Determinación numérica con hoja de cálculo del área de influencia de empresas comerciales axialmente enfrentadas en un espacio periurbano elíptico

Díaz Martínez, Fernando Javier fjdiaz@maf.uva.es
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid

Conejo Garrote, Laura lconejo@am.uva.es
Departamento de Didáct. de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática
Universidad de Valladolid

Molina Moreno, Alberto alberto0916@hotmail.com

RESUMEN

Dos empresas comerciales están situadas en la periferia de una ciudad. Las ciudades suelen presentar un perímetro amorfo en torno al centro histórico; sin embargo, para simplificar los cálculos, en este estudio consideramos a ambas empresas ubicadas en los extremos de uno de los ejes de un espacio periurbano elíptico, más versátil y adaptable, no obstante, que anteriores estudios, diseñados para espacios periurbanos circulares.

Estimamos que el gasto realizado por un consumidor, al adquirir un bien en una empresa comercial, es la suma del precio de dicho bien adquirido más el coste de transporte del consumidor desde su domicilio hasta el establecimiento y viceversa. Dicho coste de transporte se calculará en base a la distancia en línea recta entre el domicilio del consumidor y la empresa comercial, siendo el coste de transporte por unidad de longitud recorrida constante.

Bajo estos supuestos, el trabajo se centra en calcular numéricamente, para un determinado bien, con ayuda de la hoja de cálculo, cuál es el área de influencia de cada empresa comercial, en función de la diferencia entre los precios de dicho bien en ambos establecimientos, entendiendo por área de influencia de una empresa para un bien, el lugar geométrico de todos los puntos de la ciudad en los que, al ser menor el gasto, un consumidor opta por dicha empresa para adquirir el bien.

Palabras claves: área de influencia; localización; empresa comercial; hoja de cálculo.

Área temática: Métodos cuantitativos e informáticos

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es la continuación natural del trabajo *Determinación Numérica con Hoja de Cálculo del Área de Influencia de Empresas Comerciales Diametralmente Enfrentadas en un Espacio Periurbano Circular*. En dicho estudio, se determinaron las áreas de influencia de los establecimientos comerciales, tanto desde el punto de vista geométrico como del de la caracterización analítica de dichas áreas de influencia, calculándolas numéricamente con ayuda de la hoja de cálculo, bajo la consideración de la hipótesis de un espacio periurbano circular. En el presente trabajo, damos un paso más y ampliamos el modelo al caso de un espacio periurbano ***elíptico***, más versátil y adaptable a la ya de por sí irregular morfología de las ciudades. De esta forma, el anterior modelo circular queda superado viéndose reducido a un caso particular del modelo elíptico del presente estudio. Este avance nos permitirá realizar simulaciones en base al nuevo modelo, lo cual nos arrojará luz sobre determinadas regularidades y comportamientos del mismo. Asimismo, tal progreso nos permitirá efectuar predicciones y comprender más esencialmente el fenómeno estudiado, con un modelo que en base a la acertada elección de los parámetros de la elipse se revela más preciso que el circular anterior.

2. DESCRIPCIÓN Y MODELIZACIÓN DE LA SITUACIÓN

Dos empresas comerciales están situadas en la periferia de una ciudad. Las ciudades suelen presentar un perímetro amorfo en torno al centro histórico; sin embargo, para simplificar los cálculos, en este estudio consideramos a ambas empresas ubicadas en los extremos de uno de los ejes de un espacio periurbano elíptico (Fig.1).

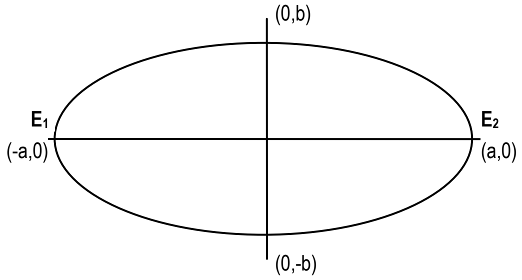

Fig.1

Estimamos que el gasto realizado por un consumidor, al adquirir un bien en una empresa comercial, es la suma del precio de dicho bien adquirido más el coste de transporte del consumidor desde su domicilio hasta el establecimiento y viceversa. Dicho coste de transporte se calculará en base a la distancia en línea recta entre el domicilio del consumidor y la empresa comercial, siendo el coste de transporte por unidad de longitud recorrida constante (Fig.2).

