

# Análisis de la eficiencia productiva en 21 países europeos: un estudio intersectorial

*M<sup>a</sup> Jesús Gutiérrez Pedrero*

[Maríajesus.gutierrez@uclm.es](mailto:Maríajesus.gutierrez@uclm.es)

*Departamento de Análisis Económico y Finanzas*

*Universidad de Castilla-La Mancha*

## RESUMEN

Este trabajo nace con el objetivo básico de construir un indicador de la eficiencia productiva global del sistema económico de un país, identificando aquellos elementos de la estructura productiva de este país de los que depende tal eficiencia, y que por lo tanto contribuyen al mantenimiento de un crecimiento económico equilibrado. Además, se realizará una comparación entre las estructuras productivas de los principales países europeos, con la finalidad de identificar patrones estructurales que puedan explicar las diferencias observadas en tal indicador de eficiencia productiva.

Para la resolución de esta problemática económica se considera que el modelo input-output de demanda, desarrollado por Leontief, aporta el soporte adecuado para poder desarrollar un análisis desde un punto de vista sectorial, teniendo en cuenta las interrelaciones que existen entre los distintos sectores de una economía. Todo ello formalizado mediante la utilización de las matemáticas, ya que constituyen una herramienta conceptual basada en el razonamiento frente a la intuición y la observación de unos datos reales.

**Palabras clave:** Eficiencia Productiva, Input-output, Autovalor dominante, Autovectores dominantes, Europa.

**Área temática:** Métodos cuantitativos e informáticos.

## ABSTRACT

The main goal of this paper is to construct an indicator that quantifies the global efficiency of a country's economical system, identifying those elements of its productive structure on which the efficiency depends. We compare several European countries and find patterns in their productive structure that may explain the differing value of their indicators.

We tackle this problem using the input-output model due to Leontief, which provides an appropriate context to analyze the various sectors belonging to an economical system together with the relations among them. Our language will be that of mathematics, since they provide us with a framework based on reasoning and numerical evidence as opposed to bare intuition.

**Key words:** productive efficiency, input-output, eigenvalue dominant, eigenvector dominant, Europe.

**Subject Area:** quantitative methods and computer.

## 1. INTRODUCCIÓN

La eficiencia productiva es una de las problemáticas a nivel europeo más interesantes en la actualidad, debido a la vinculación que esta tiene con la competitividad en el contexto de crisis y competencia al que debe de enfrentarse la Unión Europea.

En este trabajo se propone un estudio intersectorial de la eficiencia productiva mediante la utilización del análisis input-output, y la formalización del mismo mediante la utilización de una parte de las matemáticas, el álgebra lineal, y en concreto el cálculo matricial. Para ello, se estudiará la relación que guarda la estructura técnico-productiva de una tabla input-output con el concepto de eficiencia productiva por medio de las propiedades de la matriz de coeficientes técnicos.

## 2. EFICIENCIA PRODUCTIVA EN EL MARCO INTERSECTORIAL

La eficiencia productiva es un término con diferentes interpretaciones pero, en general, alude a la capacidad de alcanzar un objetivo mediante una relación adecuada entre inputs y outputs, idea que es concretada en el concepto de óptimo de Pareto, según el cual una asignación de recursos es óptima cuando no puede mejorarse la situación de un individuo sin empeorarse la de otro.

Siguiendo a Farrell (1957) pueden distinguirse dos tipos de eficiencia productiva.

- Eficiencia productiva técnica: que hace referencia al empleo de la menor cantidad posible de inputs para obtener cierto output.
- Eficiencia productiva precio o asignativa: que se refiere al hecho de emplear la cantidad de inputs que suponen un menor coste para obtener cierto output.

En este trabajo se estudia la eficiencia productiva técnica (EP).

La medición de la EP de un sistema económico ha sido objeto de estudio de muchos economistas. Unos, como Farrell (1957), Färe y Lovell (1978), estiman una función de producción óptima, mediante una función de producción agregada dada, y la productividad total de los factores (PTF) la asocian al grado de EP del sistema económico. Otros, como Seiford y Thrall (1990), estiman esta función de producción óptima mediante un análisis envolvente de datos (DEA), y el nivel de EP del sistema económico lo asocian con la distancia de cada unidad respecto a esta función de producción óptima.

Pero estos enfoques estudian la EP de sectores de manera aislada, cuando en un sistema económico los distintos sectores que lo componen están interrelacionados. Por ello, en este trabajo se considera que el modelo input-output de demanda, desarrollado por Leontief, aporta el soporte adecuado para el estudio de la EP de diversos sistemas económicos, ya que en él se puede llevar a cabo un análisis desde el punto de vista sectorial teniendo en cuenta las interrelaciones entre sectores.

Dentro del análisis input-output existen diversas alternativas para medir el grado de EP. Un primer enfoque consiste en estimar la Frontera de Posibilidades de Producción

(PPF) (entendida como el mix de producto que maximiza el valor añadido para una combinación dada de capital y trabajo) y el sistema será más eficiente cuanto más próximo esté a su PPF. Otro enfoque consiste en la combinación de estructuras y demandas finales, lo cual supone medir la EP en modo relativo, es decir, comparando unos sistemas productivos con respecto a otros sistemas productivos.

Pero como cada sistema económico se enfrenta a una demanda final diferente sus situaciones no son directamente comparables, y ante este problema pueden adoptarse varias alternativas.

En este trabajo se ha seguido el enfoque dado por Martellato y Tarancón (2010), que proponen no plantear una vector de demanda final concreto, y en un contexto dinámico, explorar una condición de producción ideal o de equilibrio, estudiando el grado de EP vinculada a ésta. Y esto supone que la EP estará vinculada a la capacidad de crecer del sistema económico, la llamada Tasa de Crecimiento Uniforme (TCU).

