El centro de recursos CRDM-Guy Brousseau y el análisis estadístico implicativo como herramienta en la formación de profesores

Orús Báguena, Pilar, Peydró Pons, Laura y Gregori Huerta, Pablo

Universitat Jaume I de Castellón

Resumen

Los fenómenos involucrados en la actividad docente tienen un nivel de complejidad que precisa que se analicen a través de una gran cantidad de variables, difíciles de interpretar por sí solas. El Análisis Estadístico Implicativo es uno de los métodos de análisis de datos, concebido en el campo de la Didáctica de las Matemáticas (Gras, 1979), que pretende desvelar relaciones de causalidad entre las variables estudiadas. Por ello consideramos interesante que el profesorado conozca esta herramienta y la pueda utilizar en su práctica docente, ya que permite confirmar o refutar algunas creencias del profesor, así como descubrir otro tipo de relaciones que hasta el momento no le fueran evidentes.

Asimismo, la Universitat Jaume I de Castellón dispone de un fondo de recursos de Didáctica de las Matemáticas de reciente creación, el CRDM-*Guy Brousseau* (http://www.imac.uji.es/CRDM), que contiene valiosos documentos producidos durante 28 años (de 1972 a 1999) en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) que pueden ser muy útiles para la formación del profesorado de Matemáticas.

En el trabajo que presentamos se pretende difundir tanto la herramienta estadística como la existencia y las posibilidades del fondo documental de cara a la formación de profesores, a través del análisis estadístico de un ejemplo de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Palabras clave: Análisis estadístico implicativo, didáctica de las matemáticas, formación de profesores, recursos didácticos.

.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo va orientado a la formación de profesores. De una parte, se quiere hacer hincapié en una rama del análisis estadístico multivariante, el Análisis Estadístico Implicativo (ASI), iniciada hace más de treinta años en Francia, dentro del ámbito de la Didáctica de las Matemáticas (DM), y que se ha venido desarrollando y aplicando por investigadores principalmente de países francófonos (Gras et al., 2009). Sin embargo, estos últimos años se está dando a conocer en la literatura anglosajona (Gras et al., 2008) e hispanohablante (Orús et al., 2009), y se están encontrando un gran número de áreas de conocimiento donde estas técnicas están dando frutos.

Asimismo, se desea difundir la existencia de un reciente fondo documental de investigación en DM localizado desde 2010 en la Universitat Jaume I de Castellón (UJI).

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 221-228). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

2. El Análisis Estadístico Implicativo

2.1. Interés del Análisis Estadístico Implicativo, para la investigación en Didáctica de las Matemáticas

El desarrollo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas (DM) está profundamente relacionado desde sus inicios con el Análisis Estadístico Multidimensional, al que considera un instrumento esencial, y al ASI una herramienta específica para resolver problemas de investigación surgidos desde la DM (las referencias citadas en este trabajo son traducciones de los autores del texto extraído de Gras, 1995).

André Rouchier, Presidente en ese momento de la *Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques*, explicita y desarrolla la naturaleza de esta estrecha y fructífera relación a lo largo de toda la Introducción a dichas Actas (pp.3-5), citando como una de sus referencias previas 1975, año en que el IREM de Bordeaux organiza por iniciativa de G. Brousseau el Coloquio l'*Analyse de la Didactique des Mathématiques*, marcado por una fuerte preocupación por los métodos a utilizar en la investigación en DM y particularmente por el análisis de datos. Rouchier (1995) continúa citando entre otros trabajos, las tesis de F. Pluvinage, R. Gras, A. Larher, S. Ag Almouloud, H. Ratsimba-Rajohn, A. Totohasina, y M. Bailleul, como testimonio de que los Métodos de Análisis Estadísticos Multidimensionales forman un dominio de investigación fuertemente asociado a ciertas cuestiones de fondo de la Didáctica Fundamental, ligadas a la naturaleza de la investigación realizada sobre el saber en matemáticas involucrado en los sistemas didácticos y que responde a las preguntas siguientes:

- ¿Qué saber detenta una población de alumnos, confrontada a una población de problemas, ejercicios o situaciones?
- ¿En qué o cómo, tal población de ejercicios, problemas o situaciones puede ser una buena candidata para asegurar una buena representación de un saber determinado a fin de permitir eventualmente su enseñanza y por tanto su aprendizaje?
- Toda enseñanza consiste en proponer a los alumnos un número finito de situaciones, problemas y ejercicios, aceptando la idea de que el conocimiento de (o el éxito a) este sistema de situaciones permitiría confrontarse a cualquier otra situación relativa a ese saber. ¿Quién tiene, desde el punto de vista del saber, ese carácter "generador" de un sistema de ejercicios? ¿Cómo determinar, si existen, estos sistemas generadores?