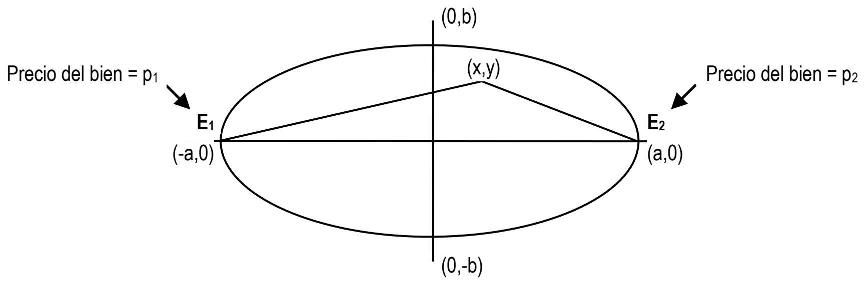

Fig.2

Esto es, dado un determinado bien, si denominamos:

p_i = precio del bien en la empresa comercial E_i, $i = 1, 2$

d_i = distancia en línea recta de un punto genérico (x,y) del espacio urbano a la empresa comercial E_i, $i = 1, 2$

τ = coste de transporte por unidad de longitud recorrida

G_i = gasto realizado por un consumidor localizado en un punto genérico (x, y) del espacio urbano al adquirir el bien en la empresa comercial E_i, obtenemos obviamente que:

$$\boxed{G_i = p_i + 2\tau d_i, \ \ i = 1,2}$$

Bajo estos supuestos, nuestra primera tarea se centrará en calcular y determinar, para un determinado bien, cuál es el área de influencia de cada empresa comercial, en función de la diferencia entre los precios de dicho bien en ambos establecimientos, entendiendo por área de influencia de una empresa para un bien, el lugar geométrico de todos los puntos de la ciudad en los que, al ser menor el gasto, un consumidor opta por dicha empresa para adquirir el bien.

Para ello, hallaremos, primeramente, el lugar geométrico de los puntos del espacio urbano en los que ambos gastos se igualan; a dicha curva se le denomina ***curva de indiferencia***, dado que en dichos puntos a un consumidor le es "indiferente" acudir a realizar la compra a una u otra empresa comercial, por resultar el gasto igual en ambos casos.

$$\boxed{G_1 = G_2} \Leftrightarrow p_1 + 2\tau d_1 = p_2 + 2\tau d_2 \Leftrightarrow 2\tau (d_1 - d_2) = p_2 - p_1 \Leftrightarrow \boxed{d_1 - d_2 = \frac{\nabla p}{2\tau}} \qquad (I)$$

siendo:

- $0 \leq d_i \leq 2a$, $i=1,2$ (consideramos la proyección plana del espacio periurbano en forma de elipse con eje mayor de medida 2a y eje menor de medida 2b). Esto implica que tanto $d_1 - d_2$ como $d_2 - d_1$ sean siempre menores o iguales que 2a.
- $p_2 - p_1 = \nabla p$ = diferencial de precio del bien entre ambas empresas comerciales[1].

[1] En aras de la sencillez, y sin pérdida de generalidad, consideraremos que $\nabla p > 0$ (esto es, $p_2 > p_1$), pues, de no ser así, los resultados obtenidos permitirán una fácil interpretación de dicha situación.

Tras los correspondientes cálculos, que en aras de la brevedad obviamos en el presente trabajo[2], se obtiene que, para un punto *(x,y)* del espacio urbano, la curva de indiferencia es:

$$\boxed{G_1 = G_2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = A\,x^2 + B \quad con \quad \begin{cases} A = \dfrac{(4a\tau)^2 - \nabla p^2}{\nabla p^2} \\ B = \dfrac{\nabla p^2 - (4a\tau)^2}{16\tau^2} \end{cases}} \qquad (II)$$

siendo $\nabla p \neq 0 \wedge \tau \neq 0$[3].