### 3. METODOLOGÍA

En lo referente a la metodología que permitirá analizar comparativamente el grado de EP de los diferentes sistemas económicos, para el cálculo de esta TCU en el marco input-output, y siguiendo a Alcántara (2011), se ha partido del modelo dinámico propuesto por Takayama (1985), que especifica una versión modificada del modelo de demanda abierto de Leontief. Y su especificación pasa por la definición de la tabla input-output, que es una representación desagregada de la producción y el consumo nacional, por ramas o sectores productivos, de los flujos de bienes y servicios que existen entre los distintos sectores y el destino final de dichos flujos, que considerando un sistema económico compuesto por  $n$  sectores productivos, sería:

	<b>1</b>	<b>2</b>	...	<b><i>j</i></b>	...	<b><i>n</i></b>	<b><i>y</i></b>	<b><i>x</i></b>
<b>1</b>	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1n}$	$y_1$	$x_1$
<b>2</b>	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2n}$	$y_2$	$x_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
<b><i>i</i></b>	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{in}$	$y_i$	$x_i$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
<b><i>n</i></b>	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nj}$	...	$x_{nn}$	$y_n$	$x_n$
<b><i>l</i></b>	$l_1$	$l_2$	...	$l_j$	...	$l_n$		
<b><i>x</i></b>	$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$		

Siendo:

- $x_{ij}$  Cantidad de output del sector  $i$  empleada como input por el sector  $j$ .
- $y_i$  Cantidad demandada al sector  $i$  por parte de los consumidores.
- $x_i$  Output o producción del sector  $i$ .
- $l_j$  Valor añadido o inputs primarios del sector  $j$ .

Así, desde una perspectiva horizontal o de la demanda, en el modelo input-output abierto de demanda el output del sector  $i$  es igual a la suma de las ventas de este sector al resto de sectores que componen la economía más la demanda final de este sector. Lo cual en términos matemáticos vendrá dado por la expresión algebraica:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i$$

A partir de esta expresión, se definen los coeficientes técnicos de producción como el cociente de las ventas intermedias del sector  $i$  al sector  $j$  por el output total del sector  $j$ , es decir:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

por lo que quedaría que el output de cada sector  $i$  es:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i$$

Lo cual supone que la estructura matemática de este modelo es la de un sistema de  $n$  ecuaciones lineales de  $n$  incógnitas, y esto hace que el modelo input-output pueda ser tratado bajo el formalismo del álgebra lineal al poder representarlo mediante matrices. Así, el modelo de demanda expresado matricialmente sería:

$$x = A \cdot x + y$$

en el cual se ve como el vector de output total del sistema económico es igual a la matriz de coeficientes técnicos por el vector de output total, más el vector de demanda final.

Takayama plantea un modelo con un retardo de un periodo en la producción, estableciendo la relación:

$$x(t-1) = Ax(t) + y(t)$$

Esto supone que en un periodo previo se producen los bienes para satisfacer tanto los insumos necesarios en la producción futura, como la demanda final futura.

Suponiendo que todos los outputs sectoriales del sistema económico crecen a un ritmo constante positivo  $\alpha$ :  $x(t) = \alpha \cdot x(t-1)$  y sustituyendo en la ecuación anterior, quedaría:

$$\frac{1}{\alpha}x(t) = Ax(t) + y(t)$$

Que si se descompone el factor de crecimiento uniforme en dos sumandos, es decir  $\alpha = 1 + g$ , se tiene que  $g$  es el número que realmente captura la llamada TCU de la economía.

Imponiendo al modelo la simplificación de que el sistema económico tenga demanda final nula, se tiene que el modelo queda:

$$\frac{1}{\alpha}x(t) = Ax(t)$$

Y se observa que  $1/\alpha$  es un autovalor de la matriz de coeficientes  $A$ . Que de acuerdo con las propiedades de la matriz  $A$ , el teorema de Perron-Frobenius dice que:

- I. Existe una solución que proporciona un factor de crecimiento uniforme  $\alpha$  positivo y mayor que cualquier otro, que viene dado por la raíz de Frobenius  $\lambda_{max}$ , es decir, el autovalor dominante asociado a la matriz de coeficientes  $A$ .
- II.  $0 < \lambda_{max} < 1$
- III. La matriz de coeficientes  $A$  tiene un autovector derecho  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  y un autovector izquierdo  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , ambos asociados a  $\lambda_{max}$ , cuyas componentes son todas positivas. Esto es:

$$\begin{cases} A \cdot z = \lambda_{max} \cdot z & \text{con } z_i > 0, \quad 1 \leq i \leq n \\ q^t \cdot A = \lambda_{max} \cdot q^t & \text{con } q_i > 0, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Y se concluye que  $\lambda_{max} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\lambda_{max}}$ . Por lo que el autovalor dominante es

la inversa del factor de crecimiento uniforme de la economía.

El vector  $x(t)$  no es arbitrario, sino que debe ser el autovector derecho asociado al autovalor dominante de la matriz  $A$ , por lo que la solución vendrá dada por  $x(t) = z \cdot e^{\alpha t}$ . Y el vector  $z$  indica las proporciones de los diversos outputs sectoriales coherentes con el crecimiento uniforme de la economía.

Una vez definidos el factor de crecimiento de la economía  $\alpha$  y la correspondiente TCU de la economía  $g$ , resta hacer explícita su relación con la EP.

En el modelo planteado, no hay limitaciones de demanda, y el objetivo es que todos los outputs sectoriales crezcan a un mismo ritmo uniforme  $g$  (TCU). También se sabe que una mayor TCU implica un menor valor del autovalor dominante, y que el autovalor dominante disminuye, manteniéndose todo lo demás constante, cuando se aminora cualquier coeficiente técnico no nulo de la matriz  $A$ . Que disminuya un coeficiente técnico de  $A$  implica que se puede producir la misma cantidad de output con una menor cantidad de insumos, o lo que es lo mismo, con una misma cantidad de insumos que el output pueda crecer de modo uniforme a una tasa mayor. Y esto supone una mejora en la eficiencia del sistema productivo.

Por todo ello en este trabajo se propone la obtención del autovalor dominante asociado a la matriz de coeficientes técnicos  $A$  y con ello la obtención de la TCU para cada uno de los países en estudio, como indicador del grado de eficiencia ligado a sus sistemas productivos.