De acuerdo con Rouchier (1995):

> vemos que la clave de estos trabajos [iniciados en 1975], que conciernen directamente a los saberes mismos, que conciernen a las poblaciones a las que son confrontados, que conciernen a los profesores, sus concepciones y sus prácticas, no reside en un método (un conjunto de métodos) o en una técnica (o un conjunto de técnicas) sino a las cuestiones recordadas anteriormente y en torno a las cuales se ordenan todos ellos.

Nos gustaría volver a mostrar, en nuestro trabajo, que estas cuestiones iniciales para la Didáctica de las Matemáticas siguen generando, hoy día, problemas de investigación e informaciones que pueden ser abordadas conjuntamente desde la Didáctica y desde el análisis de datos, y de forma particular desde el ASI.

Un trabajo colectivo sobre la enseñanza de la división y los recursos de DM del CRDM-*Guy Brousseau* (CRDM-GB), realizado por docentes e investigadores de diferentes niveles y modalidades de la Universidad Nacional de Córdoba en Argentina (Fregona y Orús, 2012; Brousseau et al., 2012) y de la UJI de Castellón, nos ha conducido hasta los datos que analizaremos en esta comunicación.

2.2. La herramienta estadística

El concepto de cuasi-implicación, eje central del ASI, relaja al de implicación, de modo que se trata de una regla que admite contraejemplos: *"cuando un individuo presenta el rasgo A, entonces, generalmente, también presenta el rasgo B"*. La fuerza de la cuasi-implicación se mide al comparar el número de contraejemplos presentes, con los que aparecerían bajo una ausencia de relación estadística. Esta filosofía conduce a varias modelizaciones posibles, entre las que describimos una: si de n individuos muestreados, el rasgo A se presenta en n_a de ellos, y el rasgo B en n_b de ellos, entonces se podría asumir que: (1) la observación de un individuo que presenta el rasgo A ocurre con probabilidad n_a/n, y con independencia entre individuos, (2) la observación de un individuo que *no presenta* el rasgo B ocurre con probabilidad $(n-n_b)/n$, y con independencia entre individuos, y (3) la ausencia de relación estadística entre A y B conlleva a que la observación de un individuo contraejemplo de a → b (es decir que presenta el rasgo A y no presenta el rasgo B) ocurre con probabilidad $n_a(n-n_b)/n^2$.

Así pues, el número aleatorio de contraejemplos a la regla a → b, que podemos denotar por N_{ab}, al muestrear n individuos bajo independencia, sigue el modelo binomial de parámetros n y $n_a(n-n_b)/n^2$.

Ejemplo: En el estudio que detallamos en la Sección 3.2 analizamos las estrategias y el éxito que alcanzan alumnos frente a seis situaciones (problemas) en torno al concepto de la división. Detallamos cómo mide el ASI la fuerza de la eventual relación implicativa sobre el éxito en las situaciones 1 y 2 (variables S1 y S2, que describen el rasgo de realizar con éxito cada situación). Mostramos los datos en la Tabla 1.

Tabla 1. Datos

S1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
S2	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0

Tenemos 8 individuos con el rasgo S1 presente y 7 con el rasgo S2 ausente de un total de 21 individuos. De ellos, sólo 4 son contraejemplos a la implicación a S1 → S2 (que presentan el antecedente y no el consecuente). Una ausencia de relación estadística entre S1 y S2 y la modelización descrita anteriormente provoca un número de contraejemplos aleatorio que sigue el modelo binomial de parámetros n=21 y p= 0,254, y que se distribuye como se observa en la Figura 1.