3. DETERMINACIÓN GEOMÉTRICA DEL ÁREA DE INFLUENCIA DE CADA EMPRESA

Si interpretamos el resultado obtenido desde un punto de vista dinámico, analizando cómo varía nuestra curva de indiferencia (y, por tanto, las áreas de influencia de ambas empresas comerciales) en función de la diferencia de precios del bien considerado en dichas empresas, ∇p, nos damos cuenta de que:

1) Cuando $\boxed{\nabla p = 0}$ *(mismo precio del bien en ambas empresas),* no es válida la expresión (II). Sin embargo, este caso es trivial, pues evidentemente en esta situación la curva de indiferencia es una recta, el eje OY, y cada empresa tiene,

---

[2] Para el lector interesado en dichos cálculos y conclusiones, puede encontrarlos desarrollados detalladamente en las Actas de las XII Jornadas de ASEPUMA en Murcia, en la comunicación *Determinación Geométrica del Área de Influencia de Empresas Comerciales Diametralmente Enfrentadas en un Espacio Periurbano Circular.*

[3] Si $\tau = 0$, el caso es trivial, pues en dicho caso el coste de transporte del consumidor desde su domicilio hasta el establecimiento comercial y viceversa es nulo, y, obviamente, aquel establecimiento que tenga un precio menor para el bien considerado será el elegido en cualquier caso, y, por ende, su área de influencia será el espacio urbano en su totalidad. Por tanto, en lo que sigue, *consideraremos que* $\tau \neq 0$.

como área de influencia, la mitad del espacio urbano (a la izquierda y a la derecha del eje OY, respectivamente).

2) Tras un vistazo a la expresión (II), adaptándola al caso en que $\boxed{0 < \nabla p < 4a\tau}$, *(diferencia de precios del bien en los dos establecimientos inferior al máximo coste de desplazamiento de ida y vuelta en el espacio urbano),* nos podemos percatar de que la curva de indiferencia obtenida es ahora una **hipérbola**[4] (Fig.3), que divide al espacio urbano en dos partes.

Se observa que ***el área de influencia de cada empresa E_i es la zona del espacio urbano (incluido su perímetro) que incluye a E_i y queda delimitada por dicha hipérbola.***

Tras un sencillo estudio analítico de la rama positiva de dicha hipérbola, y que en aras de la brevedad obviamos en el presente trabajo, obtenemos que los parámetros más relevantes de la misma son:

- ✓ Punto de corte con el eje OX: $x = \dfrac{\nabla p}{4\tau}$.
- ✓ Asíntotas oblicuas: $y = \pm\sqrt{A}\,x$

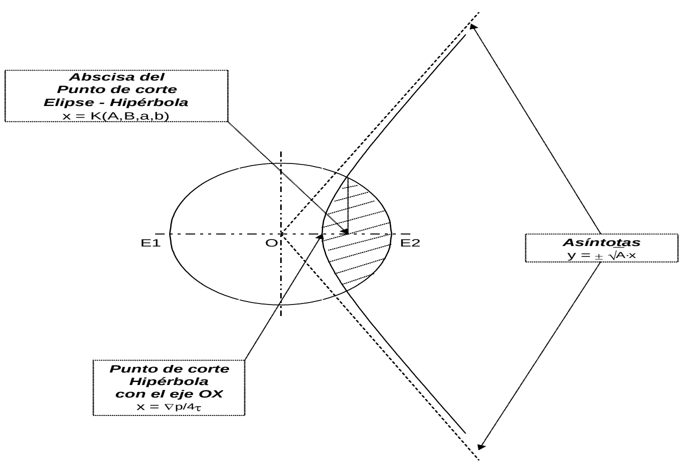

Fig.3

[4] Puesto que hemos supuesto que $\nabla p > 0$ $(p_2 > p_1)$, nos quedamos sólo con la rama definida sobre $\Re^+$ de la hipérbola, ya que $d_1 - d_2 > 0$ (ver expresión (I)), y, por tanto, $d_1 > d_2$. Si supusiésemos que $\nabla p < 0$ $(p_2 < p_1)$, nos quedaríamos con la rama definida sobre $\Re^-$.

Al ir creciendo ∇p (esto es, la empresa E_2 se va haciendo menos competitiva frente a E_1, en lo que al bien de referencia se refiere), la curva de indiferencia pasa a ser una hipérbola, que, según aumenta ∇p, va "cerrándose" y "desplazando su vértice hacia E_2", pues si ∇p crece $\Rightarrow A$ decrece (no olvidemos que el punto de corte de la hipérbola con el eje OX es $x = \frac{\nabla p}{4\tau}$, con lo cual éste se va aproximando a E_2, y que la medida de la "abertura" de la hipérbola nos la dan sus asíntotas $y = \pm\sqrt{A}\,x$, que cada vez van teniendo, en valor absoluto, menor pendiente).