Pero el autovalor dominante no sólo dependerá de la magnitud de cada uno de los coeficientes de la matriz  $A$ , sino que también dependerá de la ubicación o localización de los mismos. Por ello otro modo complementario de caracterizar un sistema económico respecto a su nivel de EP, será la identificación de los elementos de la matriz  $A$  que más influyen sobre el valor de este autovalor dominante y por tanto en la TCU, y así mismo, sobre el nivel de EP. Para ello, se propone la construcción de una matriz de sensibilidades que muestre esta capacidad de influencia de cada coeficiente. Siguiendo a Alcántara (2011), esta matriz se define como:

$$S = \frac{1}{q^t \cdot z} q \cdot z^t = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{11}} & \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{12}} & \dots & \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{1n}} \\ \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{21}} & \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{22}} & \dots & \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{n1}} & \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{n2}} & \dots & \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Matriz de sensibilidades que al estandarizarla, es decir, al pasar la matriz  $S$  a términos relativos se convierte en una matriz de elasticidades denotada con la letra  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{11}} & \frac{a_{12}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{12}} & \dots & \frac{a_{1n}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{1n}} \\ \frac{a_{21}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{21}} & \frac{a_{22}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{n1}} & \frac{a_{n2}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{n2}} & \dots & \frac{a_{nn}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{max}}{\Delta a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Cada elemento de la matriz anterior medirá la variación relativa o porcentual que experimenta el valor  $\lambda_{max}$ , indicador de la EP, como consecuencia de una variación del coeficiente técnico  $a_{ij}$  en un uno por ciento, localizando así los coeficientes más influyentes en el grado de EP.

Finalmente, si se asume que  $\Delta a_{ij} \rightarrow 0$ , es decir que las variaciones de los coeficientes técnicos son infinitamente pequeñas, lo anterior se puede escribir en términos de derivadas parciales, quedando la matriz de sensibilidades:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{11}} & \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{12}} & \dots & \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{1n}} \\ \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{22}} & \dots & \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{n1}} & \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{n2}} & \dots & \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{nn}} \end{pmatrix}$$

y la matriz de elasticidades:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{11}} & \frac{a_{12}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{12}} & \dots & \frac{a_{1n}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{1n}} \\ \frac{a_{21}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{21}} & \frac{a_{22}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{n1}} & \frac{a_{n2}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{n2}} & \dots & \frac{a_{nn}}{\lambda_{max}} \cdot \frac{\partial\lambda_{max}}{\partial a_{nn}} \end{pmatrix}$$



Por todo ello, los coeficientes técnicos  $a_{ij}$  con una mayor elasticidad asociada  $\varepsilon_{ij}$  serán aquellos elementos tecnológicos con mayor capacidad para inducir cambios en la eficiencia productiva del sistema productivo global.

#### **4. ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA PRODUCTIVA EN 21 PAÍSES EUROPEOS**

Mediante esta metodología, en este trabajo se desarrolla la aplicación consistente en la evaluación y comparación del nivel de EP de 21 países europeos, en concreto: Austria, Bélgica, Rep. Checa, Dinamarca, Estonia, Finlandia, Francia, Alemania, Grecia, Hungría, Irlanda, Italia, Holanda, Noruega, Polonia, Portugal, Eslovaquia, Eslovenia, España, Suecia y Reino Unido.

Para lo cual se han utilizado las tablas IO de la base de datos de la OCDE para mediados de la década de 2001-2010, valoradas a precios básicos y expresadas en dólares. Con una desagregación de 37 sectores.

Tabla 1. Sectores productivos en las TIO\_OCDE-37

Número Sector	Descripción
1	C01T05 Agricultura, caza, bosques y pesca.
2	C10T14 Minería y actividades extractivas.
3	C15T16 Alimentación, bebidas y tabaco.
4	C17T19 Productos textiles, cuero y calzado.
5	C20 Madera y productos de la madera y el corcho.
6	C21T22 Pasta de papel, papel, productos del papel, artes gráficas y edición.
7	C23 Carbón, productos del refinado del petróleo y energía nuclear.
8	C24 Químicas y productos químicos.
9	C25 Goma y productos plásticos.
10	C26 Otros productos minerales no-metálicos.
11	C27 Metales básicos.
12	C28 Productos metálicos fabricados excepto maquinaria y equipo.
13	C29 Maquinaria y equipo no comprendidos en actividades anteriores.
14	C30 Maquinaria de oficina e informática.
15	C31 Maquinaria eléctrica y aparatos no comprendidos en actividades anteriores.
16	C32 Equipos de radio, televisión y comunicaciones.
17	C33 Instrumental médico, de precisión y óptico.
18	C34 Vehículos de motor y remolques.
19	C35 Otro equipo de transporte.
20	C36T37 Manufacturas no incluidas en actividades anteriores; reciclaje.
21	C40t41 Electricidad, gas y agua.
22	C45 Construcción.
23	C50T52 Comercio al por mayor y minorista; reparación.
24	C55 Hoteles y restaurantes.
25	C60T63 Transporte y almacenamiento.
26	C64 Correos y telecomunicaciones.
27	C65T67 Actividades financieras y seguros.
28	C70 Alquiler de inmuebles.
29	C71 Alquiler de maquinaria y equipos.
30	C72 Servicios informáticos y relacionados.
31	C73 Investigación y desarrollo.
32	C74 Otras actividades de negocios.
33	C75 Administraciones Públicas y defensa; Seguridad Social.
34	C80 Educación.
35	C85 Salud y Servicios Sociales.
36	C90T93 Otros servicios a la comunidad, sociales y personales.
37	C95 Empleados del hogar.

Fuente: OCDE, 2006.

En primer lugar se han calculado las TCU,  $g$ , de los 21 países que se estudian, a partir de cálculo del factor de crecimiento uniforme asociado a cada una de las matrices de coeficientes técnicos  $A$ .

Tabla 2. Tasas de crecimiento uniforme de 21 países europeos.