Como se puede ver, es muy extraordinario encontrar 0 ó 1 contraejemplos, y algo difícil, pero menos, encontrar 2 contraejemplos. La fuerza de la implicación se mide entonces con el grado de dificultad de que el puro azar dé lugar al mismo número de contraejemplos, o menos, que el encontrado en la muestra. Mirando de nuevo la Figura, podemos admitir que los 4 contraejemplos encontrados en la muestra son fácilmente atribuibles al azar, por lo que la *intensidad* de la implicación S1 → S2 será baja. En efecto:

$$\varphi(S1,S2) = P(N_{ab} > 4) = 0.6482171$$

A partir de aquí, este campo se ha ido desarrollando durante los últimos 30 años, con contribuciones teóricas que han ampliado el ámbito de aplicación desde las variables binarias (de presencia/ausencia), como las tratadas en nuestro ejemplo, a variables de todo tipo (nominal, ordinal, escala, incluso difusas) y ha desarrollado, en particular, un método jerárquico de agrupación de variables, al estilo de los árboles jerárquicos de clasificación del Análisis *Cluster*, que, a diferencia de éste, agrupa variables de forma no simétrica, pues se basa en la cuasi-implicación entre ellas. Se le ha llamado *Análisis de Cohesión*, y es muy útil como herramienta de Análisis Exploratorio, pues estructura las variable analizadas en "reglas de reglas" (como cuasi-corolarios a cuasi-teoremas).

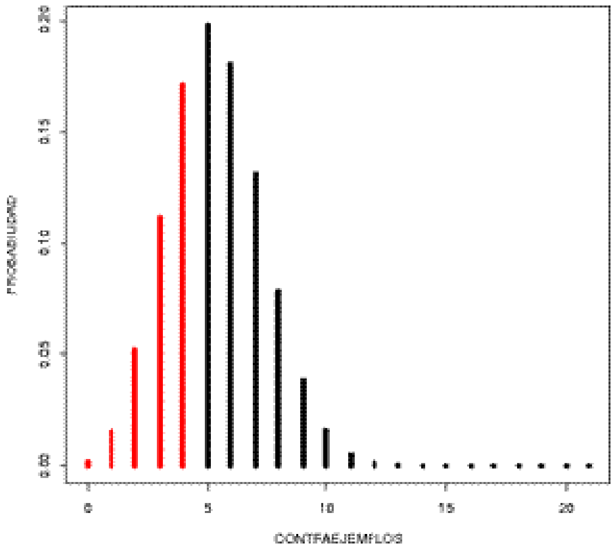

Figura 1. Distribución del número de contraejemplos bajo independencia. En rojo las probabilidades de tantos contraejemplos o menos de los realmente observados en la muestra

Sin entrar en las definiciones concretas, el algoritmo del análisis de cohesión, va agrupando las variables en clases de variables (de forma no simétrica, como la cuasi-implicación), de manera que la primera clase puede denotarse (a → b). Si esta clase se une a una tercera variable c, puede ser, por ejemplo, de la forma c → (a → b), que se puede interpretar como que a → b es un corolario de c. Esta construcción jerárquica ascendente, comienza en el nivel 0 con clases formadas por una variable cada una, de modo que en cada nivel del algoritmo, se calcula el índice de cohesión entre cada par (ordenado) de clases del nivel anterior, y se forma una nueva clase que reúne (y remplaza) a las dos anteriores. Y así sucesivamente. De este modo, en cada nivel:

- Se retiene el índice de cohesión de la nueva clase formada (par ordenado de clases del nivel anterior), que mide la fuerza de la consistencia de las variables involucradas en dicha clase recién creada.
- Se calcula un *índice adicional* sobre todas las clases presentes en ese nivel (la nueva incluida), que permite matizar si dicho nivel tiene una estructura especial respecto a los anteriores y posteriores, en tanto en cuanto las parejas de variables que forman parte de una misma clase, tienen índices de cohesión "generalmente" mayores a los de las parejas de variables que todavía se mantienen en clases distintas. En ese caso se llama *nivel significativo* y es digno de atraer la atención del investigador por la especial consistencia interna de todas las clases que lo forman (no sólo la nueva clase creada).