Ante esta situación, y como no podía ser de otra manera, el área de influencia de E_1 va creciendo cada vez más, a costa del área de influencia de E_2, que va retrocediendo siguiendo una frontera geométricamente coherente, que no es otra que nuestra hipérbola.

3) $\boxed{\nabla p = 4a\tau}$ *(diferencia de precios del bien en los dos establecimientos igual al máximo coste de desplazamiento de ida y vuelta en el espacio urbano).* La dinámica anterior se mantiene hasta que ∇p alcanza el valor crítico de $4a\tau$, momento en el cual, simultánea y coordinadamente, nuestra hipérbola se cierra completamente, fundiéndose ambas ramas en una semirrecta, y su vértice alcanza el punto en el que se ubica le empresa E_2, que pasa a ser el extremo de dicha semirrecta horizontal, que se proyecta hacia el exterior de la ciudad. En ese momento - que es en el que el precio del bien en E_2 ya vale lo mismo que el precio en E_1 más el coste de transporte más alto que se puede dar en el espacio urbano (ida y vuelta a lo largo del eje mayor de la elipse) -, no hay ningún punto de la ciudad donde sea menos costoso adquirir el bien en E_2; tan sólo los consumidores en E_2 pueden elegir, pues les es igual (en cuanto a coste) adquirir el bien en E_2 o trasladarse a E_1 para adquirirlo. La curva de indiferencia (semirrecta en este caso) está fuera del espacio urbano, y sólo contacta con éste en E_2, por lo que el área de influencia de E_2 se ha anulado completamente y E_1 ha "monopolizado" la ciudad.

4) $\boxed{\nabla p > 4a\tau}$ *(diferencia de precios del bien en los dos establecimientos superior al máximo coste de desplazamiento de ida y vuelta en el espacio urbano).* Si ∇p sigue creciendo, y sobrepasa el umbral de $4a\tau$, entonces ya incluso los consumidores en E_2 se trasladarán a E_1, pues el precio del bien en E_2 es tan alto que compensa ir a E_1, incluso pagando el transporte. En este caso nuestra curva de indiferencia pasa a ser una nueva elipse que deja en su interior a todo el espacio urbano elíptico (incluido el perímetro), siendo su interior el área de influencia de E_1 (es decir, toda la ciudad).

4. DETERMINACIÓN ANALÍTICA DEL ÁREA DE INFLUENCIA DE CADA EMPRESA (Caso 2: $0 < \nabla p < 4a\tau$)

Vamos a proceder al estudio del caso en el que *la diferencia de precios del bien en los dos establecimientos existe y es inferior al máximo coste de desplazamiento de ida y vuelta en el espacio urbano* (el coste para ir de un extremo del eje mayor de la elipse a otro y viceversa, $2{\cdot}2a{\cdot}\tau = 4a\tau$).

Bajo este supuesto, se deduce obviamente de la expresión (II) que $\mathbf{A > 0}$ y $\mathbf{B < 0}$, siendo *A* y *B* los coeficientes de la curva de indiferencia hiperbólica.

Nuestro objetivo será calcular las áreas de influencia de cada empresa, en función naturalmente de los inputs de entrada: ∇p, τ, a y b.

Desde un punto de vista analítico, el área de influencia de E_2 coincide[5], geométricamente, con el área rayada en la gráfica (ver Fig.3). Obviamente, el área de influencia de E_1 será *(πab– área de influencia de E_2).* Estos datos absolutos, se podrán relativizar porcentualmente, dividiendo ambos por el área total del espacio urbano, πab, y multiplicando por 100. De esta manera, fijadas las condiciones de los inputs del modelo, obtendremos, porcentualmente, el área de influencia de cada empresa para el

[5] Nos centraremos en E_2 en lugar de en E_1 simplemente por facilidad de cálculo. En cualquier caso, el resultado final, obviamente, será el mismo.

bien considerado, y podremos realizar simulaciones para investigar el fenómeno estudiado.