Pais	Autovalor dominante $\lambda_{max}$	Factor de crecimiento $\alpha = \frac{1}{\lambda_{max}}$	Tasa de crecimiento uniforme $g = (\alpha - 1) \cdot 100$
Austria	0,564740	1,770724	77,07
Bélgica	0,608621	1,643058	64,31
Rep. Checa	0,657037	1,521984	52,20
Dinamarca	0,553123	1,807917	80,79
Estonia	0,687636	1,454257	45,43
Finlandia	0,667221	1,498754	49,88
Francia	0,555032	1,801698	80,17
Alemania	0,518888	1,927200	92,72
Grecia	0,532470	1,878039	87,80
Hungría	0,635845	1,572711	57,27
Irlanda	0,565394	1,768679	76,87
Italia	0,578862	1,727528	72,75
Holanda	0,538221	1,857972	85,80
Noruega	0,535681	1,866783	86,68
Polonia	0,595815	1,678375	67,84
Portugal	0,610339	1,638433	63,84
Eslovaquia	0,639737	1,563142	56,31
Eslovenia	0,598540	1,670733	67,07
España	0,598216	1,671638	67,16
Suecia	0,554093	1,804751	80,48
Reino Unido	0,499956	2,000176	100,01

Fuente: elaboración propia.

Estas tasas varían del 45.43% de Estonia al 100.01% de Reino Unido. Y atendiendo al valor de estas TCU, y tomando dicha tasa como indicador de la EP de cada una de las economías nacionales, pueden distinguirse 4 grupos de países.

Tabla 3. Grupos de países según las TCU

Grupos	Países
Grupo-1	Con TCU superiores al 85% Reino Unido, Alemania, Grecia, Noruega y Holanda
Grupo-2	Con TCU entre 80% y 70% Dinamarca, Suecia, Francia, Austria, Irlanda e Italia.
Grupo-3	Con TCU entre 60% y 70% Polonia, España, Eslovenia, Bélgica y Portugal
Grupo-4	Con TCU inferiores al 60% Hungría, Eslovaquia, República Checa, Finlandia y Estonia.

Fuente: elaboración propia

En segundo lugar, con el objetivo de constatar una posible relación entre el grado de EP y el ritmo de crecimiento real de la economía, así como con la estabilidad en dicho crecimiento, se han calculado:

- ✓ el crecimiento anual medio de la economía real experimentado en cada uno de los países analizados, correspondiente al periodo 2000-2011,
- ✓ y la dispersión de estos crecimientos mediante el cálculo de la desviación típica.

Y se han relacionado con la TCU de cada uno de estos países. Tal y como puede observarse en esta tabla.

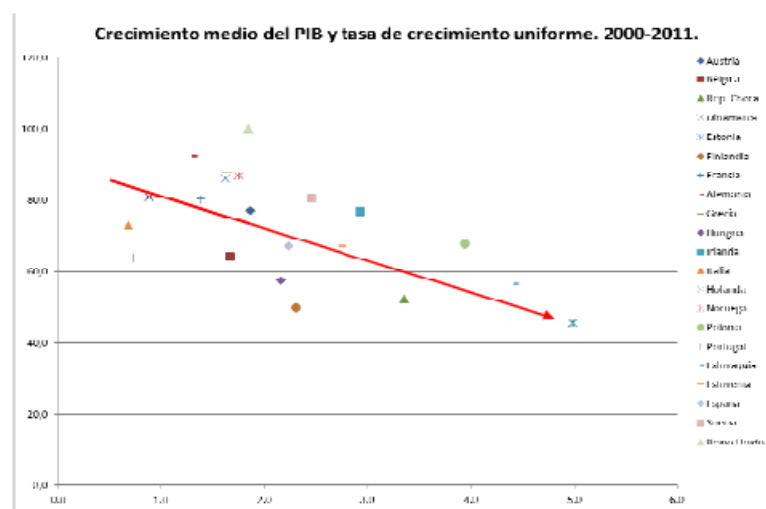
Tabla 4. Crecimientos medios reales de las economías y TCU

País	Tasa crecimiento anual Promedio 2000-2011	Tasa crecimiento anual Desviación típica 2000-2011	Tasa crecimiento Uniforme
Austria	1,9	2,1	77,1
Bélgica	1,7	1,7	64,3
Rep. Checa	3,4	3,1	52,2
Dinamarca	0,9	2,5	80,8
Estonia	5,0	7,4	45,4
Finlandia	2,3	3,6	49,9
Francia	1,4	1,6	80,2
Alemania	1,3	2,5	92,7
Grecia	1,6	3,8	87,8
Hungría	2,2	3,2	57,3
Irlanda	2,9	4,5	76,9
Italia	0,7	2,2	72,8
Holanda	1,6	2,0	85,8
Noruega	1,8	1,6	86,7
Polonia	3,9	1,8	67,8
Portugal	0,7	1,8	63,8
Eslovaquia	4,4	3,8	56,3
Eslovenia	2,8	3,8	67,1
España	2,2	2,4	67,2
Suecia	2,5	2,9	80,5
Reino Unido	1,8	2,5	100,0

Nota: Los crecimientos reales se refieren al Producto Interior Bruto a precios de mercado.  
Fuente: Eurostat y elaboración propia.

Para un mejor seguimiento de las conclusiones obtenidas se ha señalado en **negrita** aquellas tasas de crecimiento anual medio que superan o son del 3%, y en azul las desviaciones típicas que son 3 o más. Y además se ha realizado el siguiente diagrama de dispersión, en el cual se relaciona el crecimiento medio real (del PIB) (eje horizontal) con la TCU (eje vertical), en cada uno de los países.

Gráfico 1. Crecimiento anual medio del PIB y TCU



Fuente: Elaboración propia.

Puede apreciarse que los países con mayor TCU muestran, en general, una menor tasa media de crecimiento del PIB, como es el caso de Alemania, Dinamarca, Francia, Holanda, Grecia o Noruega, en comparación con países que tienen un menor grado de EP pero que tiene mayor tasa media de crecimiento del PIB, como son generalmente (países del Este) Polonia, República Checa, Eslovaquia o Estonia.

Esta relación inversa también la muestra el valor negativo del coeficiente de correlación entre estas magnitudes (la TCU y el crecimiento anual medio del PIB).