Con estas herramientas, y gracias a su implementación informática CHIC desde 1992 (CHIC, 2013), que presenta una interfaz gráfica sencilla, el investigador en DM dispone de una buena ayuda para explorar sus hipótesis de trabajo. En la Sección 3.2 mostramos un ejemplo.

3. Un análisis de datos de Didáctica de las Matemáticas

3.1. El centro de recursos, CRDM-*Guy Brousseau*

La Universitat Jaume I de Castellón (UJI) dispone de un fondo de recursos de DM desde 2010, el CRDM-*Guy Brousseau* (CRDM-GB, http://www.imac.uji.es/CRDM), que contiene valiosos documentos producidos durante 28 años en el marco de la *Teoría de Situaciones Didácticas* (Brousseau, 1986) que pueden ser muy útiles para la formación del profesorado de Matemáticas y la investigación en DM.

Brousseau dirigió durante 28 años (1972-1999) el *Centre d'Observation pour la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (COREM), en la Escuela Michelet de Talence (Burdeos, Francia), junto a un gran equipo de colaboradores e investigadores. Este equipo se encargó de realizar una extraordinaria labor de observación e investigación de la enseñanza de las matemáticas en las aulas de Educación Infantil y Primaria.

Actividades como la preparación de clases —tanto las "comunes" como las especialmente diseñadas para la investigación—, la observación de clases que además eran filmadas para su posterior análisis, los seminarios de investigación así como los informes de los maestros e investigadores, fueron recogidos en el COREM durante su funcionamiento y han sido conservados hasta el día 1 de diciembre de 2010 en la escuela Michelet. Desde ese día, todos estos documentos están depositados y pueden ser consultados en la UJI, en el *Centro de Recursos de Didáctica de las Matemática*, CRDM-GB, del *Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón* de la Universitat Jaume I (IMAC).

Se han iniciado nuevas líneas de investigación en DM, sobre la utilización de los recursos del COREM sobre: la enseñanza de la división y la formación del profesorado (Fregona y Orús, 2012), y el CRDM-GB: como cantera de datos para investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y en ASI (Brousseau et al., 2012).

Los trabajos citados, tienen su origen en un taller de profesores en Argentina en 2008, dedicado a estudiar, problematizar y reconstruir un informe de actividades para la enseñanza de la división en el nivel primario (Briand et al., 1985). A partir de referencias de este informe se han extraído los datos del ejemplo que vamos a analizar mediante las técnicas del ASI.

3.2. Un análisis de datos en el aula

En el ejemplo que se presenta a continuación (Tabla 2), se analizan los datos recogidos en una investigación (Teule-Sensacq y Vinrich, 1980) llevada a cabo en la escuela Michelet y realizada en el COREM, sobre la resolución de una serie de problemas que involucran el concepto de la división, que los alumnos deben resolver con estrategias propias, por medio de sumas, restas y productos, puesto que es su primer contacto con ese tipo de situaciones.

Los datos corresponden a 21 de los alumnos y alumnas de un mismo grupo, correspondiente al nivel educativo francés CE2 (equivalente a 3º curso de enseñanza primaria en España). Las situaciones están numeradas según el orden cronológico de resolución:

Tabla 2. Situaciones empleadas

SITUACIÓN 1: Se debe distribuir un pastel a cada uno de los 245 niños de una colonia de verano, para merendar. Cada paquete contiene 18 pasteles. ¿Cuál es el número de pasteles que hará falta abrir?	SITUACIÓN 2: El confitero ha fabricado 310 bombones de chocolate. Para venderlos, quiere guardarlos en cajas de 16. Encuentra el número de cajas que deberá obtener para poder vender los bombones.
SITUACIÓN 3: Un restaurador recibe 187 invitaciones. Tiene que colocar 12 personas por mesa. ¿Cuántas mesas deberá poner en la sala del restaurante?	SITUACIÓN 4: Carole Tiene una caja con 350 perlas. Ella fabrica los collares de 28 perlas cada uno. ¿Cuántos collares podrá fabricar?
SITUACIÓN 5: Usted tiene una banda de 16	SITUACIÓN 6: Volver a la situación anterior,

cuadrados de ancho. Queremos cortar de manera que se obtenga un rectángulo igual de ancho, que no pase de 460 cuadrados, pero que se aproxime lo más posible.	sin soporte material, con 3300 cuadrados en lugar de 460.

Para cada situación *i* (*i*=1,…, 6) se definen las siguientes variables binarias:

- S*i* = 1 si se resuelve correctamente la situación *i*. 0 en caso contrario.
- S*i*R = 1 si para resolver la situación *i* no se sigue ningún modelo de resolución o si no se hace nada. 0 en caso contrario.
- S*i*A = 1 si para resolver la situación *i* se sigue un modelo de resolución aditivo (incluyendo las operaciones de adición y sustracción). 0 en caso contrario.
- S*i*M = 1 si para resolver la situación *i* se sigue un modelo de resolución multiplicativo. 0 en caso contrario.

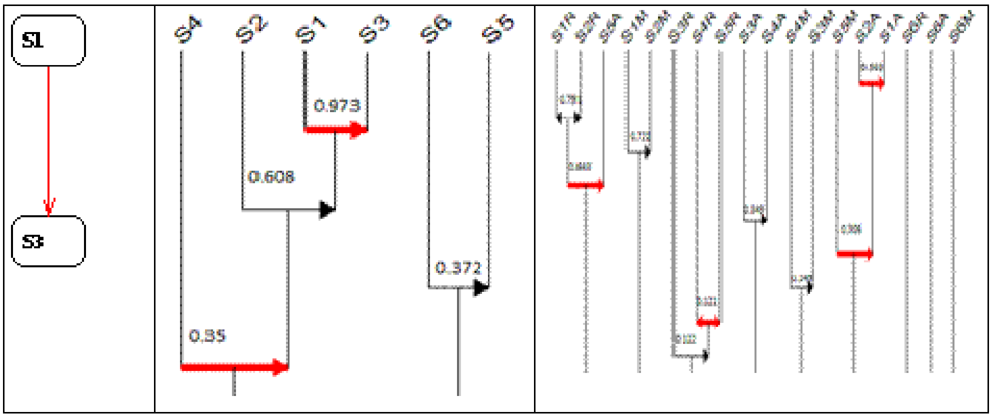

Figura 2. Grafo implicativo (izquierda) y árboles de cohesiones de los datos analizados: con sólo las 6 variables de éxito (centro), y con las 24 variables (dercha).

A partir de las situaciones planteadas y de los trabajos de los alumnos, se completa la tabla de datos binarios constituida por 21 sujetos y 24 variables, que se analiza mediante el ASI usando el programa CHIC (v5.0), con la modelización clásica binomial. A parte de los estadísticos clásicos (frecuencias, medias, desviaciones típicas y matriz de correlaciones), se puede solicitar el *grafo implicativo* (representación de las intensidades de las implicaciones en forma de grafo dirigido) y el árbol de cohesiones, que podemos ver en la Figura 2.

Se ve que únicamente que hay una relación implicativa fuerte entre las situaciones: los alumnos que hacen con éxito S1 suelen resolver también. El árbol cohesitivo sólo con las variables de tipo éxito diferencia claramente dos clases, una de ellas relaciona la cuatro primeras situaciones y la otra las dos últimas, tal como cabía esperar por la similitud entre sus enunciados, siendo S5 y S6 problemas que hacen referencia a situaciones basadas en el trabajo con cuadrículas, actividad muy utilizada en la escuela Michelet, como soporte para las operaciones y muy especialmente en la multiplicación.

Las implicaciones que relacionan las cuatro primeras situaciones nos aportan la siguiente regla: “si un alumno resuelve bien la situación 4 entonces, en el caso de haber resuelto bien la 1 y la 2 también cabe esperar que resuelva bien la 3”. Esta regla refleja la relación entre el orden de las situaciones y su correcta resolución. Además, teniendo en cuenta la contribución de las variables suplementarias correspondientes al modelo de resolución empleado en cada situación, se muestra que los alumnos que contribuyen a la formación de esta regla son aquellos que utilizan ya, en las primeras situaciones, el modelo multiplicativo. También se puede observar en el gráfico la implicación significativa entre la correcta resolución de las situaciones 1 y 3, confirmada a la vez por el grafo implicativo.

