REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLIARMÓNICAS
The representation of polyharmonic functions

RESUMEN
En este artículo consideramos el problema de la representación de funciones poliarmónicas mediante términos de expansiones holomorfas.

PALABRAS CLAVES: Expansión holomorfa, función poliarmónica, operador lineal.

ABSTRACT
In this article we consider the problem of the representation of polyharmonic functions by holomorphic expantions.

KEYWORDS: *Holomorphic expansions, lineal operator, polyharmonic functions.*

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil, M. Sc
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO
Matemático, Ph.D
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZALEZ GRANADA
Matemático, Ph. D
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Las series $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \overline{z}^{\alpha} h_{\alpha}(z)$ fueron aplicadas en [1-3,5] para hallar soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. En el presente artículo se muestra que la parte real de toda función poliarmónica $h(z,\overline{z})$ de orden n en un dominio D simplemente conexo se representa en la forma $\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}^{j} h_j(z).$

2. CARACTERISTICAS DE LAS FUNCIONES POLIARMONICAS

A continuación se presentan dos proposiciones que caracterizan la representación de las funciones poliarmónicas de orden n, es decir funciones que son *soluciones de la ecuación*

$$\Delta^n \phi(z,\overline{z}) = 0.$$

Proposición 1. Sea h una función holomorfa en un dominio simplemente conexo D. Entonces la parte real e imaginaria de la función $\overline{z}^n\, h(z)$ son funciones poliarmónicas de orden $n+1$, con n un entero no negativo.

Considerando el operador Δ^{n+1} en forma compleja

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}(\overline{z}^n h(z)) &= 4^{n+1} d\overline{z}^{n+1} dz^{n+1}(\overline{z}^n h(z)) \\ &= 4^{n+1} d\overline{z}^{n+1}\overline{z}^n dz^{n+1}(h(z)).\end{aligned} \tag{1}$$

Como $h(z)$ es holomorfa tiene derivada de cualquier orden. Sea $g(z)$ la función holomorfa definida por

$$g(z) = dz^{n+1}(h(z)). \tag{2}$$

De (2) y (1) se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}(\overline{z}^n h(z)) &= 4^{n+1} d\overline{z}^{n+1}\ \overline{z}^n (g(z)) \\ &= 4^{n+1} g(z)\, d\overline{z}^{n+1}\ \overline{z}^n = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Sea $\overline{z}^n h(z) = u + iv$.
Entonces

$$\Delta^{n+1}(\overline{z}^n h(z)) = \Delta^{n+1}u + i\Delta^{n+1}v,$$

por ser Δ un operador lineal. Además se tiene que

$$\Delta^{n+1}u = \operatorname{Re}\Delta^{n+1}(\overline{z}^n h(z)) = \Delta^{n+1}\operatorname{Re}(\overline{z}^n h(z)),$$

$$\Delta^{n+1}v = \operatorname{Im}(\Delta^{n+1}(\overline{z}^n h(z)) = \Delta^{n+1}\operatorname{Im}(\overline{z}^n h(z)).$$

Teniendo en cuenta (3) y las expresiones anteriores se obtiene

$$\Delta^{n+1}\operatorname{Re}(\overline{z}^n h(z)) = 0 \ \text{ y } \ \Delta^{n+1}\operatorname{Im}(\overline{z}^n h(z)) = 0.$$

Proposición 2. La parte real de toda función poliarmónica $h(z,\overline{z})$ de orden n, se puede expresar de la forma

$$\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}^{j} h_j(z),$$

donde las funciones $h_j(z)$ son holomorfas en dominio simplemente conexo D.

Fecha de Recepción: 24 de Agosto de 2007
Fecha de Aceptación: 07 de Noviembre de 2007

La demostración de la proposición 2 se obtiene por inducción sobre el orden de h.
Para $n=0$, h es armónica. Por la proposición 1, $\operatorname{Re} h = u(x,y)$ es armónica en D y posee su armónica conjugada $v(x,y)$ (ver [4], teorema VI.33). Existen varios métodos para hallar $h = h_0$ a partir de $u(x,y)$.
Hallamos h_0 a partir de $u(x,y)$ utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$v_x(z) = -u_y(z),$$

$$v_y(z) = u_x(z),$$

$$v(z) = \int_{x_0}^{x} -u_y(z)dx + \varphi(y), \tag{4}$$

$$v_y(z) = -\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_o}^{x} u_y(z)dx + \varphi'(y) = u_x(z). \tag{5}$$

Dado que u es armónica y u_{yy} es continua se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_o}^{x} u_y(z)dx &= \int_{x_0}^{x} -u_{yy}dx \\ &= \int_{x_0}^{x} u_{xx}dx = u_x(x,y) - u_x(x_0,y). \end{aligned} \tag{6}$$

De (5) y (6) se tiene
$\varphi'(y) = u_x(x_0,y)$.
Integrando esta última expresión y sustituyendo en (4), tenemos

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} u_y(x,y)dx + \int_{y_o}^{y} u_x(x_0,y)dy + v(x_0,y_0).$$

Recíprocamente, la función v así construida satisface las condiciones de Cauchy-Riemann.
Se puede demostrar que $h_0(z)$ asociada $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se expresa de la siguiente manera
$h_0(z) = u(z,0) + iv(z,0)$.
Bajo la hipótesis de que u sea armónica, usando la teoría de series de potencia se demuestra que

$$h_0(z) = 2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) - u(0,0), \tag{7}$$

en un entorno suficientemente pequeño del origen.
Con el fin de deducir (7) para el caso particular en que h_0 sea racional con $h_0(0)$ real, definimos la función racional h_1 dada por $h_1(z) = \overline{h(\overline{z})}$.
Así,

$$\begin{aligned} 2u(x,y) &= h_0(z) + \overline{h_0(z)} = h_0(z) + h_1(\overline{z}) \\ &= h(x+iy) + h_1(x-iy). \end{aligned}$$

Puesto que la igualdad anterior se cumple para el caso de x e y complejas, se tiene que

$$2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) = h_0(z) + h_1(0).$$

Como $h_0(0)$ es real, $h_1(0) = h_0(0) = u(0,0)$ de donde se obtiene (7).
A continuación realizamos el paso de inducción.
Sea $\operatorname{Re} h$ una función poliarmónica de orden n. Entonces

$\Delta^n \operatorname{Re} h(z,\overline{z}) = 0$.

Luego $\Delta^{n-1}\left(\Delta \operatorname{Re} h(z,\overline{z})\right) = 0$,

esto es $\Delta \operatorname{Re} h(z,\overline{z})$ es poliarmónica de orden $n-1$.
Por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\Delta \operatorname{Re} h(z,\overline{z}) = \operatorname{Re}\sum_{j=0}^{n-2} \overline{z}^j h_j(z),$$

donde h_j es holomorfa para $j = 0,1,2,\ldots,n-2$.
Usando Δ en forma compleja

$$4d\overline{z}dz\left(\operatorname{Re} h(z,\overline{z})\right) = \operatorname{Re}\sum_{j=0}^{n-2} \overline{z}^j h_j(z).$$

Luego

$$\begin{aligned} 4dz\left(\operatorname{Re} h(z,\overline{z})\right) &= \operatorname{Re}\int \sum_{j=0}^{n-2} \overline{z}^j h_j(z)\, d\overline{z} + \operatorname{Re} g_1(z) \\ &= \operatorname{Re}\sum_{j=0}^{n-2} \frac{\overline{z}^{j+1}}{j+1} h_j(z) + \operatorname{Re} g_1(z) \\ &= \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\overline{z}^{j}}{j} h_{j-1}(z) + \operatorname{Re} g_1(z). \end{aligned}$$

$$4\operatorname{Re} h(z,\overline{z}) = \operatorname{Re}\int [\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\overline{z}^{j}}{j} h_{j-1}(z) + g_1(z)]\, dz + \operatorname{Re} g_2(\overline{z})$$

$$= \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n-1} \overline{z}^j \frac{1}{j}\int h_{j-1}(z)\, dz + \operatorname{Re} \overline{z}^o \int g_1(z)\, dz + \operatorname{Re} g_2(\overline{z})$$

$$= \operatorname{Re}\sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}^j \tilde{h}_j(z) + \operatorname{Re} g_2(\overline{z}),$$

donde $\tilde{h}_j(z) = \frac{1}{j}\int h_{j-1}(z)\, dz$ para $j = 1,2,\ldots,n-1$

y $\tilde{h}_0(z) = \int g_1(z)\, dz$.

Como $g_2(\overline{z})$ es armónica entonces es poliarmónica de cualquier orden y considerándola poliarmónica de orden $n-1$ se puede expresar de la siguiente manera

$$g_2(\overline{z}) = \sum_{j=0}^{n-2} \overline{z}^j \tilde{\tilde{h}}_j(z),$$

con $\tilde{\tilde{h}}_j(z)$ holomorfa para $j = 0,1,2,\dots,n-2$.
Luego

$$g_2(\overline{z}) = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}^j \tilde{h}_j(z) + \sum_{j=0}^{n-2} \overline{z}^j \tilde{\tilde{h}}_j(z).$$

Por tanto, $h(z,\overline{z}) = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{z}^j {h^*}_j(z),$

donde ${h^*}_j = \frac{1}{4}\left(\tilde{h}_j + \tilde{\tilde{h}}_j\right)$ para $j = 0,1,2,\dots,n-2$ y ${h^*}_{n-1} = \frac{1}{4}\tilde{h}_{n-1}$. Queda así demostrada la proposición 2.

3. EJEMPLO DE REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN POLIARMÓNICA

A partir de la función poliarmónica $u = ax^3 + bx^2 + cy$ construimos la función $h(z,\overline{z})$ tal que $\operatorname{Re} h(z,\overline{z}) = u$ y damos la expansión holomorfa de h.

$$\Delta \operatorname{Re} h = 6ax + 2b,$$

$$\Delta^2 \operatorname{Re} h = \Delta(\Delta u) = 0.$$

Como $\Delta \operatorname{Re} h$ es armónica,

$\Delta \operatorname{Re} h(x,y) = 6ax + 2b = U(x,y)$; aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$V_x = -U_y = 0,$$

$V = \varphi(y)$, por lo tanto

$$\varphi'(y) = 6a,$$

$$V(x,y) = \varphi(y) = 6ay + k,$$

Con k constante.
Así que

$$h_0(z) = U(z,0) + iV(z,0) = 6az + 2b + ic,$$

Además,

$$dzd\overline{z} \operatorname{Re} h(z,\overline{z}) = \operatorname{Re}\frac{1}{4}(6az+2b) + \operatorname{Re} ic,$$

$$dz \operatorname{Re} h(z,\overline{z}) = \operatorname{Re}\frac{1}{4}\overline{z}(6az+2b) + \operatorname{Re} ic\overline{z} + \operatorname{Re} g_1(z),$$

Así,

$$\operatorname{Re} h(z,\overline{z}) = \operatorname{Re}\left[\overline{z}\int \frac{1}{4}(6az+2b)dz + cz\overline{z}i + \int g_1(z)dz + g_2(\overline{z})\right],$$

$$\tilde{U}(x,y) = \operatorname{Re}\left[cz\overline{z}i + \int g_1(z)dz + g_2(\overline{z})\right] = \operatorname{Re} h(z,\overline{z}) - \operatorname{Re}\left[\overline{z}\int \frac{1}{4}(6az+2b)dz\right].$$

Luego

$$\tilde{U}(x,y) = ax^3 + bx^2 + cy - \left(b\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}ax^3 + \frac{b}{2}y^2 + \frac{3}{4}axy^2\right),$$

con lo cual

$$\left[cz\overline{z}i + \int g_1(z)dz + g_2(\overline{z})\right] = 2\tilde{U}\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)$$
$$= -czi + \frac{b}{2}z^2 + \frac{a}{4}z^3.$$

Así,

$$h(z,\overline{z}) = \overline{z}\left(\frac{3}{4}az^2 + \frac{b}{2}z\right) - czi + \frac{b}{2}z^2 + \frac{a}{4}z^3.$$

Tomando la parte real se tiene que

$$\operatorname{Re}[h(z,\overline{z})] = \operatorname{Re}\left[\overline{z}\left(\frac{3}{4}az^2 + \frac{b}{2}z\right) - czi + \frac{b}{2}z^2 + \frac{a}{4}z^3\right] =$$
$$= \operatorname{Re}\left[\overline{z}{h^*}_1 + {h^*}_0\right]$$
$$= ax^3 + bx^2 + cy.$$

4. CONCLUSIONES

En el campo de la aplicación de la teoría hidrodinámica y elasticidad es conocida la eficacia de las funciones armónicas en la representaciones del flujo de un campo de velocidades estacionario y de las funciones biarmónicas en la representación de un campo de tensiones de un sólido sometido a cargas y restricciones solo por mencionar dos ejemplos. Por ello resulta apenas lógico la importancia de generalizar las propiedades de las funciones armónicas y biarmónicas en el contexto de las expansiones holomorfas como es mostrado en [2-4]. Los teoremas presentados en este artículo muestran que esta generalización es posible a partir de una utilización de las propiedades de las funciones armónicas.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] A.I Alexandrovich, Application of two complex variables to the theory of elasticity, Dokl.-Akad.-Nauk 232 (3) (1977), 542-544.
[2] C. Escobar, A. Posso, J. R.González, Método de las expansiones holomorfas para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales de coeficientes constantes, Scientia et Technica, Año XIII Número 35 Agosto de 2007.
[3] K. Rectorys, V. Zahradnik, Solution of he firs biharmonic problem by the method of least squares on the boundary, Aplikace Matematiky, 19(2) (1974), 101-131.
[4] B. P. Palka, An introduction to complex function theory, Springer, 1990.
[5] A. Rodionov, Explicit Solutions for linear partial differential equations, J.-Math, Vol 2, No 2. December (2000), 34-42.