Para ello, debemos hallar analíticamente el área rayada en la gráfica. Sabemos que:

$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ es la ecuación del espacio periurbano (elipse de centro O y semiejes a y b)

$\boxed{y^2 = Ax^2 - |B|}$ es la ecuación de la curva de indiferencia (hipérbola) [6]

Puesto que nuestra intención es hallar los puntos de corte de ambas cónicas, nos centraremos sólo en las ramas positivas de ambas. Dichos puntos de corte satisfarán que:

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{Ax^2-|B|}$$

Realizando los elementales cálculos oportunos, obtenemos que los puntos de corte son: $x=\pm a\sqrt{\frac{|B|+b^2}{Aa^2+b^2}}$ (nos quedaremos con el punto de corte en $\Re^+$)

Si denominamos, para mayor facilidad de notación, $K(A,B,a,b)=a\sqrt{\frac{|B|+b^2}{Aa^2+b^2}}$, entonces, observando la gráfica, podemos establecer que:

$$\boxed{\text{Área de Influencia de } E_2 = 2\cdot\left[\int_{\nabla p/4\tau}^{K(A,B,a,b)}\sqrt{Ax^2-|B|}\,dx \;+\; \frac{b}{a}\int_{K(A,B,a,b)}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right]}$$

Haciendo uso del cálculo integral, obtenemos que:

[6] Por facilidad de cálculo, nos permitimos escribir así la ecuación de la hipérbola puesto que en el caso que nos ocupa, $B < 0$, y por tanto, $Ax^2 + B = Ax^2 - |B|$.

$$\int_{\nabla p/4\tau}^{K(A,B,a,b)} \sqrt{Ax^2-|B|}\ dx = \left[\begin{array}{c} x=\frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{A}}\,cht\ ;\ dx=\frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{A}}\,sht\,dt \\ t=Ln\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{|B|}}\,x+\sqrt{\frac{Ax^2}{|B|}-1}\right)=\Phi(x) \\ \sqrt{Ax^2-|B|}=\sqrt{|B|}\ sht \end{array}\right] = \frac{|B|}{\sqrt{A}}\int_{\Phi(\nabla p/4\tau)}^{\Phi[K(A,B,a,b)]} sh^2\,t\ dt =$$

$$= \cdots = \frac{|B|}{4\sqrt{A}}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}-2t\right)_{\Phi(\nabla p/4\tau)}^{\Phi[K(A,B,a,b)]} \quad \text{(Integral 1)}$$

y que:

$$\int_{K(A,B,a,b)}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \left[\begin{array}{c} x=a\,sent\,;\ dx=a\cos t\ dt \\ t=arcsen\,\frac{x}{a} \\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \end{array}\right] = a^2\cdot\int_{arcsen\left(\frac{K(A,B,a,b)}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt =$$

$$= \cdots = a^2\left(\frac{1}{2}\cos t\,sen\,t+\frac{1}{2}t\right)_{arcsen\left(\frac{K(A,B,a,b)}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(Integral 2)}$$

con lo que ya tenemos determinada, analíticamente, el área de influencia de E_2, y, lógicamente, a partir de ella, la de E_1.

5. UTILIZACIÓN DE LA HOJA DE CÁLCULO PARA LA DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE ÁREAS DE INFLUENCIA

Si observamos no sólo el resultado, sino también el proceso seguido, podemos darnos cuenta de que los cálculos para determinar numéricamente las áreas de influencia de ambas empresas parten de unos inputs, para, a través de una serie de cálculos paso a paso, obtener finalmente las áreas de influencia buscadas. Detectamos, por tanto, que el proceso es un algoritmo fácilmente implementable sin necesidad de ningún programa de cálculo complejo; es más, la tarea de implementarlo en una **hoja de cálculo** se presenta como una opción interesante, que vamos a desarrollar en esta última parte del trabajo.

La secuencia de cálculos para, a partir de los *inputs (*p_1*,* p_2*,* τ*,* a y b*)*, obtener los *outputs (las áreas de influencia de cada empresa en formato porcentual)* es el siguiente:

