tabla 3. Tabla de Anova para el Ejemplo 1

Utilizando los valores de la Tabla 3 y las ecuaciones 11, 13 y 15, se tiene que la repetibilidad, la reproducibilidad y la interacción entre operadores y partes son:

$$r = 0,19 \text{ cm}$$

$$R = 0,16 \text{ cm}$$

$$I = 0,24 \text{ cm}$$

Utilizando las ecuaciones 12, 14 y 16, para expresar la repetibilidad, la reproducibilidad y la interacción entre operadores y partes en porcentaje, se tiene:

$$\% r = 47,5\%$$

$$R = 40\%$$

$$I = 60\%$$

Utilizando la ecuación 17, se tiene que la relación entre la repetibilidad y reproducibilidad es:

$$r \& R = 0,34$$

Utilizando la ecuación 18, se tiene que la relación entre la repetibilidad y la reproducibilidad en porcentaje es:

Al interpretar los resultados obtenidos utilizando los criterios de aceptación descritos anteriormente, se observa que el porcentaje de la relación entre la repetibilidad y la reproducibilidad es mayor al 30%, ( $\% r \& R > 30\%$ ) esto significa que el sistema de medición no es aceptable para este proceso y que deben buscarse alternativas dentro del mismo para mejorarlo.

*Ejemplo 2:* Un fabricante de anillos para cierta clase de motor, desea realizar un estudio de repetibilidad y reproducibilidad para saber si su proceso de fabricación es o no es aceptable. Para la realización de este estudio dos operadores midieron cinco veces los diámetros de tres anillos y los datos obtenidos son los que se encuentran en la Tabla 4.

La tolerancia de la característica de interés para este estudio es de 0,6 cm.

Parte-Muestra	Operador A			Operador B		
	1	2	3	1	2	3
1	0,57	0,58	0,58	0,57	0,56	0,58
2	0,58	0,58	0,56	0,57	0,58	0,58
3	0,56	0,58	0,57	0,59	0,57	0,58

Tabla 4. Datos en centímetros del diámetro de los anillos del Ejemplo 2

*Solución:* Utilizando las ecuaciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, se obtienen los valores necesarios para realizar la Tabla de Anova:

$$T = 10,34$$

$$T_x^2 = 5,941$$

$$T_c^2 = 5,94$$

$$T_1^2 = 5,94$$

$$T_2^2 = 5,94$$

$$SSA = 0,00022$$

$$SSB = 0,00022$$

$$SSAB = 0,00024$$

$$SSE = 0,001$$

Los datos del Anova para el Ejemplo 2 se encuentran en la Tabla 5.

Fuente de variación	Suma cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados medios
Operador	0,000022	1	0,00022
Partes	0,000022	2	0,00011
Interacción	0,00024	2	0,00012
Error	0,001	12	0,000083
Total	0,00168	17	

Tabla 5. Tabla de Anova para el Ejemplo 2

Utilizando los valores de la Tabla 5 y las ecuaciones 11, 13 y 15, se tiene que la repetibilidad, la reproducibilidad y la interacción entre operadores y partes son:

$$r = 0,047$$

$$R = 0,017$$

$$I = 0,018$$

Utilizando las ecuaciones 12, 14 y 16, para expresar la repetibilidad, la reproducibilidad y la interacción entre operadores y partes en porcentaje, se tiene:

$$\% r = 7,8\%$$

$$R = 2,8\%$$

$$I = 3\%$$

Utilizando la ecuación 17, se tiene que la relación entre la repetibilidad y reproducibilidad es:

$$r \& R = 0,053$$

Utilizando la ecuación 18, se tiene que la relación entre la repetibilidad y la reproducibilidad en porcentaje es:

$$\% r \& R = 8,8\%$$

Al interpretar los resultados obtenidos utilizando los criterios de aceptación descritos anteriormente, se observa que el porcentaje de la relación entre la repetibilidad y la reproducibilidad es menor al 10% ( $\% r \& R < 10\%$ ), esto significa que el sistema de medición es aceptable.

### 3. CONCLUSIONES

En cualquier tipo de proceso un estudio de repetibilidad y reproducibilidad sirve para calcular su variabilidad y detectar cuando éste se encuentra funcionando en condiciones anormales, de esta manera, se pueden buscar estrategias correctivas que le permitan al proceso volver a trabajar en condiciones normales.

El método Anova es el método más exacto cuando se quiere calcular la variabilidad de un proceso puesto que éste es el único método que tiene en cuenta la variabilidad que se presenta por la interacción entre los operadores y las partes.

Cuando la reproducibilidad es mucho mayor a la repetibilidad, esto indica que es necesario entrenar al operador tanto en el manejo del instrumento como en la toma de los datos.

Cuando la repetibilidad es mucho mayor a la reproducibilidad esto significa que el instrumento requiere de mantenimiento o que no es el adecuado para realizar dicha medición.

### 4. BIBLIOGRAFÍA

[1] Ingeniería UC. Rivas C., Gerardo A. Escuela de Ingeniería Industrial. Universidad de Carabobo. Bárbula. Valencia. Venezuela. Jefe de la comisión coordinadora. (<http://servicio.cid.uc.edu.ve/ingenieria/revista/a5n2/5-2-2.pdf>).

[2] Bioestadística aplicada a bioquímica y farmacia. Azzimonti Renzo. (<http://www.bioestadistica.freesevers.com/tema20.pdf>).

[3] Engineered Software, Inc. Copyright 1999. ([www.engineeredsoftware.com/pepers/msa\\_rr.pdf](http://www.engineeredsoftware.com/pepers/msa_rr.pdf)).

[4] Tecnológico de Monterrey. (<http://academia.gda.itesm.mx/~mdeluna/control/ryrmetodo.pdf>).