

TECNOLOGÍA DIGITAL Y COGNICIÓN MATEMÁTICA: RETOS PARA LA EDUCACIÓN¹

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres²

Universidad Pedagógica Nacional-México

Luis Enrique Moreno Armella³

Centro de investigación y estudios avanzados del IPN de México

Fecha de recepción: Septiembre 3, 2012

Fecha de aceptación: Octubre 1, 2012

RESUMEN

En este artículo se reportan los resultados de una investigación en la que se pretende analizar el papel de las tecnologías digitales como herramientas mediadoras entre la percepción y el aprendizaje del conocimiento matemático. En particular, se discute sobre cómo el estudiante aborda un problema y lo resuelve en una ecología digital, a saber, la suministrada por la Geometría Dinámica. La perspectiva teórica se erige sobre dos principios: El primero, el cognitivo, establece que toda forma de conocimiento está mediada por la acción de una herramienta material o simbólica. El segundo, epistemológico, establece que la mediación de una herramienta nunca es neutra desde el punto de vista epistémico. La fase experimental se realizó con estudiantes mexicanos cuyas edades oscilan entre los 15 y los 18 años. Los resultados muestran como las representaciones dinámicas permiten construir objetos matemáticos cargados de significado.

Palabras clave: Geometría dinámica (GD), cognición extendida, mediación instrumental, resolución de problemas.

DIGITAL TECHNOLOGY AND MATHEMATICS COGNITION: CHALLENGES FOR EDUCATION

ABSTRACT

We analyze digital technologies as they mediate between perception and mathematical learning. In particular, we discuss how students approach a math problem and solve it within a digital ecology. We mean, the one provided with Dynamic Geometry. Our theoretic perspective benefits from two principles, a cognitive one asserting that human knowledge always results from a mediated activity using symbolic or material tools. The second principle asserts that the tools used to produce knowledge are never neutral -from an epistemological viewpoint. The experimental work was advanced with Mexican students (15 to 18 years olds) and the results obtained show how dynamic representations scaffold the production of meaningful mathematical objects.

Palabras clave: Dinamic Geometry, widespread cognition, instrumental mediation and matter resolution.

¹ Artículo derivado de la investigación Argumentación matemática en ambientes dinámicos: Estudio en diferentes niveles educativos, 2005-2011- Universidad Pedagógica Nacional de México. Línea de investigación: Entornos tecnológicos del aprendizaje de las matemáticas.

² isandoval@upn.mx Doctora en Ciencias, especialidad Matemática Educativa. Universidad Pedagógica Nacional, México

³ lmorenoarmella@gmail.com Doctor en Ciencias, investigador titular del Dpto. de Matemáticas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México

ANTECEDENTES

Las Tecnologías Digitales (TD) cobran cada vez mayor relevancia en los procesos educativos y su presencia en los salones de clase ha generado nuevos retos a la educación y a sus diferentes actores. Dichas herramientas son consideradas como agentes de cambio (Pea, 1995; Jonassen *et al.*, 2003; Ferrara *et al.*, 2006; English, 2008) que posibilitan la transformación en las clases y en particular de contenidos matemáticos escolares, ya que tienen un gran potencial para generar nuevas oportunidades en el aprendizaje (Mariotti, 2001; Drijvers, 2002) y la conceptualización de estos contenidos (Papert, 1981; Cuoco & Goldenberg, 1996; Noss & Hoyles, 1996; Ertmer, 1999; Lagrange *et al.*, 2001), el acceso a nuevas representaciones –representaciones ejecutables (Moreno y Lupiáñez, 2001), además de facilitar el desarrollo de procesos de construcción, verificación de conjeturas y estrategias para la resolución de problemas (Noss y Hoyles, 1996; Laborde, 2001; Laborde, *et al.*, 2006; Papodopolus & Dagdilelis, 2009). La utilización de las TD entonces, incrementan las capacidades de asimilación del sujeto y contribuyen a la apertura del campo de sus acciones posibles (Rabardel, 2011). No obstante hay que notar que cada herramienta genera un campo de acción, a su vez que impone al sujeto ciertas restricciones que debe identificar, comprender y aprender a administrar. Pero dichas restricciones hacen posible el surgimiento de nuevas formas de acción (Trouche, 2003; Assude *et al.*, 2006).

La literatura revisada señala que las TD en educación han generado formas diferentes de relación y comunicación entre los actores involucrados. Pero no sólo eso, se tiene evidencia que modifica la manera de construir el conocimiento matemático y hay diferencia en los recursos movilizados por el sujeto ante la misma actividad en diferentes ambientes (digitales y papel y lápiz, por ejemplo). Este proceso en el salón de clase, en el que los artefactos (materiales o simbólicos) se convierten en instrumentos para el pensamiento, el papel del profesor es fundamental así como las actividades propuestas. Por ello, surge la necesidad de

analizar las estrategias de solución de problemas geométricos en ambientes mediadas con TD con el objeto de entender y explicar conocimientos matemáticos movilizados en este proceso. En esta línea es en la que se suscribe los resultados de la investigación que fundamentan los resultados que aquí se presentan.

REPRESENTACIONES DIGITALES: UN EJEMPLO GEOMÉTRICO

El desarrollo tecnológico ha permitido tener herramientas que generan representaciones dinámicas de objetos matemáticos, esto es, suministran un amplio abanico de representaciones de un objeto matemático y de relaciones matemáticas. Las tradicionales representaciones analíticas y de carácter estático, se han visto ampliamente enriquecidas con estas nuevas tecnologías. En este artículo se utilizará la geometría dinámica (específicamente, Cabri) para ejemplificarlo. Esta herramienta es concebida como un instrumento semiótico que exhibe su fuerza en la manera como responde al problema del objeto geométrico. Es decir, a la confusión entre el dibujo (representante) y el objeto geométrico (representado). En particular, la Geometría Dinámica (GD) proporciona un campo de exploración que no es factible con las representaciones con lápiz y papel. El tipo de representación es diferente, es una *representación dinámica* en el cual las propiedades geométricas permanecen inalterables cuando los objetos se deforman según el *arrastre*. Por lo tanto, la imagen dinámica (sensorio-motora) que se forma un estudiante al hacer construcciones es distinta a la que se forma con el uso de otras herramientas. Al tener que hacer esta construcción, el sujeto está más cerca de la definición formal y por ende, la experiencia que internaliza es distinta. Es importante establecer la diferencia entre dibujar y construir. Consideramos que *dibujar* equivale a reproducir la imagen mental que se tiene de una figura, mientras que *construir* equivale a utilizar las propiedades de la figura para obtener una representación de ella. Por lo tanto, la reproducción de una imagen mental no captura propiedades intrínsecas del objeto reproducido

(mediante un dibujo) mientras que la utilización de las propiedades estructurales para representar (lo que hace GD) es otra historia: es la puesta sobre la pantalla de los objetos ideales traídos mediante un instrumento que *reconoce* la estructura. Eso es lo que hace el *arrastré*: reconocer la estructura.

Entonces, a partir del uso de la GD, según los resultados experimentales como se verá en el siguiente apartado, el razonamiento geométrico puede verse enriquecido por las formas de argumentación que se hacen viables al acercarse la percepción y el razonamiento. Pero no son los productos tecnológicos por sí solos los que producen los cambios, sino lo que se hace con ellos. Es decir, el agente de cambio social y cultural es *la acción mediada por la tecnología*.

Los resultados que se presentan aquí forman parte de una investigación cuya problemática se centra en estudiar “¿Cómo el estudiante acompañado con su cognición extendida, logra entender un problema y diseñar una solución?”.