Inputs:	p_1, p_2, τ, a, b (Condición: $p_2 > p_1 \wedge p_2 - p_1 < 4a\tau$)
Paso 1:	Calcular: $\nabla p = p_2 - p_1$
Paso 2:	Calcular: $\begin{cases} A = \dfrac{(4a\tau)^2 - \nabla p^2}{\nabla p^2} \\ B = \dfrac{\nabla p^2 - (4a\tau)^2}{16\tau^2} \end{cases}$
Paso 3:	Calcular: $\begin{cases} K(A,B,a,b) = a\sqrt{\dfrac{\lvert B\rvert + b^2}{Aa^2 + b^2}} \\ \dfrac{\nabla p}{4\tau} \end{cases}$
Paso 4:	Calcular: $\Phi\left[K(A,B,a,b)\right] \quad \wedge \quad \Phi\left(\dfrac{\nabla p}{4\tau}\right)$
Paso 5:	Calcular: $Integral\ 1 = \dfrac{\lvert B\rvert}{4\sqrt{A}} \cdot \left(\dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{-2t} - 2t\right)_{\Phi(\nabla p/4\tau)}^{\Phi\left[K(A,B,a,b)\right]}$
Paso 6:	Calcular: $\Lambda(A,B,a,b) = arcsen\left(\dfrac{K(A,B,a,b)}{a}\right)$
Paso 7:	Calcular: $Integral\ 2 = a^2\left(\dfrac{1}{2}\cos t\, sen\, t + \dfrac{1}{2}t\right)_{\Lambda(A,B,a,b)}^{\frac{\pi}{2}}$

Paso 8: Calcular: $$Área\ de\ Influencia\ \ de\ E_2 = 2 \cdot \left(Integral\ \ 1 + \frac{b}{a}\, Integral\ \ 2 \right)$$

$$Área\ de\ Influencia\ \ de\ E_1 = \pi a b - Área\ de\ Influencia\ \ de\ E_2$$

Paso 9: Calcular:

$$\%\ Área\ de\ Influencia\ \ de\ E_2 = \frac{Área\ de\ Influencia\ \ de\ E_2}{\pi a b} \cdot 100$$

$$\%\ Área\ de\ Influencia\ \ de\ E_1 = 100 - \%\ Área\ de\ Influencia\ \ de\ E_2$$

Siguiendo el anterior esquema se ha implementado en una hoja de cálculo todo el algoritmo (Fig.4), de modo que de ésta se obtiene una salida como la siguiente (a modo de ejemplo):

CÁLCULO DEL ÁREA DE INFLUENCIA DE EMPRESAS AXIALMENTE ENFRENTADAS EN UN ESPACIO PERIURBANO ELÍPTICO

INPUTS del modelo:	p1 = 100	τ = 1
¡¡ p2 > p1 !!	p2 = 125	a = 25
¡¡ p2 - p1 < 4aτ !!		b = 10

Paso 1:	∇p = 25	(¡¡OJO!!: ha de ser **mayor que 0 y menor que 4aτ**)
Paso 2:	A = 15	B = -585,9375
Paso 3:	K (A,B,a,b) = 6,72655461	∇p/4τ = 6,25
Paso 4:	Φ(K(A,B,a,b)) = 0,38806956	Φ(∇p/4τ) = 0
Paso 5:	Integral 1 = 3,03727708	
Paso 6:	Λ(A,B,a,b) = 0,27241918	
Paso 7:	Integral 2 = 324,761633	
Paso 8:	Área de Influencia de E2 = 265,883861 Área de Influencia de E1 = 519,514303	
Paso 9:	**% del Área de Influencia de E2 -------> 33,8533846** **% del Área de Influencia de E1 -------> 66,1466154**	

Fig.4

Como vemos, tras introducir los inputs del modelo *(p_1, p_2, τ, a y b)* (con las restricciones sobre los precios *($p_2 > p_1$)* y *($p_2 - p_1 < 4a\tau$)*), en el ***paso 1*** se calcula el diferencial de precios del bien en ambas empresas comerciales, $\nabla p = 25$; en el ***paso 2***, se calculan los coeficientes de la hipérbola, $A = 15$ y $B = -585{,}9375$; en el ***paso 3*** se calculan los extremos de integración de la integral 1, $\frac{\nabla p}{4\tau} = 6{,}25$ *y* $K(A, B, a, b) = 6{,}72655461$; en el ***paso 4***, se calculan los correspondientes extremos de integración tras el cambio de variable, $\Phi\left[K(A, B, a, b)\right] = 0{,}38806956$ y $\Phi\left(\frac{\nabla p}{4\tau}\right) = 0$, para calcular en el ***paso 5*** el valor de la primera integral (integral 1 = 3,03727708); en el ***paso 6*** se calcula el extremo de integración inferior de la integral 2 tras el cambio de variable, $\Lambda(A, B, a, b) = arcsen\left(\frac{K(A, B, a, b)}{a}\right) = 0{,}27241918$ (el extremo superior es de cálculo trivial, *arcsen 1*= $\frac{\pi}{2}$), para calcular en el ***paso 7*** el valor de la segunda integral (integral 2 = 324,761633); en el ***paso 8*** se calculan ya las áreas de influencia de ambas empresas, (la de $E_2 = 265{,}883861$, a partir de ambas integrales, y la de $E_1 = 519{,}514303$, como el resto hasta el área total de la elipse, $\pi a b = \pi \cdot 25 \cdot 10 = 250 \cdot \pi = 785{,}398164$), y por último, en el ***paso 9***, se calculan los correspondientes porcentajes de área de influencia para ambas empresas comerciales, **33,8533846%** para $\boldsymbol{E_2}$, *y* **66,1466154%** para $\boldsymbol{E_1}$.

