EL TEOREMA DE PALEY-WIENER SOBRE FUNCIONES REALIZABLES.

Paley-Wiener's theorem over realizable functions.

CARLOS A. MORA CEBALLOS
Lic en Matemáticas, Ph.D
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
morac@utp.edu.co

RICARDO LÓPEZ VARONA
Ingeniero Electricista, M.Sc.
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
rilopez@utp.edu.co

RESUMEN

Presentamos una motivación al famoso teorema de Paley-Wiener en el contexto de los sistemas lineales usados en el procesamiento de señales y revisamos temas relativos a la realizabilidad física de sistemas.

PALABRAS CLAVES: Sistemas lineales, teorema de Paley-Wiener, sistema físicamente realizable.

ABSTRACT

We give a motivation to the study of a well known theorem due to Paley and Wiener in the general setting of linear systems used in signal processing. In addition, we go through some topics related to physically realizable systems.

KEYWORDS: *Linear systems, Paley-Wiener theorem, physically realizable system.*

1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de sistemas físicos de gran utilidad en ingeniería y en otros campos hay, entre otros, dos conceptos de gran relevancia: la estabilidad y la realizabilidad física. En el estudio de la estabilidad se consideran condiciones sobre la función de respuesta y su transformada de Fourier, ver, por ejemplo, [4].
En esta nota enfatizaremos aspectos relativos a la realizabilidad física.

1.1 La representación de hechos en la Física Clásica

Tal como lo menciona [3], los fenómenos estudiados en el laboratorio usualmente se describen en términos de relaciones causa-efecto. Un sistema entrada-salida es una descripción matemática de una relación experimental estímulo-respuesta por medio de un sistema dinámico, el cual si es sometido a los mismos estímulos produce la misma respuesta que el objeto experimental.

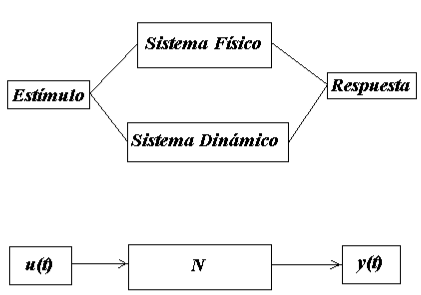

Figura 1

Tal sistema se puede entender como un operador abstracto N que transforma una señal de entrada $u(t)$ en una señal de salida $y(t)$

$$y = N(u)$$

1.1.2 Problemas bien planteados.

Comenzando el siglo XX, Jaques Hadamard definió un problema como mal planteado (*ill posed*) si la solución del problema no existe o no es única o si no es una función continua de los datos, es decir, si no es una función continua de u. Tales problemas son extraordinariamente sensibles a las perturbaciones en las condiciones iniciales, esto es, pequeñas perturbaciones en los datos pueden conducir a perturbaciones arbitrariamente grandes en la respuesta y. La teoría clásica de ecuaciones diferenciales parciales trata casi exclusivamente con problemas bien planteados.

Para enfatizar: de acuerdo con la definición de Hadamard un problema es **bien planteado** si:

1 el problema tiene solución,
2 la solución es única, y
3 la solución depende continuamente de los datos iniciales.

Fecha de Recepción: 31 Mayo de 2007
Fecha de Aceptación: 30 Octubre de 2007

1.1.3 Todo instrumento de laboratorio es no-anticipativo.

Si la relación funcional $y = N(u)$ es continua, el operador de respuesta N se puede representar por medio de una expansión de Volterra:

$$y(t) = K_0(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(t, s_1)u(t - s_1)ds_1 +$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K_2(t, s_1, s_2)u(t - s_1)u(t - s_2)ds_1 ds_2 + \cdots$$

Si la entrada u y la salida y son funciones de valor real, el núcleo *kernel* $K_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función de respuesta lineal, etc. Sin embargo, no todo sistema entrada-salida de esta clase puede realizarse con un instrumento físico en tiempo real. La restricción crucial para que un sistema dinámico represente datos experimentales en tiempo real es:

Ninguna señal de salida puede ocurrir antes de la señal de entrada.

Esta condición implica que:

$$K_1(t, s_1) = 0 \;\; s_1 > t, \;\; K_2(t, s_1, s_2) = 0 \;\; s_1 > t, s_2 > t, \ldots$$

Obtenemos así el desarrollo en serie de Volterra:

$$y(t) = K_0(t) + \int_{-\infty}^{t} K_1(t, s_1)u(t - s_1)ds_1 +$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} K_2(t, s_1, s_2)u(t - s_1)u(t - s_2)ds_1 ds_2 + \cdots$$

$K_0(t)$: respuesta del sistema sin estímulo.

$K_1(t, s_1)$ respuesta lineal en el instante t al estímulo en el instante s_1.

En un sistema físico, los cambios en la salida no pueden anticipar los cambios en la entrada. En la terminología de los ingenieros tales sistemas de entrada-salida se denominan **"sistemas causales"** o quizás más apropiadamente, **sistemas no-anticipativos.**

2. Series de Volterra.

En su tesis de doctorado [1] (Harvard, 1980), Stephen Boyd hace un estudio detallado de las series de Volterra. Siguiendo su trabajo, especialmente el capítulo II, presentamos algunas nociones fundamentales sobre la expansión de operadores funcionales en series de Volterra.

2.1 Ejemplos

1 Un sistema lineal. Consideremos el funcional N definido por $N[u] = y$, donde:

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = 0$$
$$y = x$$

Sumando x y multiplicando por e^t en ambos lados de la ecuación diferencial obtenemos $\frac{d}{dx}(e^t x) = e^t u$ por consiguiente, $e^t x = \int_0^t e^\tau u(\tau)d\tau$. Haciendo el cambio de variable $s = t - \tau$, obtenemos:

$$y(t) = \int_0^t e^{-s}u(t - s)ds$$

Si introducimos la función de Heaviside

$$H_0(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

podemos expresar a $y = N[u]$ de la siguiente forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} H_0(s)e^{-s}u(t - s)ds$$

El núcleo de Volterra es $K_1(s) = H_0(s)e^{-s}$. Claramente $K_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pertenece a $L_1(\mathbb{R})$ y $\|K_1\| = \int_{\mathbb{R}} |K_1(s)| ds = 1 < \infty.$

Nota: Si integráramos sobre toda la recta real usaríamos

$$K_1(t, s) = H_0(s)e^{-s}H_0(t - s)$$

Como nuestro sistema es lineal la respuesta y es también lineal en u.

2 Un sistema no lineal. Consideremos el funcional N definido por $N[u]=y$, donde:

$$\dot{x}=-x+u, \quad x(0)=0$$
$$y=x^2$$

para $t \geq 0$ tenemos

$$y(t)=\left(\int_0^t e^{-s}u(t-s)ds\right)^2$$
$$=\int_{-\infty}^{t}\int_0^t H_0(s_1)H_0(s_2)e^{-(s_1+s_2)}u(t-s_1)u(t-s_2)ds_1ds_2$$

En este caso, el operador N no tiene parte lineal en la respuesta y el núcleo es

$$K_2(s_1,s_2)=H_0(s_1)H_0(s_2)e^{-(s_1+s_2)}$$

Podemos notar que K_2 es una función ordinaria de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Es claro, además, que $K_2 \in L_1(\mathbb{R})$:

$$\|K_2\|_1=\int_{\mathbb{R}}|K_2(s_1,s_2)|ds_1ds_2<\infty$$

3 Un operador sin desarrollo en serie de Volterra. Consideremos el funcional N definido por $N[u]=y$ donde:

$$\dot{x}=-x+u^2, \quad x(0)=0$$
$$y=x$$

Aquí:

$$y(t)=\left(\int_0^t e^{-\tau}u^2(t-\tau)d\tau\right)^2$$
$$=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} H_0(s_1)H_0(s_2)e^{-s_1}\delta(s_1-s_2)u(t-s_1)u(t-s_2)ds_1ds_2$$

El núcleo

$$K_2(s_1,s_2)=H_0(s_1)H_0(s_2)e^{-s_1}\delta(s_1-s_2)$$

en este ejemplo **no es una función.**

3. Respuesta Lineal.

Para un sistema entrada-salida particular, los núcleos $K_0, K_1, K_2, \ldots$ se pueden determinar en el laboratorio a través de experimentos apropiados.
Consideremos el caso particular de un sistema lineal no-anticipativo con respuesta lineal K_1:

$$y(t)=K_0(t)+\int_{-\infty}^{t}K_1(t,s)u(s)ds$$

el operador entrada-salida N dado por

$$y=N[u]$$

no caracteriza completamente el sistema lineal. Una descripción apropiada requiere condiciones adicionales que garanticen la controlabilidad y la constructibilidad de los estados del sistema lineal. Tales condiciones son satisfechas automáticamente por sistemas invariantes bajo traslaciones en el tiempo. En estos casos se tiene $\frac{dK_0}{dt}=0$ y $K_1(t,s)=K(t-s)$. Si ignoramos la constante K_0, tenemos que un sistema lineal invariante bajo traslaciones en el tiempo puede ser descrito por

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t-s)ds$$

Si el sistema es no-anticipativo, se tiene $K(t)=0$ para $t<0$, por consiguiente

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}K(t-s)u(s)ds$$

4. Transformada de Fourier.

Para una función $f(t)$, la transformada de Fourier de f, denotada por $\hat{f}$ es la función definida por

$$\hat{f}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}e^{i\lambda t}f(t)dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

La función $\hat{f}$ se denomina *función de respuesta en frecuencia*.

En la teoría de redes eléctricas se define la *función de transferencia* f^+ como la transformada de Fourier-Laplace de f:

$$f^+(\lambda+i\sigma)=\int_0^\infty e^{i\lambda t}e^{-\sigma t}f(t)dt,\;\;\lambda\in\mathbb{R},\;\;\sigma>0$$

observamos que $f^+(\lambda)=\widehat{f}(\lambda)$.

La función de transferencia f^+ es la continuación analítica de la función de respuesta en frecuencia $\widehat{f}$ al semiplano superior.

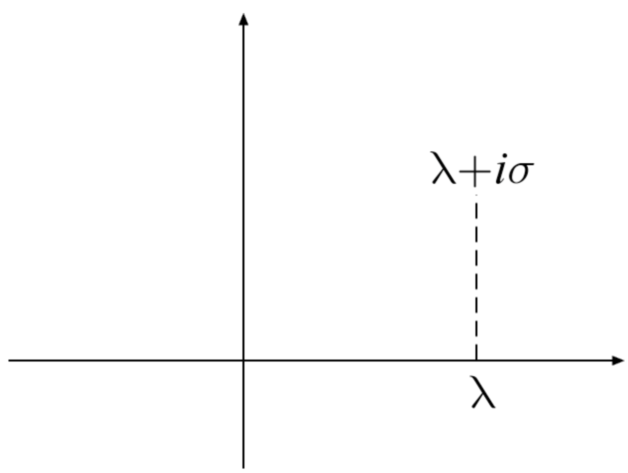

Figura 2

La función $\widehat{f}$ es la frontera de la función de transferencia f^+:

$$\widehat{f}=\lim_{\sigma\to 0}f^+(\lambda+i\sigma)$$

La analiticidad de la función de transferencia refleja el comportamiento no-anticipativo de un sistema lineal invariante en el tiempo.

5. Amplitudes Características.

La función $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ dada por $A(\lambda)=\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2$ se denomina *amplitud característica*. Dada una cierta amplitud característica A, es importante determinar si existe una respuesta en frecuencia $\widehat{f}$ tal que

$$A(\lambda)=\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2,\;\;\text{con}\;\;\int_{\mathbb{R}}e^{-i\lambda t}\widehat{f}(\lambda)d\lambda=0,\quad t<0$$

esto es, si existe un filtro con amplitud característica A y que pueda ser *realizado* por un sistema dinámico lineal no-anticipativo.

6. El Teorema de Paley-Wiener.

Teorema. Sea $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función perteneciente a $L_2(\mathbb{R})$, es decir, tal que $\int_{\mathbb{R}}\psi^2(t)dt<+\infty$. Si el soporte de ψ (e.d. los puntos donde ψ no es nula) está contenido en el intervalo $[-a,a]$, para algún $a>0$, entonces su transformada de Fourier $\widehat{\psi}$ tiene una continuación $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ con φ entera y tal que

$$|\varphi(z)|\le Ce^{2\pi|y|},\quad z=x+iy \qquad (1)$$

para algún $C>0$.

Para una demostración, ver, por ejemplo, [2], pág 405 a 409.

Inversamente, si una función entera $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ satisface (1) y se cumple $\sup\limits_{0<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t+iy)|^2\,dt<\infty$, entonces $\varphi=\widehat{\psi}$ para alguna función $\psi\in L_2(\mathbb{R})$ con soporte en $[-a,a]$.

7. CONCLUSIONES

En un sistema lineal no-anticipativo el operador entrada-salida no describe apropiadamente el sistema y requiere condiciones adicionales que garanticen la controlabilidad y la constructibilidad. Los sistemas invariantes bajo traslaciones cumplen automáticamente las condiciones.

La amplitud característica determina la existencia de un filtro que pueda ser realizado físicamente.

8. BIBLIOGRAFÍA

[1] BOYD, Stephen. Volterra Series: Engineering Fundamentals. Ph. D. Thesis, Harvard University, 1980.

[2] RUDIN, Walter. Real and Complex Analysis. Second Edition, McGraw-Hill Publishing Co., 1974.

[3] PRIMAS, Hans. The Representation of Facts in Physical Theories. Time, Temporality, Now. Ed. by H. Atmaspacher and E. Ruhnau, Berlin, Springer, 1997, Pp. 241 - 243.

[4] WAX, Nelson. A Note on Stable, Phisically Realizable, Linear, Time Invariant Systems. IRE

Transactions on Circuit Theory, December, 1962, Pp.
405 - 408.