METODOLOGÍA

En esta investigación se utilizaron técnicas de tipo cualitativo. Particularmente, permitió mostrar la consistencia de los significados personales en cada una de las estrategias argumentativas utilizadas por los alumnos. Evidencia directa de la complejidad de los procesos argumentativos en matemáticas están reflejadas en las observaciones y anotaciones de campo. La experimentación se realizó en México con 35 estudiantes cuyas edades eran entre 15 y 18 años, con conocimientos elementales de geometría y sin experiencia alguna con la Geometría Dinámica. Dichos conocimientos y habilidades básicas se confirmaron a través de un cuestionario y una entrevista semiestructurada. Para la experimentación se utilizaron computadoras, una por equipo de trabajo, dada la facilidad para video-grabar el desarrollo de las actividades. Dado que el interés era observar cómo algunas herramientas propias de la GD generan o modifican las estrategias argumentativas de los estudiantes, hubo especial atención en observar la interacción que tuvieron los sujetos de estudio con este tipo de tecnología, con esos

objetos informáticos, sus representaciones y cómo los relacionaron con la solución de los problemas planteados en las actividades. La participación de los estudiantes no estuvo sujeta a calificación alguna y como investigadores, la participación de los autores de este artículo fue activa durante todo el proceso.

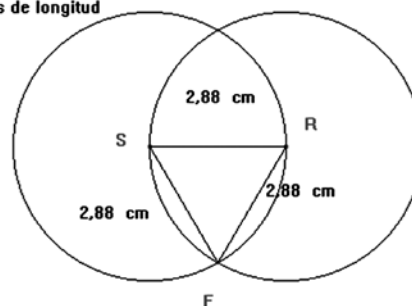
DOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA: RESULTADOS DE LA MEDIACIÓN DE LA GD

Los siguientes ejemplos muestran maneras diferentes de abordar dos problemas de construcción, típicos de un curso de geometría elemental.

El problema consistía en construir un triángulo equilátero dado un segmento y usando regla y compás retráctil. Es decir, el compás no permite trasladar medidas. Cabe señalar, que las soluciones (gráfica y su justificación) se hacen dentro del ambiente digital.

Figura 1. Construcción usando la herramienta de medición

Dado el segmento RS y tomando como centro de la circunferencia; los tres segmentos SF, FR y SR son iguales de longitud



En esta construcción se evidencia el uso de la herramienta de medición. Su efectividad permite descartar o consolidar conjeturas, en este caso, relacionadas con la verificación numérica de que la igualdad entre las medidas de los radios. Los estudiantes utilizan simultáneamente el arrastré, para verificar que en efecto estas medidas mantienen una relación entre sí. El tipo de representación

generada por la GD es diferente de la realizada con papel y lápiz: aquella es ejecutable, pues a través del arrastre la representación es procesada y conserva sus propiedades geométricas. En este caso, se confirmó el establecimiento de relaciones, en su mayoría perceptivas y, por lo tanto, los resultados de la medición y el arrastre confirmaron sus conjeturas. Los estudiantes no obtuvieron un control conceptual en sus primeras ideas exploradas. En decir, no lograron interpretar la representación construida en términos de la razón geométrica que la justificara. Por lo tanto, en este caso, la función de la Geometría Dinámica dada por los educandos fue la de amplificador ya que no lograron establecer distinciones estructurales ni argumentativas entre una representación hecha en un ambiente digital y la realizada con papel y lápiz.

Veamos el siguiente caso, en el que además de usar la medición los alumnos logran vincular sus observaciones con relaciones estructurales, esto es, identificar las propiedades geométricas que subyacen en la construcción de la figura y que son necesarias para la producción de una explicación geométrica.

En el desarrollo de esta actividad, este equipo complementó sus observaciones a nivel de la percepción, las medidas y el arrastre en el establecimiento de algunas relaciones. Dada la forma como se realizó la construcción, este grupo de estudiantes establecieron la relación entre el segmento pq y pr como radio de la circunferencia denotada con "a" (la que aparece a la izquierda de la Figura 2.) y la relación entre qr y qp como radios de la circunferencia denotada como "b" (la que aparece a la derecha de la Figura 2.). De esta manera, se establece la relación entre las dos circunferencias. Esta argumentación geométrica, muestra cómo los estudiantes logran establecer relaciones estructurales entre los objetos geométricos en cuestión, apoyados por dos herramientas de la GD: arrastre y medición.

El arrastre (en la mayoría de los casos, junto con la medición) fue utilizado como una forma de comprobar si una construcción estaba bien hecha. Las dos herramientas de la geometría dinámica permitieron a los estudiantes confrontar su percepción con la teoría interna de la computadora, lo que les permitió pasar de un nivel perceptivo a uno geométrico al momento de arrastrar la construcción.

Figura 2. Medición y argumentaciones geométricas

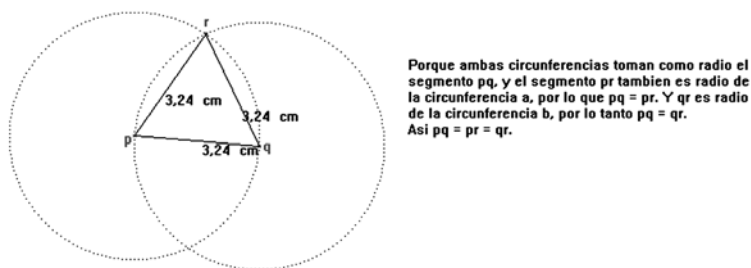
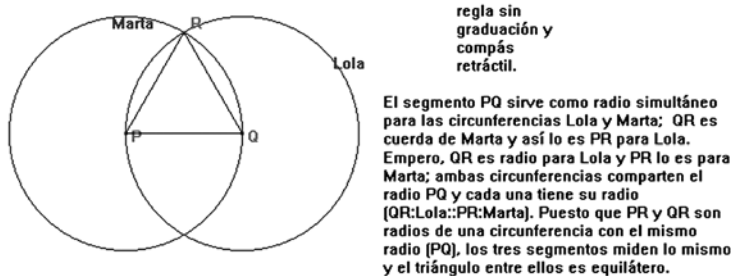


Figura 3. Argumentación geométrica



El siguiente ejemplo muestra una argumentación matemática, lograda por el mejor estudiante del grupo. Dentro de su exploración y argumentación no utilizó la medición, únicamente el arrastre.

En este caso, el estudiante realizó su construcción siguiendo las indicaciones iniciales. Durante la actividad, utilizó el arrastre para verificar la relación entre los objetos involucrados. Por ejemplo, comprobar que el punto R estuviera en la intersección de las dos circunferencias. El estudiante describe su construcción, y argumenta geoméricamente las relaciones establecidas para finalmente, concluir que el triángulo es equilátero. En este caso, se evidencia como las relaciones estructurales superan a las perceptivas y por ello no usa la medición de la Geometría Dinámica pero sí recurre a ella al momento de argumentar: “los tres segmentos miden lo mismo”.

Se considera que la relación entre el sujeto y la herramienta pasa por tres momentos, como se ilustrará en este apartado: prótesis, amplificador y reorganizador. Inicialmente, el sujeto es guiado por la herramienta y conlleva un desarrollo progresivo de apropiación como es el caso de la Figura 1. Es decir, dicha herramienta es usada como una *prótesis* y su uso se limita a ciertas acciones que ayudan en la solución de un problema (auxiliar de su cognición). En otras palabras, el sujeto no establece aún distinciones estructurales ni argumentativas entre una representación realizada en papel y lápiz y una representación en un ambiente digital.

La noción de mediación instrumental permite analizar la manera como los instrumentos influyen

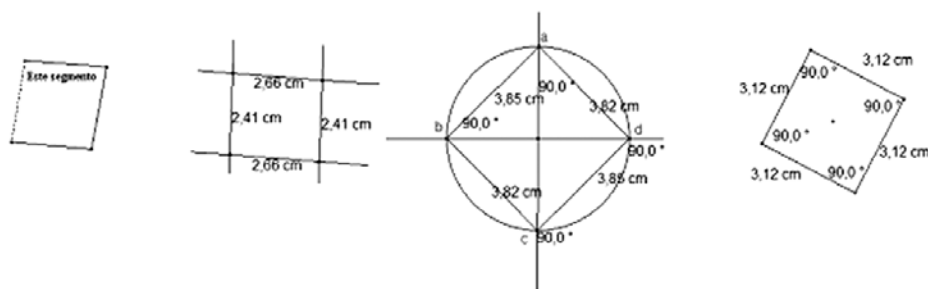
en la construcción del saber y en los procesos de conceptualización (Rabardel, 2011). Por lo tanto, los instrumentos no son únicamente auxiliares o neutros dentro de la enseñanza, son parte activa en la construcción del conocimiento, median sus acciones. *Y el conocimiento producido es inseparable del artefacto de mediación empleado.* Dicha noción se enmarca en el enfoque de Vygotsky para la mediación instrumental. Ésta ha sido estudiada por Vérillon & Rabardel (1995), Rabardel (2011), Mariotti (2001), Moreno (2001), Moreno & Hegedus (2010), Santillán (2002), Laborde (2003), Olivero (2003), Sandoval (2009), entre otros.

Ahora, veamos otro ejemplo que ilustra maneras diferentes de construir un cuadrado, a partir de un segmento dado:

En la construcción anterior (ver Figura 4a) se establecieron relaciones perceptivas de igualdad, perpendicularidad y paralelismo entre los segmentos, siguiendo el esquema de una representación prototípica. El resultado mostrado en la pantalla no coincidió con la imagen mental de cuadrado que tenían los estudiantes a pesar de usar el arrastre para buscar una configuración adecuada.

Como resultado de manipulación de esta representación digital, surgen nuevas ideas. Una segunda idea propuesta por uno de los estudiantes consistió en utilizar rectas paralelas y perpendiculares (véase Figura 4b). Dicha construcción partió de una recta horizontal (según la apariencia y sus propias palabras) y luego construyeron las demás rectas usando el comando de recta paralela y recta perpendicular.

Figuras 4a, 4b, 4c, 4d. Evolución en la construcción de un cuadrado.



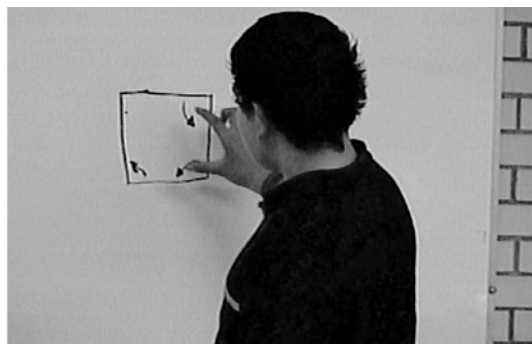
En la Figura 4c, se aborda una nueva idea que se puede describir como: dada una circunferencia y dos diámetros perpendiculares, construir un cuadrado. Los estudiantes inician la construcción trazando una circunferencia, seguida de una recta vertical que pasa por el centro de la circunferencia y luego una recta que pasa, también por el centro y es perpendicular, perceptivamente, con la primera. La construcción se finaliza uniendo con segmentos los cuatro puntos donde se interseca cada recta con la circunferencia. Midieron tanto los lados como los ángulos de dicho cuadrilátero e hicieron la prueba del arrastre sobre el centro de la circunferencia. La construcción pasa, perceptivamente, la prueba. De dicha acción, se puede afirmar que el arrastre, nuevamente, aparece como una estrategia para validar una conjetura. Las relaciones establecidas, hasta este momento, han sido perceptivas; por lo tanto, se considera que los alumnos estaban anclados en un nivel perceptivo. Al igual que en la segunda construcción (rectas paralelas), se evidencian dificultades para establecer la relación de perpendicularidad. Finalmente los alumnos, en esta exploración utilizan el comando de *Polígono Regular* (incluido dentro del programa) y lograron construir el cuadrado. La construcción pasó el primer nivel de verificación – el perceptivo, la prueba de medición tanto para los lados como para los ángulos. En este caso, los sujetos empiezan a notar ciertas estructuras necesarias para resolver el problema. Aquí la herramienta ya está afectando las acciones cognitivas. Entonces, podríamos decir que hay una transición hacia otra manera de usar la herramienta.

Cuando las herramientas digitales generan cambios en las estrategias de solución del problema y hasta en la manera de plantearlo, entonces se dice que las herramientas funcionan como un *reorganizador*. Esto es, el pensamiento de la persona que hace uso de la herramienta, se vincula tan íntimamente con la herramienta que ya no es posible separar su pensamiento de dicha herramienta. Es como si ésta se hubiese fundido con el sistema nervioso del individuo.

Para ejemplificar esta manera de incorporación de una herramienta al tren de pensamiento de una

persona, se presentará a continuación una idea que surge de la discusión entre los estudiantes y que involucra transformaciones geométricas.

Figura 5. Ilustración de la idea desplegar segmentos.



Gustavo: [Hace el trazo que se muestra en la Figura 5.] Se supone que éste es el segmento. Y si desplegamos la línea hacia este lado, queda recta. Y si la volvemos a desplegar queda recta. Y este lado, queda recta. Y esta es mi suposición de cuadrado. No se si esté bien.

Jorge: [Traza un segmento, denótese AB] Ahí tenemos una recta, luego tenemos que encimar otra recta. [Lo ilustra en su dibujo electrónico.] Luego otra. Entonces se va a desplegar y una de las rectas va a desplazarse para acá. [Se refiere a una rotación de 90° alrededor del punto B en sentido contrario a las manecillas del reloj, llámese BC.] Y van a quedar en esta otra recta dos. [Se refiere a que todavía están encimados dos segmentos sobre el original.] Luego se van a desplegar otra acá. [Se refiere a que uno de los segmentos va a rotar 90° sobre el punto A, pero en el mismo sentido de las manecillas del reloj; llámese AD.] Y ya nada mas aquí se coloca otra. [Se refiere a un segmento que cierre la figura, CD.]

Como se observa en este ejemplo, el ambiente de geometría dinámica generó diferentes estrategias para resolver una tarea de construcción. Dichas estrategias son explícitas tanto en la solución como en la argumentación; los estudiantes no son inducidos a adoptarlas. Este tipo de herramientas y la dinámica de clase, en la que el intercambio de

ideas y la exploración de las mismas son centrales, permite que se generen estrategias diversas para una misma tarea.

Durante el desarrollo de las actividades de construcción presentadas a lo largo de este apartado se muestra un cambio en el objeto bajo observación. El triángulo o el cuadrado ya no se ven como un dibujo sino como el resultado de relaciones entre objetos geométricos que los estructuran. La imagen formada por los estudiantes del cuadrado o del triángulo equilátero, cuando se construye mediante GD (Cabri), es diferente y más cercana al objeto geométrico. El nivel de evidencia del dibujo digital fue mayor que el nivel que alcanzó el realizado en papel y el establecimiento de relaciones se modificó de perceptivo a geométrico, logrando así la correspondencia con el universo interno del programa.

Las estrategias argumentativas que respaldaron sus construcciones fueron descriptivas/explicativas empíricas hasta argumentaciones geométricas formales. Es decir, el paso de lo perceptivo a lo teórico se dio en algunos casos, y se logró cierta evolución en los procedimientos de construcción, desde lo perceptivo a un nivel geométrico.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS: NUEVOS RETOS EDUCATIVOS

Los ejemplos anteriores ilustran cómo la Geometría Dinámica funciona como un mediador semiótico para la construcción del conocimiento matemático. Es decir, un *productor* de representaciones simbólicas ejecutables que genera significado a los objetos geométricos y a las relaciones entre ellos. Esto tiene lugar al proporcionar a los estudiantes diferentes representaciones, con las cuales pueden tejer relaciones matemáticas y pre-sentir la naturaleza general, estructural, que se esconde debajo de los dibujos que son como las apariencias de las estructuras.

En cuanto a las actitudes de los estudiantes se evidenciaron dos tipos. En el primer tipo, el que reacciona ante lo que es espontáneamente visible, lo que percibe del dibujo y lo que le evoca. Por lo gene-

ral, su razonamiento se concentra en la formulación de una descripción de los pasos efectuados sobre el dibujo, que le sirvió para resolver el problema. Aquí, el interpretar la representación está más cercano al dibujo. Es decir cuando se utiliza la TD como una prótesis (Figura 1 y Figura 4). La otra actitud es interpretar la representación figural como un objeto geométrico y, por ende, el estudiante logra vincularla con sus propiedades geométricas. El razonamiento comienza desde la aprehensión discursiva y en algunas ocasiones puede ser independiente de la apariencia de la representación (Figura 3). En tal caso, dadas las características del dibujo digital y el mecanismo de control que obedece a la teoría interna del programa que escrito en la interioridad de la computadora, parece posible la existencia de un puente entre la evidencia geométrica de Cabri y la argumentación geométrica. Entonces, la Geometría Dinámica enriquece la representación figural porque brinda mayor nivel de evidencia y, por ende, se podría afirmar que ayuda en la transición del dibujo al objeto geométrico. Cuando el alumno usa el arrastre (ejecuta la representación) el enunciado o la conjetura adquiere un dominio de validez en una familia de figuras y no en una sola representación.

La manera de resolver un problema en matemáticas, tiene entonces relación estrecha con las herramientas disponibles, y su manejo depende de la integración del conocimiento matemático y de la herramienta misma. La solución siempre llevará el sello de la *mediación* de la herramienta. Es decir, la solución será una pieza de conocimiento que no puede separarse de la herramienta, más precisamente, de la ruta cognitiva inducida por su presencia. El empleo de la herramienta afecta no sólo la opción de la estrategia de solución sino, también, las acciones que le sucederán. Santillán (2002) lo expresa de modo persuasivo:

El medio [...] es la base material que hace posible las acciones del sujeto. Un tipo específico de acciones, que obedecen al tipo de herramienta [...] La meta o fin no cambia si utilizamos una u otra herramienta, pero el proceso para alcanzar la meta, según los medios que se utilicen, cam-

bia y cambia la estrategia. La planeación, una actividad cognitiva compleja, queda marcada por la herramienta [...] La actividad cognitiva es inherente al instrumento. (p. 82)

Como se ha esbozado a lo largo del artículo, el uso de las tecnologías digitales conlleva una reestructuración cognitiva puesto que requieren también del aprendizaje de la sintaxis que controla la mediación de la herramienta en cuestión. Entonces se puede afirmar que “la máquina ya no sólo registra el pensamiento... sino que procesa la información que queda registrada en ese medio de representación externa” (Moreno, 2002a, p. 8).

En ese sentido, las tecnologías digitales no son tan solo un *soporte externo de la cognición* sino que se integran a ella y la transforman. No hay (de acuerdo a los principios cognitivo y epistemológico que sostienen nuestra interpretación del trabajo de los estudiantes), una cognición a la que se le adjunta una herramienta *desde afuera*, como si fuera un brazo mecánico, para tornarla más potente. Lo que sí hay es una *transformación* de la cognición previa que ahora, al fundirse con la herramienta, funciona de un modo nuevo y por lo tanto produce un conocimiento que no puede evaluarse al margen de esta cognición *híbrida*. Conducir una bicicleta, por ejemplo, no es algo que pueda demostrarse sin una bicicleta. La única forma de exhibir esa forma de conocimiento es con la *mediación* del artefacto. Sólo a través de esa mediación emerge la nueva cognición. Esto tiene consecuencias prácticas para la enseñanza, una de ellas es que la evaluación del conocimiento de los estudiantes no puede efectuarse al margen de las herramientas con las que se ha construido el conocimiento que está por evaluarse. La mediación de una herramienta ya no puede entenderse como una ayuda a un proceso de aprendizaje que se pretende invariante con respecto a la herramienta. Eso no ocurre ni en situaciones menos comprometidas desde el punto de vista cognitivo. Por ejemplo, si un atleta se prepara para competir en una carrera de diez mil metros, no lo hace practicando con una bicicleta, pues en ese caso, el conocimiento de su cuerpo ante los esfuerzos propios de la carrera, no corresponden

a los que debe realizar con la mediación de su bicicleta. Pasando al campo de la mediación en el terreno cognitivo, esto se traduce en el valor transformador de la herramienta simbólica (en nuestro caso, la Geometría Dinámica).

Con las tecnologías digitales se tienen formas de representación dinámicas que pueden generar una reestructuración en la clase de matemáticas; cambia la localización del conocimiento, que ya no sólo reside en el profesor, sino también en la red social que emerge de la interacción de cada estudiante con el artefacto en cuestión y entre los estudiantes. Cada uno aprende de los otros y a través de los otros. No solo hay interacción personal con el artefacto sino a través de las respuestas cognitivas de los demás. Toda esa red es resultado de un complejo proceso que, en otro lugar (Moreno & Hegedus, 2010), se ha denominado *co-acción*. Esto es, una acción que se extiende por el tejido social del salón de clases (Hegedus & Moreno, 2009). Entonces se puede decir que:

La tecnología digital permite generar sistemas de representación ejecutables mediante los cuales se logra instalar aspectos de nuestro pensamiento en soportes semióticos fácilmente reproducibles. Dichos soportes, gradualmente, se tornan en parte de nuestro pensamiento. (Moreno, 2002, p. 10)

REFERENCIAS

- Cuoco, A. & Goldenberg, E. (1996). A role for technology in Mathematics Education. *Journal Education*. V 178. No 2, 15-32
- Drijvers, P. (2002). *Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities*. *ZDM* 34 (5) 221-229.
- Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on technology and the Teaching and the Learning of mathematics.*, Vol 2. Cases and Perspectives, 363-391
- English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En Lyn English (Ed). *Handbook of the International*

- Research in Mathematics Education*. Second edition. Lawrence Erlbaum, USA.
- Ertmer, P. (1999) Addressing first - and second- order barriers to change: Strategies for technology integration. *Educational Technology Research and Development*, 47 (4), 47-61.
- Ferrara, A; Pratt, D. & Robutti, O (2006). The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and Calculus. In Gutierrez, P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and Future*, 237-273
- Hegedus, S. & Moreno, L. (2010). Accomodating the Instrumental Genesis Framework within Dynamic Technological Environments. *For the Learning of Mathematics* 30, p. 26-31.
- Jonassen, D.; Howland, J.; Moore, J. & Marra, R. (2003). *Learning to Solve Problems with Technology. A Constructivist Perspective*. Pearson Education
- Laborde, C. ; Kynigos, C. ; Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutierrez, P. Boero (eds), *Handbook or Research on the Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers, 275-304
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 6, 283-317
- Lagrange, J.; Artigue, M.; Laborde, C. & Trouche, Luc (2001). A meta studio on IC Technologies in Education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. *PME25* (1), 111-122
- Mariotti, M. (2001). Introduction to Proof: The mediation of a Dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics* 44. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. 25-53.
- Moreno, L & Hegedus, S. (2009). Co-action with Digital technologies, ZDM, Mathematics Education, 505-519.
- Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Tecnologías digitales en el Aula de Matemáticas*. MEN, Colombia, 81-86.
- Noss, R. & Hoyles, C. (1996): *Windows on Mathematical Meanings*, p. 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Olivero, F. (2003). *The proving process within a dynamic geometry environment*. PhD thesis. University of Bristol.
- Papadopoulos, I. & Dagdilelis, V. (2009). Estimating areas and verifying calculations in the traditional and computational environment. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 305-312 Thessaloniki, Greece: PME.
- Papert, S. (1981) *Desafío a la mente. Computadoras y Educación*. Buenos Aires: Ed. Galápagos.
- Pea, R.D. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist*, 20(4), 167-182.
- Rabardel, P (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad.) Acosta, M. Ediciones Universidad Industrial de Santander. Colombia.
- Rojano, T (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en Matemáticas y Ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*. N° 33, 135-165.
- Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. En *Revista Educación Matemática*. Vol. 21 (1), 5-27. Santillana. México
- Santillán, M. (2002). *Mediación Instrumental con Calculadora*. Tesis de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.
- Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artefacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, *European Journal of Psychology of Education*, 10 (1), 77-101.