6. UNA REGULARIDAD "PERDIDA" EN EL MODELO ELÍPTICO

Como reseñaremos en las conclusiones, la mayor parte de las regularidades del presente modelo elíptico son comunes al caso en el que el espacio periurbano es circular (al fin y al cabo, un espacio periurbano circular no es más que un caso particular del modelo elíptico, con *a = b = radio*).

Sin embargo, las simulaciones con la hoja de cálculo nos han permitido contrastar una peculiaridad del modelo circular que **no es generalizable** al modelo elíptico.

Dicha regularidad para el caso de espacio periurbano circular, podía enunciarse matemáticamente así:

$\forall r,\ \tau \in \Re^{+},\ \mu \in (0,100),$ *si* $\nabla p = \mu/100 \cdot 4r\tau$, *entonces los % de Área de Influencia de* E_1 *y* E_2 *para dicho* ∇p *son* ***constantes y no dependen ni de*** τ ***ni de*** r

Dicho en términos económicos: *sean cuales sean r y τ, si calculamos el coste de desplazamiento máximo en el espacio urbano (4rτ) a la hora de adquirir el bien, entonces las áreas de influencia de* E_1 *y de* E_2*, ante un diferencial en el precio del bien de un μ% de dicho coste máximo, son* ***constantes y no varían para dicho μ, aunque cambien*** *r* ***y/o*** *τ.*

De ello se derivaba que el descenso (o ascenso) de las áreas de influencia ante las variaciones del diferencial de precios del bien, ***mantenían, en un espacio periurbano circular, un patrón fijo de crecimiento/decrecimiento ante variaciones porcentuales del mismo, con respecto al coste de desplazamiento máximo***, según se puede ver en la siguiente tabla:

∇p	% Ar. Infl. E1	% Ar. Infl. E2
0	50	50
10% de 4rτ	57,2855	42,7145
20% de 4rτ	64,4415	35,5585
30% de 4rτ	71,3368	28,6632
40% de 4rτ	77,8371	22,1629
50% de 4rτ	83,8031	16,1969
60% de 4rτ	89,0877	10,9123
70% de 4rτ	93,5337	6,4663
80% de 4rτ	96,9686	3,0314
90% de 4rτ	99,1991	0,8009
100% de 4rτ	100	0

Fig.5

Este avance nos permitía confeccionar tablas como la de la Fig.5 (o más densas, si fuese necesario), con las que nuestras hipotéticas empresas comerciales podían ***conocer de antemano***, una vez fijados *r* y *τ*, qué pérdida o ganancia en área de influencia iban a experimentar para el bien considerado, ante una variación en el precio, referenciándola siempre en porcentaje con respecto al coste de desplazamiento máximo. Y todo ello sin ni siquiera usar la hoja de cálculo, con el fin de "mecanizar para profanos la toma de decisiones".

Sin embargo, las simulaciones con la hoja de cálculo demuestran que **tal regularidad no es "exportable" al caso de espacios periurbanos elípticos**, en los que las áreas de influencia varían aunque se mantenga un diferencial de precios porcentualmente constante con respecto al coste del mayor desplazamiento en el espacio urbano. La razón intuitiva, geométrica de fondo, sin ninguna duda, radica en la "perfecta regularidad" del círculo que no tiene la elipse, y que le confiere dicha propiedad al modelo en un espacio periurbano circular, a diferencia con el elíptico.

7. CONCLUSIONES

La potencia del uso de la hoja de cálculo en el contexto de nuestro trabajo no radica solamente, como era de esperar, en la rapidez y precisión de los cálculos, si no que nos permite, merced a la posibilidad de realizar numerosas simulaciones, contrastar y poner de relieve algunas regularidades y propiedades que, o bien eran previsibles desde el punto de vista del mero soporte económico y comercial, o bien no lo eran pero nos fuerzan a reflexionar sobre las mismas.

Así, a partir de las distintas simulaciones con la hoja de cálculo, podemos comprobar algunas regularidades previsibles, como que:

1) Manteniendo constantes τ y a y b, el aumento de ∇p reduce el área de influencia de E_2 y aumenta la de E_1.
2) Para un mismo diferencial en el precio del bien, ∇p, el descenso porcentual en el área de influencia de E_2 es mucho menor cuanto mayores sean τ (coste de transporte por unidad de longitud recorrida) y/o a y b (dimensiones de los semiejes del espacio urbano, que determinan el "tamaño" de la ciudad), o dicho de otra forma:
    - Cuanto mayor es el coste de transporte por unidad de longitud recorrida τ, mayor ha de ser ∇p para conseguir variaciones significativas en las respectivas áreas de influencia.

- Cuanto mayores son las dimensiones del espacio urbano (a y b), mayor ha de ser también ∇p para conseguir variaciones significativas en las respectivas áreas de influencia[7].

3) Manteniendo constantes las dimensiones del espacio urbano (a y b) y el diferencial en el precio del bien ∇p, la subida en el coste de transporte por unidad de longitud recorrida τ reduce las diferencias entre las áreas de influencia de ambas empresas, tendiendo a igualarse.

4) Cuando $\nabla p = 0 \vee \nabla p \geq 4a\tau$, la hoja de cálculo da error (pues está diseñada para $0 < \nabla p < 4r\tau$).

Las anteriores regularidades, como hemos mencionado, son comunes al caso en el que el espacio periurbano es circular (un espacio periurbano circular no es más que un caso particular del modelo elíptico, con $a = b = radio$), aunque, como hemos visto, las simulaciones con la hoja de cálculo también nos han permitido contrastar una peculiaridad del modelo circular que **no es generalizable** al modelo elíptico.

Así que, como vemos, la "geometría" de la ciudad, quién iba a decírnoslo, puede complicarle el mecanismo de toma de decisiones al responsable de la política de precios de una empresa comercial…

¡Qué caprichosas son nuestras queridas matemáticas!

---

[7] Reseñar, en este caso, que el hecho de que la variación obtenida por una empresa en su área de influencia, ante una hipotética modificación del diferencial de precio del bien considerado, sea baja, ha de interpretarse siempre en términos porcentuales o relativos con respecto al total del espacio urbano, y no por ello ha de ser necesariamente desdeñable. Una variación de un punto porcentual en las áreas de influencia es más difícil de conseguir, variando la política de precios, en una ciudad grande, pero una vez conseguida, supone más clientes ganados para la empresa que en una ciudad pequeña, por lo que puede serle rentable.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASARES, J. et alt (1987). "La economía de la distribución comercial". Ariel Economía. Barcelona.

- CHASCO YRIGOYEN, M. C. (1996). "Aplicación de los modelos de gravitación comercial a la determinación de las áreas de mercado". Investigación y Marketing, 52, pp. 44-68.

- DÍAZ MARTÍNEZ, F. J. (2004). "Determinación geométrica del área de influencia de empresas comerciales diametralmente enfrentadas en un espacio periurbano circular". Actas XII ASEPUMA (Murcia).

- DÍAZ MARTÍNEZ, F. J. (2006). "Determinación numérica con hoja de cálculo del área de influencia de empresas comerciales diametralmente enfrentadas en un espacio periurbano circular". Actas XIV ASEPUMA (Badajoz).

- GREENHUT, M. L. y NORMAN, G. (1995). "The economics of location. Volume I. Location theory". Edward Elgar Publishing (The International Library of Critical Writings in Economics).

- HERRERO PRIETO, L. C. (1991). "Localización industrial: teorías y técnicas". Junta de Castilla y León. Monográficos de la Consejería de Economía y Hacienda, núm. 29.

- PRECEDO LEDO, A. (1989). "Teoría Geográfica de la Localización Industrial". Servicio de Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela.