Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales

Pedro Rubén Landín Vargas

Cinvestav

Resumen

Desde una perspectiva de la relación entre el desarrollo cognitivo y la enseñanza, se describen aspectos del proceso mediante el cual estudiantes de bachillerato llegan a conocer y usar la función de probabilidad binomial e investiga la influencia de los sesgos cognitivos en dicho proceso. Para ello, se diseñó un cuestionario con ocho problemas: tres que pueden inducir un sesgo; tres problemas equivalentes, cuya redacción evita cualquier sesgo y dos problemas típicos de libros de texto. Una jerarquía de razonamiento, adaptada a partir de la taxonomía SOLO, fue usada para clasificar las respuestas. Los resultados muestran que los componentes de conocimiento (definición clásica de probabilidad, regla del producto, combinaciones y fórmula de probabilidad binomial) son indicadores de transición entre los niveles. Además, la influencia de los sesgos es menor cuando la instrucción es mayor.

Palabras clave: jerarquía, niveles SOLO, razonamiento probabilístico, distribución binomial.

1. Introducción

Como la distribución binomial es una de las distribuciones de probabilidad discretas más importantes y el tema es parte del currículo de bachillerato y también de los primeros cursos universitarios de estadística, es pertinente ampliar las investigaciones sobre el tema. Además, la investigación sobre la comprensión de problemas binomiales se vuelve más compleja debido a que se ha encontrado que la gente responde a ciertos tipos de problemas de probabilidad influenciada por sesgos cognitivos, como representatividad, disponibilidad, la ilusión de linealidad, suposición de equiprobabilidad, etc. (Fischbein y Schnarch, 1997; Batanero y Sánchez, 2005). En consecuencia, es importante describir y analizar cómo los estudiantes, que han aprendido algunas técnicas de probabilidad, enfrentan problemas que pueden influenciar su respuesta hacia un sesgo cognitivo. ¿Son las respuestas de estos estudiantes similares a aquéllas de quienes no han estudiado probabilidad?

Además, para propósitos de enseñanza, no sólo es importante revelar la relación entre aprendizaje y sesgo cognitivo sino también comprender cómo adquieren los estudiantes el conocimiento de probabilidad, a través de un curso. Una forma para describir la adquisición de conocimiento es por medio de jerarquías; con ellas se pretende describir cómo y en qué orden los estudiantes aprenden cierto tipo de conocimiento (Hart, 1981). En este artículo, se usa una jerarquía para responder la interrogante: ¿Cómo aprenden los estudiantes la función de probabilidad binomial?

2. Antecedentes

Dos tipos de estudios se relacionan con este trabajo: uno sobre la elaboración de jerarquías de razonamiento probabilístico, y otro acerca del aprendizaje de la función de probabilidad binomial. La taxonomía SOLO (“Structure of Observed Learning Outcome”) se ha usado frecuentemente para analizar o evaluar la comprensión de conceptos estadísticos o probabilísticos resultantes en una jerarquía. Por ejemplo, Jones, Thornton, Langrall y Tarr

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 425-431). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

(1999) propusieron una jerarquía sobre espacio muestra, probabilidad experimental y teórica, comparación de probabilidades, probabilidad condicional e independencia.

Por otro lado, Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens, y Verschaffel (2003) exploran, en el contexto del razonamiento probabilístico, la presencia de un sesgo que llaman *la ilusión de la linealidad*. Éste consiste en la “tendencia fuerte a aplicar modelos lineales o proporcionales en cualquier lado, aún en situaciones donde no son aplicables” (p. 113); por ejemplo, en geometría, tener la creencia de que el área de un cuadrado de lado 2 es dos veces el área de un cuadrado de lado 1. Los autores muestran que estudiantes de bachillerato, a pesar de la instrucción en probabilidad, caen en este sesgo también, cuando se les plantean problemas de distribución binomial de probabilidad, cuyo enunciado contiene variables (*n*, *k*, $P(X = k)$, etc.) que aparentan ser o son proporcionales.

3. Marco conceptual

La taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982, 1991) se usó para definir una jerarquía que describa el razonamiento sobre la probabilidad binomial y analizar las respuestas al test. De acuerdo con Biggs y Collis (1991) cinco niveles de abstracción o modos de funcionamiento pueden ser distinguidos para describir el desarrollo del niño: sensoriomotor, icónico, simbólico-concreto, formal y post-formal. Dentro de cada modo, las respuestas llegan a ser crecientemente complejas y este crecimiento puede ser descrito en términos de niveles; los niveles de SOLO son: uniestructural (U) cuando la respuesta incluye sólo un componente relevante del concepto o tarea, multiestructural (M) cuando incluye dos o más componentes no relacionados o con relaciones espurias y relacional (R) cuando incluye muchos componentes con relaciones genuinas entre ellas. Dos niveles adicionales llamados *preestructural y abstracto extendido* conectan con el modo previo y siguiente, respectivamente.

Para los fines de este trabajo se consideró pertinente introducir algunas modificaciones a la taxonomía anterior. La taxonomía SOLO nos permite clasificar respuestas de los estudiantes de acuerdo a si presentan rasgos de elementos de conocimiento pertinentes para su solución. Sin embargo, en algunas respuestas de los estudiantes se muestran ciertos elementos de conocimiento pero de manera muy desordenada y con muchos errores. Esto llevó a Sánchez y Landín (2011) a redefinir una jerarquía SOLO para problemas binomiales, agregando componentes de desempeño. La taxonomía SOLO no prescribe qué hacer con los errores de forma que la jerarquía propuesta no está alineada con ella, esta es la razón por la que se prefirió los niveles numéricos de 1 a 5, en lugar de los niveles SOLO.

4. Metodología

En este estudio, el cuestionario usado en un estudio previo (Landín y Sánchez, 2010) fue reestructurado, aplicado a un nuevo grupo de estudiantes y los resultados clasificados con la jerarquía reestructurada.

Participantes. 26 estudiantes (17-18 años) de bachillerato.

Instrumentos. Dos cuestionarios (pretest y postest) con dos ítems comunes fueron elaborados con intención de colectar información acerca del razonamiento de los estudiantes sobre los componentes de la función de probabilidad binomial. En este trabajo sólo se analiza el problema 3 del cuestionario:

> *Problema 3*. ¿Qué es más probable?:
> a) obtener 1 águila en 2 volados
> b) obtener 2 águilas en 4 volados
> c) son igualmente probables
> Justifica tu respuesta:

Objetivo. En esta pregunta no se representan las secuencias "AA, AS, …" y "AAAA, AAAS, …" en el enunciado del problema, de manera que el estudiante necesita proponer una representación; de acuerdo a ésta (verbal o simbólica) se pueden observar indicios acerca del nivel en el que se ha interiorizado el esquema binomial. Además, la redacción del problema puede inducir al sesgo de la "ilusión de la linealidad" al considerar, erróneamente, que *k* y *n*, varían en proporción directa.

Procedimiento. Los datos de este estudio fueron obtenidos de un curso ordinario de probabilidad y estadística en una escuela preparatoria pública de México. El profesor fue uno de los autores (PRL), quien introdujo temas de probabilidad en dos sesiones semanales de 105 minutos, durante cuatro meses. La enseñanza combinó conferencias, actividades de resolución de problemas con papel y lápiz (los estudiantes eran estimulados a explicar sus procedimientos al resto del grupo) y mediante Excel.

La jerarquía. La jerarquía propuesta en Sánchez y Landín (2011) es descrita en la Tabla 1.