Correlación TCU / promedio tasas de crecimiento anual del PIB 2000-2011.	-0,5674
---	---------

Todo ello evidencia que existe una relación en sentido opuesto entre el grado de EP y la tasa de crecimiento real de las economías en este periodo 2000-2011.

Lo cual podría deberse a que al hablar de EP en sentido puramente técnico, que hace referencia a la capacidad potencial para producir ante unas condiciones de demanda ideales, en general, los países con mayor grado de EP son aquellos con economías más desarrolladas, maduras y estables, que se enfrentan a demandas muy consolidadas, por lo que el margen de crecimiento es inferior al de otras economías con menor grado de EP. Esta idea corrobora la relación inversa entre TCU y la volatilidad de las tasas de crecimiento reales en el mismo periodo.

En tercer lugar, el nivel de EP tiene asociado un vector  $z$  (autovector derecho) que indica las proporciones de output sectorial asociados a la TCU. Así un sector con un gran peso en este vector supone una mayor utilización de su output como insumo de otros sectores y/o que este sector requiere de pocos insumos de otros sectores. De este modo, un sector con un gran peso en el output global implicaría que el sistema productivo debería especializarse en el output producido por tal sector, para así aumentar su nivel de EP.

Se han calculado estos autovectores derechos para cada uno de los países estudiados, así como en promedio los autovectores derechos, tanto respecto del total de países como respecto a cada uno de los cuatro grupos de EP, obteniendo que, en general, en todos los países estudiados los sectores con mayor peso en el output total asociado a la TCU son:

- ✓ Sectores de servicios:
  - 32 Otras actividades de negocios, en especial en los países con mayor EP.
  - 25 Transporte y almacenamiento.
  - 23 Comercio y reparación.
  - 27 Actividades financieras, en los grupos de países con mayor EP.
- ✓ Sectores industriales
  - 8 Químicas y prod. químicos.
  - 11 Metales básicos.
  - 2 Minería y actividades extractivas
- ✓ Sector energético:
  - 21 Electricidad, gas y agua

Lo cual supone que estos países europeos deberían especializarse en la producción de los outputs producidos por estos sectores para aumentar su nivel de EP.

En cuarto lugar, para identificar los patrones estructurales comunes a la mayoría de países, que determinan dicho grado de eficiencia, se han obtenido las matrices de elasticidades.

Para resumir toda la información que estas matrices nos proporcionan, en este trabajo se ha optado por:

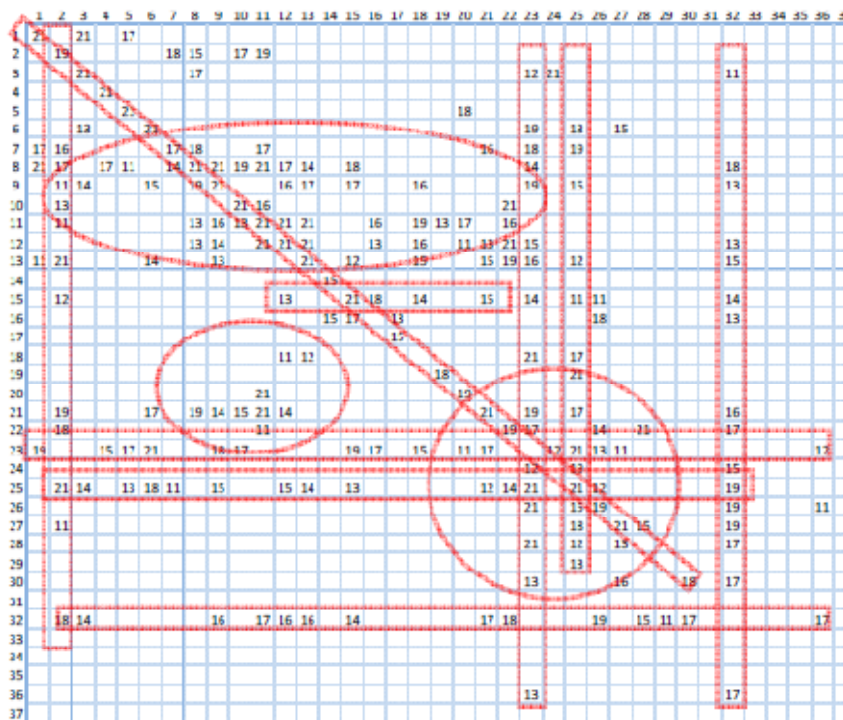
1- Identificar los coeficientes técnicos importantes, que se corresponden, en definitiva, con los más influyentes, en términos relativos, sobre el grado de eficiencia productiva. Y en este trabajo se ha decidido optar por considerar importantes el 20% de los coeficientes técnicos con mayores elasticidades asociadas, en consonancia con algunos trabajos clásicos en el tema de coeficientes importantes como Schintke y Stäglin (1988).

2- Una idea para resumir esta información es establecer una matriz que cuente, para cada coeficiente técnico, las veces en las que aparece, con el criterio establecido anteriormente, como coeficiente importante de un país.

En el gráfico 2 se muestra esta matriz de recuento en la que cada elemento no nulo cuenta las veces en que el coeficiente técnico que ocupa tal posición es considerado, en al menos la mitad de los países estudiados, como importante en relación a su influencia

sobre el grado de eficiencia productiva. El objetivo de considerar al menos la mitad de los países estudiados es eliminar aquellos coeficientes que son importantes sólo en algunos de los países, y enfatizar más aquellos coeficientes que son importantes en la mayor parte de los países.

Gráfico 2: Matriz de recuento de coeficientes importantes



Fuente: elaboración propia.

En esta matriz se han señalado varias zonas de concentración de coeficientes. Y puede observarse como, en la mayoría de los países, destaca la concentración de coeficientes importantes a lo largo de buena parte de la diagonal principal, lo que implica la gran importancia que tienen los autoconsumos sectoriales.

Por otro lado se constata como la concentración de coeficientes en el cuadrante superior izquierdo se centra en las ventas de los sectores 8 *Químicas y productos químicos*, 9 *Goma y productos plásticos*, 11 *Metales básicos*, 12 *Productos metálicos excepto maquinaria y equipo* y 13 *Maquinaria y equipo no incluidos en actividades anteriores*.

En cuanto a la concentración del cuadrante inferior derecho, se observa que los coeficientes afectados implican principalmente a ventas de los sectores de servicios 23 *Comercio; reparación*, 25 *Transporte y almacenamiento*, 27 *Actividades financieras y*

*seguros y 28 Alquiler de inmuebles; y a insumos de los sectores 23 Comercio; reparación, 25 Transporte y almacenamiento, 26 Correos y telecomunicaciones y 27 Actividades financieras y seguros.*

La concentración del cuadrante inferior izquierdo queda enmarcada fundamentalmente en la actividad como vendedor a sectores industriales del sector *21 Electricidad, gas y agua.*

Por último destacan con mayor claridad los coeficientes pertenecientes a los sectores *23 Comercio; reparación, 25 Transporte y almacenamiento y 32 Otras actividades de negocios* (tanto ventas como insumos) y el sector *2 Minería y actividades extractivas* (insumos).

En quinto lugar, se procede a realizar el ejercicio opuesto a lo anterior, que consiste en establecer patrones estructurales específicos de cada uno de los países, para lo cual se ha optado por destacar los coeficientes particularmente importantes en un país, clasificando como particularmente importantes a los coeficientes que, en un país concreto, tienen una elasticidad asociada superior al promedio de todos los países más 2 veces la desviación típica de las elasticidades asociadas a ese coeficiente.

Así pues, sólo se identifican los coeficientes que, en cada país, tienen asociada una elasticidad particularmente alta, y el número de estos coeficientes por país se muestran en la tabla 5, en la que se incorpora la TCU de la economía como indicador de eficiencia productiva. Intentando con ello verificar si existe una relación entre el nivel de eficiencia productiva de un país y el hecho de que posea en su estructura más o menos coeficientes con elasticidades elevadas.



Tabla 5. Número de coeficientes con elasticidades particularmente elevadas y TCU

País	Tasa de Crecimiento Uniforme	Número de coeficientes con elasticidad particularmente elevada
Austria	77,07	17
Bélgica	64,31	23
Rep. Checa	52,2	33
Dinamarca	80,79	80
Estonia	45,43	26
Finlandia	49,88	4
Francia	80,17	80
Alemania	92,72	45
Grecia	87,8	20
Hungría	57,27	65
Irlanda	76,87	121
Italia	72,75	90
Holanda	85,8	83
Noruega	86,68	192
Polonia	67,84	64
Portugal	63,84	20
Eslovaquia	56,31	28
Eslovenia	67,07	74
España	67,16	56
Suecia	80,48	231
Reino Unido	100,01	159

Fuente: elaboración propia.

En la tabla anterior se observa que el número de coeficientes con elasticidad particularmente elevada oscilan desde los 4 que tiene Finlandia a los 231 que tiene Suecia. Los países que tienen un mayor número de coeficientes con elasticidades particularmente elevadas son Noruega, Reino Unido, Irlanda, Italia, Holanda, Francia y Dinamarca. Según el grado de eficiencia productiva, medido por el valor de la tasa de crecimiento uniforme, todos estos países pertenecen a los llamados grupo-1 y grupo-2, que son los grupos de países con una mayor TCU, o lo que es lo mismo con un mayor grado de EP. Por el lado opuesto, los países que tienen un menor número de coeficientes con elasticidades particularmente elevadas son Finlandia, Portugal, Bélgica, Estonia, Eslovaquia y República Checa, que son países pertenecientes al grupo-3 y grupo-4, es decir, aquellos en los que se encuentran los países con una menor TCU, o menor grado de EP. Por todo ello, parece que cuanto mayor es el grado de EP, o lo que es lo mismo, cuanto mayor es la TCU de un país mayor es el número de coeficientes con elasticidades particularmente elevadas.

Evidentemente, no sólo importa en esta relación el aspecto cuantitativo, sino el cualitativo, en el sentido de cuáles son concretamente esos coeficientes diferenciadores de un país que hacen que desarrollen un mayor o menor grado de EP. Para intentar establecer algún tipo de conclusión, se ha recogido en las siguientes tablas los sectores que, bien como proveedores de insumos a otros sectores o en su propia estructura de insumos, destacan por contener un número alto de coeficientes con elasticidades particularmente elevadas. Se han agrupado los diferentes países según los 4 grupos de nivel de EP en los que fueron clasificados.

Tabla 6. Sectores destacados en el Grupo-1

Pais	Filas	Columnas
Alemania	2 Minería y actividades extractivas. (9)	2 Minería y actividades extractivas. (10)
	7 Carbón, Prod. del refino y energía nuclear. (9)	
Grecia	11 Metales básicos. (6)	---
Holanda	1 Agricultura, caza, bosques y pesca. (7)	14 Maquinaria de oficina e informática. (11)
	14 Maquinaria de oficina e informática. (16)	35 Salud y Servicios Sociales. (6)
	29 Alquiler de maquinaria y equipos. (6)	
	36 Otros servicios. (9)	
Noruega	2 Minería y actividades extractivas. (6)	1 Agricultura, caza, bosques y pesca. (13)
	3 Alimentación, bebidas y tabaco. (20)	3 Alimentación, bebidas y tabaco. (24)
	4 Prod. textiles, cuero y calzado. (9)	5 Madera y prod. de la madera y el corcho. (8)
	6 Papel, artes gráficas y edición. (8)	6 Papel, artes gráficas y edición. (8)
	19 Otro equipo de transporte. (15)	13 Maquinaria y equipo n. i. e. a. a. (7)
	23 Comercio; reparación. (7)	14 Maquinaria de oficina e informática. (10)
	24 Hoteles y restaurantes. (12)	17 Instrumental médico, de precisión y óptico. (8)
	25 Transporte y almacenamiento. (6)	19 Otro equipo de transporte. (16)
	26 Correos y telecomunicaciones. (15)	22 Construcción. (8)
	28 Alquiler de inmuebles. (15)	23 Comercio; reparación. (8)
	29 Alquiler de maquinaria y equipos. (7)	24 Hoteles y restaurantes. (8)
	30 Servicios informáticos y relacionados. (7)	26 Correos y telecomunicaciones. (14)
	33 AA PP y defensa; Seguridad Social. (9)	28 Alquiler de inmuebles. (12)
	Reino Unido	6 Papel, artes gráficas y edición. (6)
8 Químicas y Prod. químicos. (7)		25 Transporte y almacenamiento. (7)
17 Instrumental médico, de precisión y óptico. (7)		27 Actividades financieras y seguros. (14)
23 Comercio; reparación. (6)		29 Alquiler de maquinaria y equipos. (6)
27 Actividades financieras y seguros. (21)		33 AA PP y defensa; Seguridad Social. (18)
29 Alquiler de maquinaria y equipos. (9)		34 Educación. (25)
34 Educación. (13)		35 Salud y Servicios Sociales. (19)
35 Salud y Servicios Sociales. (22)		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7. Sectores destacados en el Grupo-2