En el árbol de cohesiones de las 24 variables, la primera implicación significativa nos indica que se mantiene el modelo de resolución aditivo para las situaciones 1 y 2, y que si se llega al modelo multiplicativo en la quinta situación es una evolución de los modelos aditivos utilizados en las dos primeras. También es significativo que aquellos alumnos y alumnas que en las primeras situaciones no escogen ningún tipo de modelo de respuesta, entonces, en la situación 5, alcanzan el modelo aditivo, pero no el multiplicativo: el modelo multiplicativo es una evolución del aditivo.

La existencia de un nodo significativo que relaciona las situaciones 4 y 5 cuando no se incluye ningún modelo de respuesta nos ha hecho buscar a los alumnos más típicos y a los que más han contribuido. Son típicos respecto a este comportamiento casi todos (19 alumnos) pero ninguno de éstos ha contribuido de forma afirmativa. Sólo un sujeto ha contribuido a la formación de esta regla: "si en la situación cuarta no tienes ya un modelo de respuesta, tampoco lo tendrás en la siguiente, aunque no es probable que un alumno llegue a la cuarta situación sin ningún modelo de resolución".

El modelo de respuesta empleado en la situación 6 no se vincula a ningún modelo de resolución anterior. Sin embargo, observando la tabla de frecuencias, todos los sujetos emplean el modelo multiplicativo para su resolución. Esto permitiría plantearse preguntas como por ejemplo: ¿El planteamiento de enunciados con números grandes determina la utilización de la operación multiplicación, independientemente del sentido de la situación?

Resumiendo, el análisis implicativo llevado a cabo sobre los datos observados, muestra una evolución en el tiempo de los modelos empleados por los alumnos para la resolución de las situaciones de división. El modelo aditivo es más frecuente al principio y va cambiando hacia el modelo multiplicativo. También se observa que el uso del modelo multiplicativo contribuye al éxito de las situaciones y el trabajo de las situaciones con cuadricula,supone un tasa de éxito importante, que aparece sin implicaciones significativas con el resto de situaciones.

Referencias

Briand, J., Brousseau, N., Gresillier, M.-F., Greslard, D., Lacave-Luciani, M.-J., Teule-Sensacq, P. y Vinrich, G. (1985). *La division à l'école élémentaire, Compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G., Orús, P., Fregona, D. y Gregori, P. (2012) . Los recursos del «Centre pour l'Observation et la Recherche en Didactique des Mathématiques» (COREM), posible cantera de datos para el ASI. Un ejemplo: la enseñanza de la división en la escuela primaria. En J.C. Régnier, M. Bailleul y R. Gras (Eds.), *L'analyse statistique implicaitve: de l'exploratoire au confirmatoire*. Caen: Université de Caen.

CHIC (2013). http://www.ardm.eu/contenu/logiciel-d-analyse-de-donnees-chic

Fregona, D. y Orús, P. (2012). Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente, Comunicación presentada en la *XXXV Reunión de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina*, Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba. http://www.famaf.unc.edu.ar/uma2012/archivos/ComunicacionesREM.pdf

Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques.* Thèse d'Etat. Rennes: Université de Rennes 1.

Gras R. (1995). *Actes du Colloque "Méthodes d'Analyses Multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques"*. Rennes: IRMAR.

Gras, R., Ag Almouloud, S., Bailleul, M., Larher, A., Polo, M., Ratsimba-Rajohn, H. y Totohasina, A. (1996). *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données*. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Gras, R., Regnier, J.C., Guillet, F. (2009). *Analyse statistique implicative: une méthode d'analyse de données pour la recherche des causalités*. RNTI E-16. Paris: Cépaduès.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (2008). *Statistical implicative analysis: theory and applications*. Studies in Computational Intellingence 127. New York: Springer.

Orús P., Zamora, L. y Gregori, P. (2009). *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana*. Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente de Santiago de Cuba. Castellón.

Rouchier A. (1995). Avant-propos. En R. Gras (Ed.), *Actes du Colloque "Méthodes d'Analyses Multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques"*. Rennes: IRMAR.

Teule-Sensacq, P. y Vinrich, G. (1980). *Résolution de problèmes de division au cycle élémentaire dans deux types de situations didactiques.* Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux.