La relación entre la variable aleatoria y la variable estadística: un análisis epistemológico disciplinar

Ruiz Hernández, Blanca y Albert Huerta, José Armando

Tecnológico de Monterrey

Resumen

La variable aleatoria es un concepto probabilístico que permite el paso del cálculo de probabilidades de eventos al estudio de las distribuciones. Una de sus principales facetas es la vinculación que mantiene con la variable estadística y que sienta las bases para el estudio de la inferencia estadística. Sin embargo, diversas investigaciones muestran las dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático, aún en el nivel universitario.

A partir del análisis de contenido de diversos libros tanto de texto universitario de probabilidad y estadística como de otros introductorios a la teoría de probabilidad analizamos el objeto matemático variable aleatoria y la red de conceptos que giran a su alrededor. Hacemos énfasis en la relación que guardan las variables aleatoria y estadística y el papel que esta relación tiene en el proceso de modelación estadística. El propósito de nuestro estudio es obtener un acercamiento a la naturaleza epistémica de la relación entre ambos conceptos. Desde esta perspectiva, concluiremos con algunas posibles sugerencias que favorezcan la enseñanza de ambos objetos matemáticos y su relación sin desvincularlos de su naturaleza epistémica, en el nivel universitario.

Palabras clave: variable aleatoria, variable estadística, inferencia estadística, didáctica la estadística.

1. Introducción

El presente trabajo inicia con un análisis de la variable aleatoria en libros de texto universitarios. Los libros considerados tienen el propósito principal de la enseñanza de la teoría de probabilidades en niveles universitarios o de postgrado. Cuatro de ellos: Meyer (1989), Feller (1989), Wackerly, Mendenhall y Scheaffer (2002) y Devore (2011), tratan de presentar, junto con el desarrollo de la teoría probabilística, aplicaciones a la misma probabilidad en diversas áreas de la ingeniería y a sí mismos se califican de no rigurosos. Otros libros: Mood y Graybill (1963), Krickeberg (1973), Cuadras (1999) y Petrov y Mordecki (2002) describen la teoría matemática desde una perspectiva más rigurosa y sin más aplicaciones que las propias de la misma teoría. Uno más, Ríos (1967) presenta una perspectiva diferente. Su enfoque más bien va hacia la estadística, la probabilidad la maneja desde una perspectiva útil para esta última. El trabajo se complementó con otros libros que proporcionan elementos importantes para concluir nuestro análisis. Tal es el caso del libro de Boudot (1979) de corte filosófico y al de Godino, Batanero y Cañizares (1996) que trata de mostrar los temas de azar y probabilidad desde una perspectiva didáctica.

Por otra parte, la modelación de fenómenos aleatorios abordados a nivel universitario está fuertemente vinculada la variable aleatoria, pero aparecen ligados otros muchos conceptos (parámetro, estadístico, probabilidad, distribución, función), así como un lenguaje específico (verbal, simbólico y gráfico), propiedades, definiciones y argumentos específicos. Por eso, la variable aleatoria no sólo es un concepto matemático, sino una configuración de objetos matemáticos y a la vez un instrumento de modelación para la resolución de problemas en el que se requiere encontrar la regla de correspondencia que asigne valores

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 383-390). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

numéricos a los resultados de un experimento aleatorio, que cumpla con ciertos criterios matemáticos y que, a su vez, esté vinculada con un contexto real. Finalmente se muestra que el concepto de variable aleatoria es esencial para la modelación de fenómenos vinculados con el azar, a nivel universitario, y necesita mayor atención didáctica.

2. La variable aleatoria

El tema que nos ocupa parte de una situación aleatoria (experimento), cuyo resultado se puede valorar mediante una medida cuantitativa (usualmente referida a una cierta magnitud). En las situaciones aleatorias «para caracterizar el resultado de un experimento, no basta con decir que se ha producido un determinado suceso, sino que es preciso dar cuenta de las diversas medidas que se hayan efectuado. La variable aleatoria, es decir, la magnitud que 'depende del azar', es entonces indispensable» (Boudot, 1979, p. 332). La variable aleatoria es la herramienta matemática que permite pasar del estudio de sucesos aislados al estudio de las *distribuciones de probabilidad*, que son funciones reales y por lo tanto, hace posible la aplicación del análisis matemático y de otras herramientas matemáticas a la estadística (Batanero, 2001).

Una definición formal de variable aleatoria se reproduce a continuación:

> Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un *espacio* de probabilidad y R el cuerpo (o campo) de los números reales. Se dice que la aplicación:
>
> $$\begin{aligned} \xi : \quad \Omega &\rightarrow \quad R \\ \omega &\rightarrow \quad \xi(\omega) \in R \end{aligned}$$
>
> que a cada suceso elemental hace corresponder un número real, *es una variable aleatoria* si para todo número real x, se verifica la relación:
>
> $$(1) \qquad \mathrm{A} = \{\omega \mid \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$
>
> es decir, se verifica que A es un suceso. (Cuadras, 1999, p 71-72).

Así, la definición matemática de la variable aleatoria exige que la imagen inversa de todo $\xi^{-1}(\omega)$ sea un elemento del álgebra $\mathcal{A}$, porque una vez definida una medida de probabilidad P sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la variable aleatoria puede determinar una medida de probabilidad sobre $(R, \mathcal{B})$, en donde $\mathcal{B}$ es la sigma-álgebra construida por los conjuntos de Borel en R. De esta forma, la variable aleatoria induce una medida normada sobre los conjuntos que representan a los sucesos (Godino, Batanero y Cañizares, 1996).

Así mismo se observa que la variable aleatoria está definida para todo suceso del álgebra de sucesos, y no sólo para los puntos muestrales (elementos del conjunto Ω). Es decir se trata de una aplicación de $\mathcal{A}$ en R, lo que garantiza que la imagen inversa de cualquier elemento del conjunto imagen pertenezca a $\mathcal{A}$ y por tanto podamos posteriormente calcular su probabilidad, que estaba definida previamente sobre $\mathcal{A}$.

Un caso particular importante es el de experimentos aleatorios en los que aparentemente la variable aleatoria está implícita en los puntos muestrales. Por ejemplo, el experimento consiste en observar el tiempo de espera a un autobús, el número de llamadas telefónicas que espera un conmutador o la medida de la altura de una mujer, en tal caso $\omega = \xi(\omega)$. Sin embargo, generalmente a partir de un mismo experimento aleatorio se pueden definir diferentes variables aleatorias o bien a partir de operaciones algebraicas o analíticas entre variables (en donde se pueden incluir variables no aleatorias) se generan nuevas variables aleatorias. Por ejemplo, en el experimento aleatorio de extraer de una urna el nombre de un trabajador de una fábrica, la variable aleatoria podría ser el «número de miembros de la familia del trabajador ganador» pero también podría ser el «número de años que tiene laborando en la fábrica el trabajador ganador» o cualquier otra característica dependiendo del motivo por el que se está interesado en efectuar esa extracción.

Entonces, la definición de la variable aleatoria está condicionada por dos contextos, el matemático y el dado por el problema. Es en este sentido que para Miller (1998) es tan importante hacer la distinción sobre la forma en que se define a la variable aleatoria en el discurso escolar. Él alerta sobre las dificultades posteriores que puede traer consigo confundir el resultado del experimento con la variable aleatoria o el espacio muestral del experimento con el conjunto de valores que puede tomar la variable.

En este sentido, una propuesta didáctica interesante es la que hace Parzen (1971). Él plantea introducir la variable aleatoria y «toda la abrumadora cantidad de nociones que hay que introducir simultáneamente» (p. 8) a través de fenómenos aleatorios con resultados numéricos (p. 172). Posteriormente, Parzen propone definir el objeto matemático variable aleatoria y aclarar que en los fenómenos aleatorios con resultados numéricos, ésta es la función identidad. Parzen pone énfasis en que «hay que aprender a reconocer y formular matemáticamente como funciones los objetos descritos verbalmente que sean variables aleatorias» (p. 300). Cuando Parzen se refiere a «la abrumadora cantidad de nociones que hay que introducir simultáneamente» a la variable aleatoria no sólo se refería a la definición de espacio probabilístico y de distribución, sino también, entre otros, a las medidas de posición central, dispersión y posición y a los momentos de la variable aleatoria. En realidad la definición de la variable aleatoria y su distribución apenas definen el modelo que auxilia en la resolución del tipo de problemas que nos ocupa. Las medidas de tendencia central, de dispersión y posición son, la mayor parte de las veces, las que proporcionan la solución directa.

3. La variable estadística y la variable aleatoria

Anteriormente se introdujo la variable aleatoria directamente a partir de la idea de experimento aleatorio. Otra introducción presentada en algunos textos es a partir de la idea de variable estadística, por ejemplo, en Ríos (1967):

> Si consideramos un experimento aleatorio *S* y realizamos un cierto número *n* de pruebas relativas al mismo, obtenemos un conjunto de observaciones, que se llama una *muestra aleatoria de extensión n*. Este conjunto de resultados dará lugar a una tabla estadística en que a unos ciertos valores de la variable corresponden una ciertas frecuencias. A tal *variable, que representa únicamente los n resultados de n realizaciones del experimento aleatorio S la denominaremos variable estadística.* (Ríos, 1967, p. 70. Las cursivas son del texto original.)

Y la variable aleatoria la concibe como el resultado de la repetición indefinida del experimento:

> Si imaginamos hechas una infinidad de pruebas relativas al experimento *S* la infinidad de resultados posibles da origen a la noción de variable aleatoria asociada al experimento *S*. En este caso la variable aleatoria toma los valores que representan los sucesos elementales posibles de dicho experimento con unas ciertas probabilidades que le corresponden. (Ríos, 1967, p. 70).

El autor explica que los conceptos concretos de muestra, frecuencia y variable estadística, llevan, por un proceso de abstracción, a los de población, probabilidad y variable aleatoria. Habla de la distribución de frecuencias o distribución acumulativa de frecuencias que, al generalizarse, dan lugar a la distribución de probabilidad y función de distribución.

Sin embargo, hay algunas acotaciones a estas definiciones que merece la pena mencionar. De acuerdo con ellas, la variable estadística se relaciona con una *muestra* de datos, en cambio la variable aleatoria se relaciona con la *población*, aunque en ambos casos se supone la existencia de un «experimento aleatorio *S*» vinculado con la recolección de los datos. Pero esta definición sólo se aplica cuando la asignación de probabilidades es frecuencial, pues en este caso se parte de una variable estadística y es mediante un proceso de inferencia que se llega a la variable aleatoria. Cuando la asignación es clásica, por ejemplo, el espacio muestral puede provenir de un análisis teórico o bien del recuento del total de datos de la población. En tal caso, la definición de variable aleatoria no requeriría del proceso que menciona Ríos. También hay casos en la probabilidad clásica en que sería necesario trabajar con la variable estadística si se plantean problemas de muestreo. También existen variables aleatorias o estadísticas compuestas que se definen a partir de otras variables aleatorias o estadísticas.

Observemos también que Ríos establece la presencia del experimento aleatorio en la conceptualización de ambas variables. Una definición más teórica de variable aleatoria está de acuerdo en la relación que ella guarda con un experimento aleatorio, lo cual, en algunas ocasiones, no ocurre con la variable estadística. Estas situaciones serían aquellas en las que se obtiene el total de datos de la población (censo) con objetivos descriptivos. De acuerdo con la definición de variable estadística (dada **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) habrá un experimento aleatorio que se usa para recolectar datos, pero en el caso de un censo no hay un muestreo aleatorio, puesto que todos los miembros serán seleccionados. En esta situación la definición de la variable como aleatoria o estadística no depende del número de pruebas sino del uso que se le dé a los datos. Si el objetivo es descriptivo, la variable sería estadística, sin la realización del experimento aleatorio en la recolección de los datos, pero si el objetivo fuera conocer la probabilidad de que un miembro tenga cierta característica, sería aleatoria, puesto que el experimento aleatorio involucrado estaría dado por la selección aleatoria de un miembro de esa población y el espacio muestral es conocido (obtenido empíricamente a través de la recolección total de los datos). Es decir, en esta última situación la recolección de datos no estaría dada por la repetición del experimento aleatorio. Además, en el caso de un censo, y para una variable discreta, la distribución de probabilidad aparentemente sería la misma que la distribución de frecuencias relativas: su gráfica tendría la misma forma y sus valores serían los mismos, pero conceptualmente serían muy diferentes. La gráfica y los valores de la distribución de una variable estadística, conceptualmente cambiarían por completo en el momento en que una persona esté interesada por contestarse alguna pregunta probabilística con respecto a esa población, puesto que esa misma gráfica y los mismos números representarían la distribución de una variable aleatoria. Esto podría generar confusiones en las conceptualizaciones de los estudiantes.

De manera general, la variable estadística está relacionada con la recolección de una muestra de datos y la variable aleatoria con un conocimiento del espacio probabilístico (obtenido teórica o empíricamente a través de un censo). La variable aleatoria siempre está vinculada con un experimento aleatorio, pero la estadística no necesariamente. La aleatoria está vinculada con las diversas asignaciones de probabilidad, ya sea laplaciana, frecuencial, subjetiva o alguna otra, en cambio la estadística lo está con la obtención de las frecuencias.

4. Modelación y variable aleatoria

La variable aleatoria es un modelo matemático para describir situaciones reales (Chaput, Girard y Henry, 2011) y a su vez, uno de los elementos que determinan la modelación de la función de distribución (inseparable de la variable). De este modo la variable aleatoria es un objeto matemático que describe «la realidad» y se convierte en la «realidad matemática» que se modela mediante la función de distribución.

Desde el punto de vista didáctico, la generación de modelos probabilísticos y estadísticos se enfocan al proceso de construcción de conocimiento en la escuela y en la vinculación que, a través de éste proceso, el estudiante puede establecer con la teoría científica ya instaurada. Describir el proceso de modelación que siguen los estudiantes cuando se enfrentan a un problema en el que está en juego el objeto matemático de variable aleatoria y la teoría alrededor de él, es uno de los objetivos de la didáctica de la estadística. Lo que forzosamente deberá incluir el razonamiento con y a través de la teoría, lo cual conlleva al estudio del razonamiento con modelos probabilísticos y estadísticos, y la modelación como un proceso de enseñanza.

El razonamiento estadístico trabaja a partir del conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información proporcionada por los datos. El trabajo de modelación con la variable aleatoria requiere una síntesis entre el conocimiento del contexto y el conocimiento estadístico en donde la variable aleatoria juega un papel importante: surge del contexto y permite la matematización del problema. Para Wild y Pfannkuch (1999) los modelos son formados con datos tomados del contexto real incorporando «conocimiento experto» y en los modelos estadísticos alguna de esa información que se toma de la realidad ya son datos estadísticos. Por su parte, Coutinho (2001) retoma la modelación propuesta por Dantal (1997), quien describe el proceso de modelación deseable en el salón de clases compuesto por los siguientes pasos: (1) Observación de la realidad; (2) Descripción simplificada de la realidad; (3) Construcción de un modelo; (4) Trabajo matemático con el modelo; (5) Interpretación de resultados en la realidad. No se trata de un proceso rutinario, puesto que el estudiante no estará en posesión de todo el conocimiento matemático necesario para resolver el problema, muy al contrario, en este proceso se espera que el estudiante lo adquiera. La construcción se establece en un ritmo que se asemeja a la generación del conocimiento científico.

Por otra parte, Heitele (1975) asegura que la modelación en contexto estocástico algunas veces los mismos objetos son tomados como «realidad» y otras como «modelo». Así por ejemplo, en muchas situaciones de modelación la simetría o las frecuencias relativas son consideradas parte de la realidad, pero en otras se objeta que el concepto de simetría ya es en sí un modelo y que registrar frecuencias relativas significa cuantificar la realidad, lo cual presupone la generación de un modelo. Heitele resuelve esta aparente inconsistencia estableciendo las relaciones entre realidad y objetos matemáticos en una estructura de estratos. Esto es, sin duda los valores numéricos de los datos se pueden considerar como un modelo (una vez que se ha establecido una variable, por ejemplo), pero desde un estrato más alto, se les puede ver como parte de la realidad. Lo cual significa que se ha pasado de una realidad palpable y visible a una «nueva realidad» en la que los valores de una variable emergen como hechos reales. Este último sería el esquema de acuerdo al cual las frecuencias relativas de una variable son mapeados sobre probabilidades, concebidas en las mentes humanas dentro de un modelo matemático.

Por otro lado, Henry (1997) afirma que la construcción de modelos y su perfeccionamiento progresivo intervienen en cada fase de la resolución de problemas estadísticos, no sólo en situaciones prácticas, sino también en trabajo de desarrollo teórico. Para él, la modelación no sólo implica un proceso que requiere ser retomado una y otra vez para su mejora sino también que la resolución de un problema estadístico puede dar lugar a varios procesos de modelación sucesivos. En un cierto sentido, Henry está de acuerdo con Heitele en que la modelación puede tener distintos estratos dentro de un mismo proceso de resolución de problemas y afirma que por ello es importante diferenciar el modelo de la realidad. Tanto Heitele como Henry aportan propuestas útiles para nuestra investigación, ya que en un proceso de resolución de problemas en el que la variable aleatoria se vea involucrada, forzosamente se deberá pasar por lo menos por dos estratos de modelación, o dos procesos de modelación de acuerdo con Henry. El primero es la formulación de la variable y el segundo es la formulación de la función de distribución como modelo matemático. En ambos estratos la variable desempeñará un papel dual, en un primer estrato será el modelo obtenido y en el otro, la realidad. Esto ocurre principalmente cuando se considera la probabilidad laplaciana como modelo de asignación de probabilidades al espacio muestral.

5. Relación entre las variables estadística y aleatoria en la modelación

Por otra parte, mientras que los textos de estadística matemática o probabilidad, como Meyer (1989), enfocan la variable aleatoria únicamente desde la probabilidad clásica laplaciana para aplicar estos modelos al análisis estadístico, otros autores (como Ríos, 1967) hacen compatibles las concepciones clásica y frecuencial, para posibilitar la aplicación de la inferencia a las situaciones prácticas. Para Ríos, la teoría de probabilidades es «el modelo matemático de las regularidades que se observan en las series de frecuencias correspondientes a los fenómenos aleatorios» (p 73). Desde esta perspectiva hay dos simplificaciones de la realidad para pasar a un modelo matemático: en la primera, se eliminan resultados posibles inconvenientes o poco usuales: que un dado caiga sobre una arista, que la moneda caiga de canto, que exista una carta en blanco en un mazo de póker, etc. En la segunda, se admite la estabilidad de las frecuencias de los sucesos posibles. Es decir, que las frecuencias tienden a acercarse a un valor teórico de probabilidad. Ríos presenta la base empírica de la teoría de probabilidades a partir de la observación de la estabilidad de las frecuencias relativas que permite definir la probabilidad frecuencial y por lo tanto, en la búsqueda de su regularidad, hace uso de la variable estadística. De acuerdo con él, la realidad nos lleva a observar la estabilidad de las frecuencias y sus propiedades. Por un proceso de conceptualización pensamos en la existencia de un límite de las frecuencias relativas (probabilidad) admitiendo como axiomas las propiedades observadas empíricamente en las frecuencias relativas. Una vez admitidos estos axiomas básicos, es posible deducir todo el cálculo de probabilidades y a partir de él, los modelos que constituyen la estadística matemática de manera inmediata, con lo cual ya es posible trabajar con ellos para dar una solución al problema planteado. La última fase de la modelación sería la interpretación del modelo en la realidad para determinar la solución a las preguntas planteadas.

6. La variable aleatoria y los modelos de distribuciones

Batanero (2001) indica que un ejemplo notable de modelación estadística a partir de un problema práctico son las distribuciones de probabilidad, que permiten describir en forma sintética el comportamiento de las distribuciones empíricas de datos estadísticos y hacer predicciones sobre su comportamiento. Por su parte, Krickeberg (1973) sostiene que si estamos interesados en la variable aleatoria X, en realidad lo estamos en su función de distribución, puesto que ésta nos proporciona las probabilidades con las cuales el valor $X(\omega)$ está comprendido dentro de los diferentes conjuntos de $\mathcal{A}$ en una observación aleatoria con resultado ω. Sin embargo otros autores (Meyer, 1989; Feller, 1989) sostienen que es en la variable aleatoria en la que radica la importancia de las distribuciones de probabilidad puesto que es ésta en la que se manifiesta el espacio muestral y el experimento y por lo tanto la *realidad*.

Como regla de correspondencia y desde una perspectiva puramente matemática, la variable aleatoria podría ser arbitraria, siempre y cuando el espacio muestral definido satisfaga las condiciones establecidas en la definición (Mood y Graybill, 1963), pero desde una perspectiva de modelación, la regla de correspondencia debe tener un sentido a partir de una pregunta que se pretenda resolver.

7. Conclusiones

A lo largo del presente trabajo, se ha visto que, como un objeto matemático complejo, la variable aleatoria se relaciona con otros objetos matemáticos que tienen sus propias complejidades y que, a su vez, éstos influyen en cómo se conforma y las acepciones que de él se tengan. Desde una perspectiva educativa, esto hace que el objeto de nuestro interés sea difícil de analizar si no se tiene una clara definición del alcance que se pretende en los estudiantes. Los libros analizados conforman una muestra de la diversidad de alcances y enfoques con los que se puede enseñar y analizar la teoría en los que se sustenta.

La visión en la escuela tendrá que ser limitada, sobre todo cuando se trata de cursos introductorios en el nivel universitario, pero también completa porque las concepciones tratadas tendrán que mostrarse como la conformación acabada de una idea que les será útil profesionalmente a nuestros estudiantes, sobretodo porque para muchos planes de estudio, los cursos introductorios son los únicos cursos de probabilidad y estadística que se imparten. El concepto explícito de la variable aleatoria como el objeto en el que está sustentado el paso de la matemática de conjuntos al análisis matemático deberá ser pospuesto para cursos más especializados o carreras más específicas, sin embargo no es deseable posponer el rol implícito que juega este concepto en la aplicación de la teoría de probabilidad y estadística matemática en cualquier profesión y en la cotidianeidad mundana. La modelación de situaciones aleatorias y el papel de la variable aleatoria en ella son clave para lograrlo, aunque la modelación tampoco es un aspecto simple. Las acepciones de los conceptos involucrados con nuestro objeto de estudio también modifican la forma en que se desarrolla el proceso al resolver un problema en el que está vinculado la variable aleatoria. Sin embargo, dentro de toda esta diversidad, se condicionan las acepciones y construcciones de la variable aleatoria sobre el significado de la probabilidad.

La teoría de la probabilidad no da cuenta de la forma en que se conforma el espacio de probabilidad. Define las condiciones de una probabilidad que llamaremos axiomática y con ello proporciona ciertas condiciones sobre las que descansa el resto de la teoría. Sin embargo, la relación de esta teoría con la realidad está dada a través de la forma en que se asigna el valor de probabilidad y por lo tanto, esta asignación también indicará como opera y surge la variable aleatoria. Es decir, los significados que aporta la teoría a la realidad y viceversa provienen de esa asignación. Por lo tanto, también es importante tratar las diferentes formas de asignar la probabilidad, al menos la clásica y la frecuencial, y relacionarlas con la noción de variable aleatoria.

Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de investigación en educación estadística.

Boudot, M. (1979). *Lógica inductiva y probabilidad*. Madrid: Paraninfo.

Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2011). Modeling and simulations in statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.) (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education*. A Joint ICMI/IASE Study (pp. 85-95). New York: Springer.

Coutinho, C. (2001). *Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre-II*. Tesis Doctoral. Universidad de Grenoble.

Cuadras, C. (1999). *Problemas de probabilidades y estadística*. (Vol. 1). Barcelona: EUB.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. *En Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 57-59). Reims: Commission Inter-IREM.

Devore, J. (2011). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: Cengage Learning.

Feller, W. (1989). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones* (Vol. 1). México: Limusa.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(3), 187-205.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En *Enseigner les probabilités au lycée*, Commission Inter-IREM, Reims, 77-84.

Krickeberg, K. (1973). *Teoría de la probabilidad*. Barcelona: Teide.

Meyer, P. (1989). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. México: SITESA: Addison Wesley Iberoamericana.

Miller, T. K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. En L. Pereira-Mendoza (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 1221-1222). Singapur: IASE.

Mood, A. y Graybill, F. (1963). *Introducción a la teoría de la estadística*. Madrid: Aguilar.

Parzen, E. (1971). *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones*. México: Limusa.

Petrov, V. y Mordecki, E. (2002). *Teoría de probabilidades*. Moscú: Editorial URSS.

Ríos, S. (1967). *Métodos estadísticos*. Madrid: Del Castillo.

Wackerly, D., Mendenhall, W. y Scheaffer L. (2002). Estadística matemática con aplicaciones. México: Thompson.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discussion). *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.