Tabla 1. Niveles de razonamiento para la función de probabilidad binomial

	Características de las respuestas
Nivel 1	Las respuestas son idiosincráticas o influenciadas por sesgo cognitivo (como representatividad, la ilusión de linealidad, la suposición incorrecta de equiprobabilidad u otras). Se pueden presentar rasgos de componentes de conocimiento pero sin coherencia o con gran cantidad de errores.
Nivel 2	Las respuestas están basadas en una descripción del espacio muestral, posiblemente incompleto, y el uso de la definición clásica de probabilidad. Se puede usar la regla del producto pero con errores u omisión de cálculos. Calcula el número de combinaciones a partir de listas o usa la fórmula pero con omisión de cálculos
Nivel 3	Las respuestas correctas están caracterizadas por el uso de la definición clásica de probabilidad o procedimientos combinatorios, en cualquier caso respaldados por diagramas de árbol. Se puede usar la regla del producto para obtener respuestas parciales y correctas. El número de combinaciones se puede obtener mediante el Triángulo de Pascal; también la fórmula de los coeficientes binomiales puede ser usada con cálculos incorrectos. La fórmula de probabilidad binomial se usa con omisión de cálculos.
Nivel 4	Las respuestas correctas son caracterizadas por el uso de la regla del producto y procedimientos combinatorios, acompañados o no por diagramas de árbol. La fórmula de combinaciones es usada para calcular, al menos parcialmente, coeficientes binomiales. El uso de la fórmula de probabilidad binomial puede generar respuestas con algunos errores de cálculo o respuestas parciales y correctas.
Nivel 5	El uso correcto de la fórmula de probabilidad binomial es mostrado en este nivel. Los valores de los parámetros (*n*, *p*, *k*) son identificados, sustituidos en la fórmula y los cálculos son bien hechos.

5. Resultados

En este apartado se muestran ejemplos de cómo se clasificaron las respuestas al problema 3 de acuerdo con la jerarquía de la Tabla 1; al final se presentan las gráficas de frecuencia de respuestas a las preguntas 3 y 7, según su nivel de razonamiento.

Las respuestas al problema 3 del postest fueron clasificadas en los diferentes niveles de la jerarquía. Tal problema requiere el modelo binomial para lograr su solución y formó parte también del pretest, por lo que es útil para comparar el desempeño de los estudiantes antes y después de la enseñanza.

Nivel 1. Es similar al nivel subjetivo de Jones et al. (1999) y el nivel preestructural de Biggs y Collis (1991). El procedimiento mostrado en la respuesta del estudiante 13 al problema 3 (Figura 1), está basado en la ilusión de la linealidad (se considera una proporcionalidad directa entre los parámetros *n*, *k*).

“Son eventos con la misma probabilidad porque son equivalentes:

1 águila en dos volados $= \frac{1}{2} = 0.5$

2 águilas en 4 volados $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$”

Figura 1. Respuesta al problema 3 en el nivel 1

Nivel 2. Es parecido al nivel transicional de la jerarquía de Jones et al. (1999) y en algunos aspectos al uniestructural de Biggs y Collis (1991). En la Figura 2, al responder al problema 3, el estudiante 7 construyó un diagrama de árbol para los dos eventos y posiblemente compara los casos favorables de cada experimento, concluyendo incorrectamente la opción b.

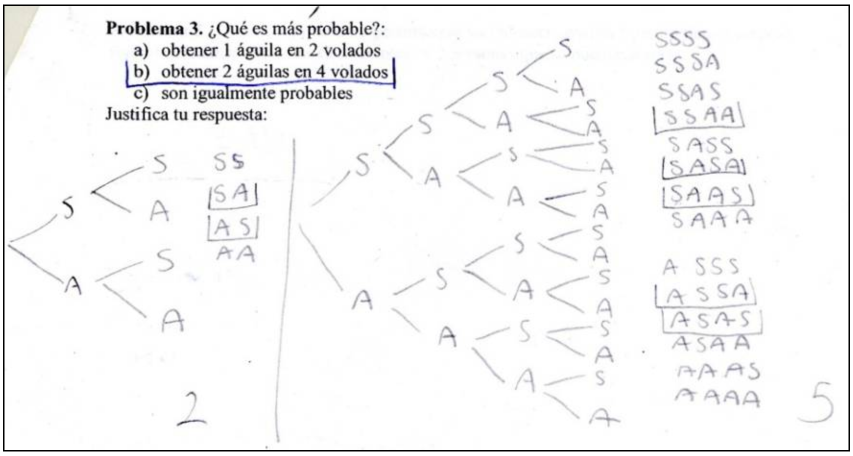

Figura 2. Respuesta al problema 3 en nivel 2.