País	Filas	Columnas
<b>Austria</b>	---	21 Electricidad, gas y agua. (6)
<b>Dinamarca</b>	13 Maquinaria y equipo n. i. e. a. a. (8) 29 Alquiler de maquinaria y equipos. (5) 30 Servicios informáticos y relacionados. (6)	1 Agricultura, caza, bosques y pesca. (6) 14 Maquinaria de oficina e informática. (6) 29 Alquiler de maquinaria y equipos. (7) 36 Otros servicios. (7)
<b>Francia</b>	7 Carbón, Prod. del refino y energía nuclear. (7) 10 Otros Prod. minerales no-metálicos. (5) 19 Otro equipo de transporte. (6) 31 Investigación y desarrollo. (6) 34 Educación. (11)	17 Instrumental médico, de precisión y óptico. (8) 19 Otro equipo de transporte. (7) 31 Investigación y desarrollo. (7)
<b>Irlanda</b>	14 Maquinaria de oficina e informática. (6) 20 Manufacturas n. i. e. a. a. (15) 24 Hoteles y restaurantes. (11) 27 Actividades financieras y seguros. (13) 30 Servicios informáticos y relacionados. (15) 32 Otras actividades de negocios. (12)	1 Agricultura, caza, bosques y pesca. (8) 20 Manufacturas n. i. e. a. a. (10) 24 Hoteles y restaurantes. (18) 26 Correos y telecomunicaciones. (7) 27 Actividades financieras y seguros. (8) 30 Servicios informáticos y relacionados. (9) 32 Otras actividades de negocios. (10/7)
<b>Italia</b>	10 Otros Prod. minerales no-metálicos. (8) 17 Instrumental médico, de precisión y óptico. (6) 19 Otro equipo de transporte. (9) 23 Comercio; reparación. (9) 24 Hoteles y restaurantes. (5) 36 Otros servicios. (6)	4 Prod. textiles, cuero y calzado. (9) 8 Químicas y Prod. químicos. (8) 10 Otros Prod. minerales no-metálicos. (13) 23 Comercio; reparación. (12) 30 Servicios informáticos y relacionados. (6)
<b>Suecia</b>	1 Agricultura, caza, bosques y pesca. (8) 2 Minería y actividades extractivas. (6) 5 Madera y prod. de la madera y el corcho. (14) 6 Papel, artes gráficas y edición. (9) 7 Carbón, prod. del refino y energía nuclear. (7) 11 Metales básicos. (7) 13 Maquinaria y equipo n. i. e. a. a. (8) 15 Maquinaria eléctrica y aparatos n. i. e. a. a. (7) 18 Vehículos de motor y remolques. (10) 25 Transporte y almacenamiento. (12) 26 Correos y telecomunicaciones. (6) 28 Alquiler de inmuebles. (15) 30 Servicios informáticos y relacionados. (9) 31 Investigación y desarrollo. (32) 33 AA PP y defensa; Seguridad Social. (18) 34 Educación. (8) 35 Salud y Servicios Sociales. (6) 36 Otros servicios. (6)	1 Agricultura, caza, bosques y pesca. (7) 5 Madera y prod. de la madera y el corcho. (6) 6 Papel, artes gráficas y edición. (8) 12 Prod. metálicos excepto maquinaria y equipo. (8) 13 Maquinaria y equipo n. i. e. a. a. (11) 15 Maquinaria eléctrica y aparatos n. i. e. a. a. (9) 18 Vehículos de motor y remolques. (16) 19 Otro equipo de transporte. (8) 24 Hoteles y restaurantes. (6) 25 Transporte y almacenamiento. (10) 26 Correos y telecomunicaciones. (6) 28 Alquiler de inmuebles. (15) 29 Alquiler de maquinaria y equipos. (9) 30 Servicios informáticos y relacionados. (18) 31 Investigación y desarrollo. (32) 33 AA PP y defensa; Seguridad Social. (12)

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8. Sectores destacados en el Grupo-3

País	Filas	Columnas
<b>Bélgica</b>	---	---
<b>Polonia</b>	10 Otros Prod. minerales no-metálicos. (11)	16 Equipos de radio, televisión y comunicaciones. (13)
<b>Portugal</b>	---	---
<b>Eslovenia</b>	4 Prod. textiles, cuero y calzado. (10) 18 Vehículos de motor y remolques. (6)	4 Prod. textiles, cuero y calzado. (23)
<b>España</b>	21 Electricidad, gas y agua. (6)	20 Manufacturas n. i. e. a. a. (8)

Fuente: elaboración propia.

Tabla 9. Sectores destacados en el Grupo-4

Pais	Filas	Columnas
República Checa	---	---
Estonia	16 Equipos de radio, televisión y comunicaciones. (10)	15 Maquinaria eléctrica y aparatos n. l. e. a. a. (7)
Finlandia	---	---
Hungría	15 Maquinaria eléctrica y aparatos n. l. e. a. a. (7)	7 Carbón, prod. del refino y energía nuclear. (25)
	16 Equipos de radio, televisión y comunicaciones. (14)	16 Equipos de radio, televisión y comunicaciones. (7)
Eslovaquia	18 Vehículos de motor y remolques. (1/0)	18 Vehículos de motor y remolques. (9/2)

Fuente: elaboración propia.

Y como puede apreciarse, en los grupos de países con mayor grado de EP (grupos 1 y 2) destacan, en general, las concentraciones de coeficientes con elasticidades particularmente elevadas en algunos sectores industriales y en sectores de servicios. Mientras que en los grupos de países con menor grado de EP (grupos 3 y 4) destacan con mayor claridad los sectores manufactureros e industriales.

## 5. CONCLUSIONES

Para resolver el problema económico de la medición de la EP de un sistema económico se propone la obtención del autovalor dominante  $\lambda_{max}$  asociado a la matriz de coeficientes técnicos  $A$  para cada uno de los países en estudio, como indicador del grado de eficiencia ligado a su sistema productivo.

Por otro lado, el autovector derecho asociado al autovalor dominante,  $\lambda_{max}$ , informa de las proporciones sectoriales de output del sistema económico que deberían darse para crecer a la TCU, y por lo tanto producir del modo más eficiente. En ese sentido este autovector derecho muestra, en cierto modo, la especialización productiva de un sistema económico.

Como el autovalor dominante  $\lambda_{max}$  depende de la magnitud de cada uno de los elementos de la matriz  $A$ , así como de la ubicación de los mismos; en este trabajo se ha aportado un análisis de sensibilidad que identifica los coeficientes técnicos de la matriz  $A$  que influyen en mayor medida sobre el valor del autovalor dominante  $\lambda_{max}$  y, por tanto, en la TCU y, así mismo, en el nivel de EP. Para ello se construye una matriz de sensibilidades que posteriormente, al estandarizarla, se convierte en una matriz de elasticidades. De tal forma que los coeficientes técnicos  $a_{ij}$  con una mayor elasticidad

asociada  $\varepsilon_{ij}$  serán aquellos elementos tecnológicos con mayor capacidad para inducir cambios en la EP del sistema productivo global.

Al aplicar esta metodología a los datos obtenidos en las tablas input-output pertenecientes a la base de datos de la OCDE para mediados del periodo 2001-2010, para los 21 países europeos objeto del estudio pueden distinguirse cuatro grupos de países, considerando en el grupo 1 los países con mayor EP y el grupo 4 los de menor EP.

Para la determinación del grado de eficiencia productiva en estos países, se observa que:

- ✓ En la mayoría de los países tienen una gran importancia:
  - Los autoconsumos sectoriales.
  - Las compras y las ventas entre sectores industriales.
  - Las ventas de los sectores industriales a la construcción y a algunos sectores de servicios
  - Las ventas de los sectores de servicios a otros sectores de servicios.
  - Las ventas de sectores de servicios a sectores industriales.
  - Las ventas del sector eléctrico a sectores industriales.
  - Las ventas y compras de la construcción, el transporte y otras actividades de negocios, a otros sectores.
  - Las compras de minería y actividades extractivas a otros sectores.
- ✓ Pero específicamente:
  - En los grupos de países con mayor grado de eficiencia productiva destacan los sectores industriales y los sectores de servicios.
  - Mientras que en los grupos de países con menor grado de eficiencia productiva destacan con mayor claridad los sectores manufactureros e industriales.

De tal forma que en este contexto se hace ver cómo las matemáticas constituyen una disciplina que merece la pena aprender para la resolución de problemas económicos de nuestra sociedad.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcántara, V.; Tarancón, M. A.; Del Río, P. (2011) Algunas ideas sobre responsabilidad tecnológica de las estructuras productivas en relación al consumo de energía eléctrica, IV Jornadas Españolas de Análisis Input-Output, Madrid.
- Alcántara, V. (2011) Crecimiento económico y estructura productiva de un modelo Input-Output: Un análisis alternativo de sensibilidad de coeficientes, Documento de trabajo, 11.08, Universidad Autónoma de Barcelona.
- Coll, V.; Blasco, O. M. (2006) **Evolución de la Eficiencia mediante análisis envolvente de datos**, Universidad de Valencia.
- Duchin, F.; Steenge, A. E. (2007) *Mathematical Models in Input-Output Economics*, Rensselaer Polytechnic Institute, Working Papers in Economics, 0703, New York.
- Färe, R.; Lovell, C. A. K. (1978) Measuring the Technical Efficiency of Production, **Journal of Economic Theory**, 19: 150-162
- Farrell, M. (1957) The measurement of productive efficiency, **Journal of the Royal Statistical Society (Series A)**, 120 (3): 253-290.
- Martellato, D.; Tarancón, M. A. (2010) Productive Efficiency in 16 European Countries, Department of Economics, Working Papers Series, 22, University of Venice.
- Martellato, D.; Tarancón, M. A. (2005) Openness, dependency and productive efficiency in 9 European Countries, Department of Economics, Working Papers Series, 9, University of Venice.
- OCDE (2011) Input-Output Tables Database, available on line: [http://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=STAN\\_IO\\_TOTAL](http://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=STAN_IO_TOTAL)
- Prieto, A. M.; Zofío, J. L. (2007) Network DEA efficiency in input-output models: with an application to OECD countries, **European Journal of Operational Research**, 178: 292-304.
- Schintke, J. y Stäglin, R. (1988) Important Input Coefficients in Market Transactions Tables and Production Flow Tables, en Ciaschini, M. (Ed.) **Input-Output Analysis. Current Developments**, Chapman and Hall, Londres, Nueva York.

- Seiford, L. M.; Thrall, R. M. (1990) Recent Developments in DEA, The Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis, **Journal of Econometrics**, 46: 7-38.
- Takayama, A. (1985) **Mathematical Economics**, Cambridge University Press, New York.
- Tarancón, M. A. (2003) **Técnicas de Análisis Económico Input-Output**, ECU, Alicante.
- Tarancón, M. A.; del Río, P. (2007) Structural Factors affecting land-transport CO2 emissions: a European comparison, **Transportation Research Part D: Transport and Environment**, 12 (4): 239-253.