Nivel 3. Este es similar al *nivel cuantitativo informal* de Jones et al (1999) y *multiestructural* de Biggs y Collis (1991). El estudiante 6, al contestar el problema 3 (Figura 3), construyó dos diagramas de árbol de probabilidad, identificó en ellos los resultados favorables y calculó sus probabilidades mediante la regla de la adición o definición de Laplace.

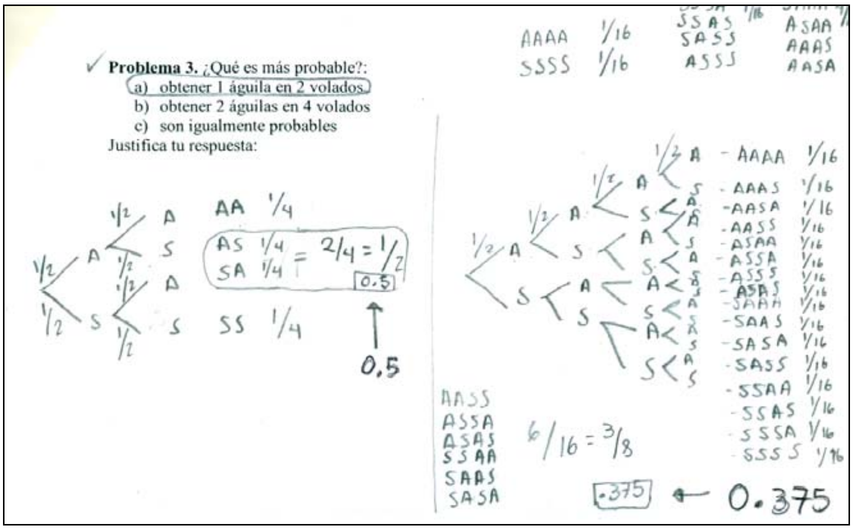

Figura 3. Respuesta al problema 3 en nivel 3.

Nivel 4. Es parecido al nivel numérico de Jones et al. (1999) y al nivel relacional de Biggs y Collis. En su respuesta al problema 3, el estudiante 22 (Figura 4) construyó dos diagramas de árbol de probabilidad, identificó los resultados favorables, usó la regla del producto y calculó las probabilidades de los eventos comparados. Se observa que usó nomenclatura funcional algebraica para indicar las probabilidades de resultados.

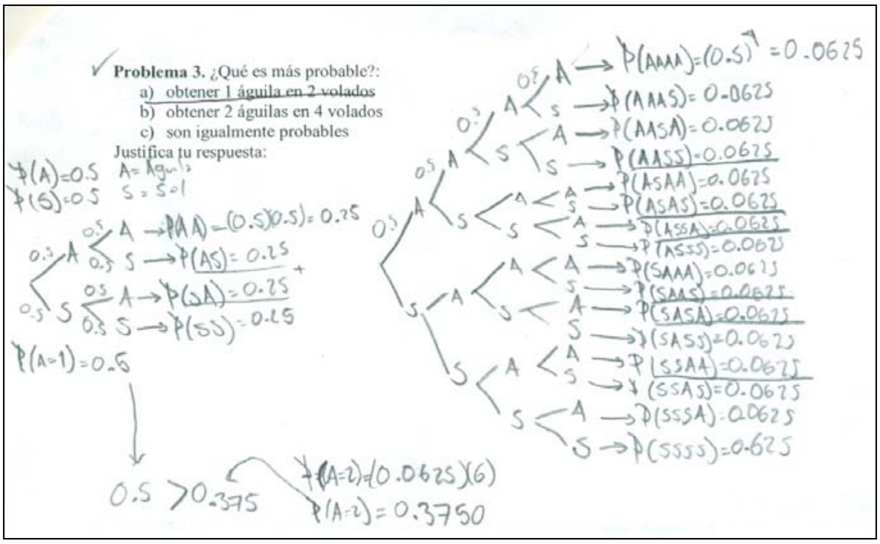

Figura 4. Respuesta al problema 3 clasificada en nivel 4

Nivel 5. Es similar al abstracto extendido de Biggs y Collis (1991). Sólo algunas respuestas a los problemas 4 y 7 fueron clasificadas en este nivel. En su respuesta al problema 7 (Figura 5), el estudiante 17 identifica correctamente los valores de los parámetros (*n*, *p*, *k*) de la fórmula de probabilidad binomial y, a través de ésta, calcula los valores de probabilidad solicitados. No tiene errores de ejecución.

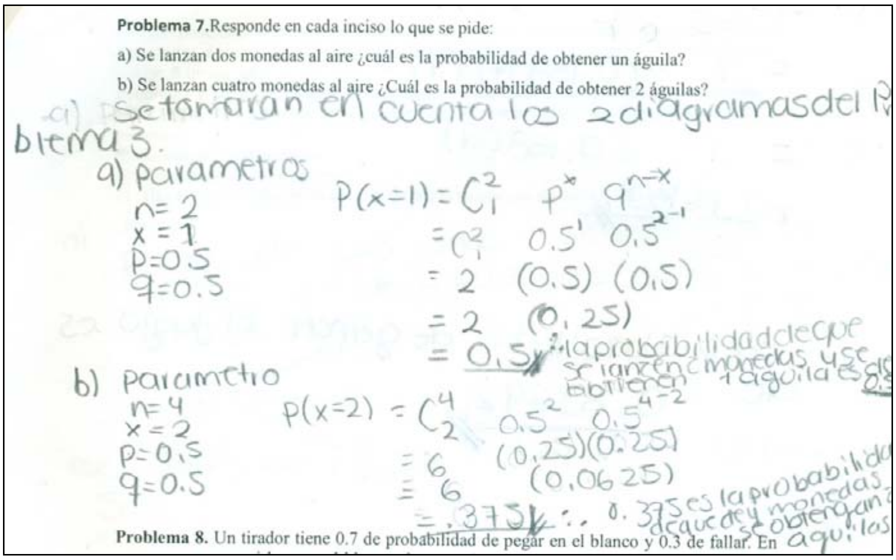

Figura 5. Respuesta al problema 7 clasificada en nivel 5

En la Figura 6 se presentan las frecuencias de respuestas por nivel a los problemas 3 y 7 del cuestionario (equivalentes estructuralmente). En ambos casos, al menos el 50% de tales respuestas fueron clasificadas en los niveles 3, 4 o 5. En poco más de la tercera parte de las respuestas posiblemente influyó el sesgo de la ilusión de la linealidad, a pesar de que los estudiantes llevaron lecciones de probabilidad. La similitud en las frecuencias correspondientes a cada nivel, muestra la fortaleza de tal sesgo antes y después de la enseñanza (Van Dooren et al., 2003).

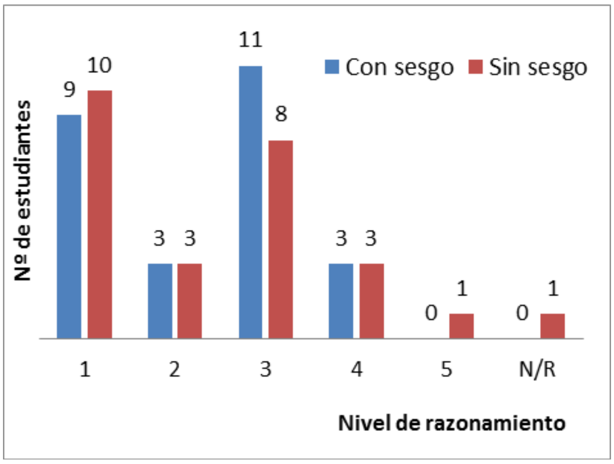

Figura 6. Frecuencias de respuesta, por nivel de razonamiento, a problemas equivalentes (3 y 7)

Como era esperado, el efecto del curso es notorio al comparar las respuestas al problema 3 dadas antes y después del estudio del tópico binomial (Figura 7); esto se muestra en que mientras en el pretest 96% de las respuestas fueron clasificadas en nivel 1, en el postest tal porcentaje se reduce al 35%. La principal característica que distingue la mayoría de las respuestas dadas antes de aquéllas dadas después de la instrucción es que en éstas fueron usados los diagramas de árbol.

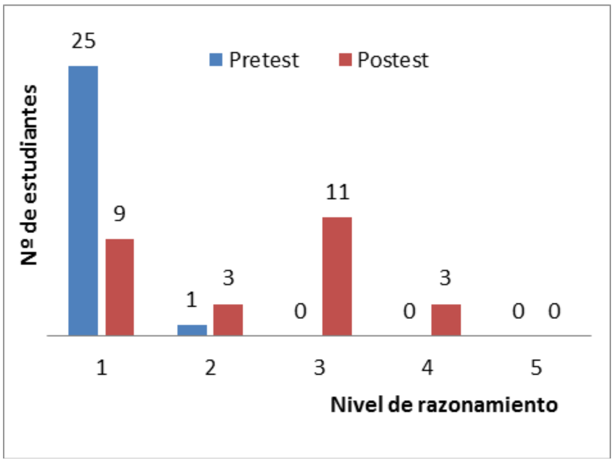

Figura 7. Frecuencias de respuesta, antes y después del curso, por nivel de razonamiento

6. Conclusiones

El desempeño de los estudiantes en problemas binomiales está basado en la articulación de muchos componentes de conocimiento, especialmente, la regla del producto de probabilidades y combinaciones; éstas en la forma de arreglos de tamaño n de éxitos y fracasos. El diagrama de árbol parece una herramienta que hace viable la adquisición de estos conceptos. La comprensión del funcionamiento de un diagrama de árbol ayuda a comprender la regla del producto de probabilidades y permite contar y tener control del número de secuencias de tamaño n de un número determinado de éxitos y fracasos. La siguiente etapa para mejorar la comprensión de la fórmula de probabilidad binomial es concebir y usar las combinaciones y la regla del producto (cuando no se apoyan en un diagrama de árbol es una muestra de que han comprendido dicha fórmula y sólo lo utilizan como un esquema general de organización y no como un instrumento de cálculo); el nivel de razonamiento que abarca esta comprensión es logrado por pocos estudiantes. Por otro lado, a diferencia de los problemas cerrados que se plantean en la investigación de Van Dooren et al. (2003), el uso de problemas abiertos y de una jerarquía para clasificar las respuestas ha permitido detallar el razonamiento de los estudiantes para comprender la función de probabilidad binomial.

Se considera que la redacción de los problemas influye la calidad de las respuestas cuando los estudiantes no habían tenido instrucción (para responder al problema 3 se recurre a la ilusión de la linealidad).Después de la enseñanza, tal influencia disminuye pero se observan dificultades debido a un uso inmaduro o inconexo de los componentes de conocimiento.

Entre las implicaciones para la enseñanza y aprendizaje, la jerarquía propuesta puede ser útil para facilitar la comprensión de conceptos básicos de probabilidad que ayudan a una mejor comprensión de la función de probabilidad binomial y otros temas relacionados.

Referencias

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability? En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, pp. 241-266. New York: Springer.

Biggs, J. y Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy*. Capítulo 2, pp. 17-31. New York: Academic Press Inc.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28* (1), 96-105.

Hart, K. (1981). Hierarchies in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 205-218.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Tarr, J. E. (1999). Understanding students probabilistic reasoning. En L. V.Stiff & F. R.Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (1999 yearbook, pp. 146-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3). On line: http://www.revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842.

Sánchez, E. y Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV,* Ciudad Real, España.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *53* (2), 113-138.