MATRICES ENTRADAS Y VALORES PROPIOS ENTEROS

Matrices Entries And Integer Eigenvalues

RESUMEN

Se dan condiciones para que algunas familias de matrices con entradas enteras posean valores propios enteros. En cada caso se determina si las matrices son diagonalizables.

PALABRAS CLAVES: Valores y vectores propios, diagonalización.

ABSTRACT
There are conditions for some matrix families with integer entries and integer eigenvalues. In each case is determined if the matrices are diagonalizables.

KEYWORDS: Eigenvectors, eigenvalues, diagonalization.

ALEXANDER GUTIERREZ
Matemático, Msc.
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
alexguti@utp.edu.co

LEONARDO PRIETO
Matemático, Dr.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
lprieto@utp.edu.co

YURI ALEXANDER POVEDA
Matemático, Dr
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

En diversos artículos se estudian propiedades de matrices con entradas enteras, por ejemplo [1],[2].

El problema de caracterizar matrices con entradas enteras y valores propios enteros fue resuelto por Renaud [2], en donde se da una condición necesaria y suficiente para que una matriz de enteros tenga valores propios enteros. Sin embargo, esta condición no es verificable directamente para una matriz dada.

En este trabajo se presenta condiciones suficientes para que algunas matrices con entradas enteras tengan valores propios enteros, estas condiciones son verificables directamente sobre una matriz dada. Además en cada caso se determina si la matriz es diagonalizable.

2. CONTENIDO

Construiremos las matrices basados en una idea que surge para construir matrices de orden 2. Si la matriz A se escribe como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Fecha de Recepción: 5 de Junio de 2008.
Fecha de Aceptación: 27 de Julio de 2008.

Donde a, b, c, d son enteros y se satisface la condición

$$a + b = c + d. \qquad (2)$$

Entonces A posee valores propios

$$\lambda_1 = a + b \text{ y } \lambda_2 = a - c \qquad (3)$$

Ahora, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces la matriz es diagonalizable y si $\lambda_1 = \lambda_2$ entonces la matriz A no es diagonalizable y podemos reescribir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} d - 2b & b \\ -b & d \end{pmatrix}$$

Nuestro objetivo se centra en extender esta idea a matrices de orden 3 y 4. Observe que si naturalmente pensamos en una matriz de orden 3 tal que la suma de las filas sea la misma, es posible que no todos los valores propios sean enteros, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tiene valores propios

$$\lambda_1 = 6, \qquad \lambda_2 = 1 + \sqrt{6} \quad \text{y} \; \lambda_3 = 1 - \sqrt{6}$$

2.1 MATRICES DE ORDEN 3.

Entonces debemos andar con cuidado para hacer la generalización. La idea es construir matrices de orden 3 que tengan entradas, valores propios enteros y satisfagan que la matriz de cofactores 33 se la matriz de orden 2 dada en (1) con las condiciones (2). Se buscan siempre la solución más sencilla, con la menor cantidad de ceros posibles. En concreto, se dan condiciones sobre x, y, z, w para que la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ z & w & e \end{pmatrix}$$

satisfaga (2) y tenga los valores propios e y (3). Lo anterior es equivalente a encontrar las soluciones entera del sistema

$$\begin{aligned} xz + wy &= 0 \\ zby - zdx - way + wcx &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Bajo la condición (2). En todos los casos que siguen la matriz A es diagonalizable únicamente cuando los valores propios son distintos.

Caso 1. Una familia de soluciones de (2) y (4) es $y = x$ y $z = -w$. Así la matriz puede reescribir como

$$A = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & x \\ z & -z & e \end{pmatrix}$$

Caso 2. Otra familia de soluciones de (2) y (4) es $z = y = -uc$ y $x = -w = ub$, para cualquier entero u. Así tenemos que la matriz se puede reescribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b & u\,b \\ c & d & -u\,c \\ -u\,c & -u\,b & e \end{pmatrix}$$

Caso 3. Análogamente otra familia de soluciones de (2) y (4) es $z = -y = uc$ y $x = w = ub$, para cualquier entero u. Así tenemos que la matriz se puede reescribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b & u\,b \\ c & d & -u\,c \\ u\,c & u\,b & e \end{pmatrix}$$

Caso 4. Una familia de soluciones de (2) y (4) es $y = -x$, $z = w$ y $a = d = 0$. Así la matriz se puede reescribir como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & x \\ b & 0 & -x \\ z & z & e \end{pmatrix}$$

Observación 1. Otra familia de matrices que satisface las ecuaciones (2) y (4) son

$$A = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Que tienen la particularidad de ser también diagonalizable cuando uno de los valores propio se repite, $\lambda_2 = \lambda_3$. Se puede demostrar fácilmente, ver [2], que si la matriz A con entradas enteras y orden 3 tiene un valor propio de multiplicidad algebraica 3 entonces A es una matriz triangular.

Observación 2. Otra familia de matrices de orden 3 que se puede escribir de una forma sencilla, ver [1], pero no cumple las condiciones (2) y (4) simultáneamente son

$$A = \begin{pmatrix} a+k & r & r \\ b & s+k & s \\ -b & t & t+k \end{pmatrix}$$

Con valores propios $\lambda_1 = a + k, \lambda_2 = k,$ y $\lambda_3 = t + s + k.$

2.2 MATRICES DE ORDEN 4.

Ahora se darán condiciones para las cuales algunas matrices de orden 4 con entradas enteras tienen valores propios enteros. La construcción de las matrices se hará siguiendo las ideas expuestas en la sección anterior. Las matrices de orden 4 que se estudian son matrices de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} R & S \\ V & T \end{pmatrix}$$

1. Las notas de pie de página deberán estar en la página donde se citan. Letra Times New Roman de 8 puntos

Donde R, S, V y T son matrices de orden 2. Es de interés que las matrices de la diagonal de A

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Satisfagan la condición (2). La idea es encontrar S, V para que la matriz A tenga cuatro valores propios de la forma (3), es decir, que los valores propios sean

$\lambda_1 = a + b$, $\lambda_2 = a - c$, $\lambda_3 = e + f$ y $\lambda_4 = e - g$

Los casos estudiados en la sección anterior para matrices de orden 3 nos siguieren las formas de las matrices S, V.

$$S = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V = z\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ o}$$

$$S = u\begin{pmatrix} b & b \\ -c & -c \end{pmatrix}, V = -u\begin{pmatrix} c & b \\ c & b \end{pmatrix} \text{ o}$$

$$S = u\begin{pmatrix} b & b \\ -c & -c \end{pmatrix}, V = u\begin{pmatrix} c & b \\ c & b \end{pmatrix} \text{ o}$$

$$S = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, V = z\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. CONCLUSIÓN

En [1] se destaca la importancia de los resultados allí obtenidos para que los estudiantes de cursos de álgebra lineal puedan construir ejemplos de de matrices con entradas enteras y valores propios enteros. Como conclusión de este trabajo queremos resaltar su aporte en la consecución de ejemplos de matrices diagonalizables y no diagonalizables con entradas enteras y valores propios enteros.

N. BIBLIOGRAFÍA

[1]R. Gilbert, "Companion matrices with integer enries and integer eigenvalues and eigenvectors," *American mathematical monthly*, vol. 95, pp.947-950, Dic. 1988.

[2]J. C. Renaud, "Matrices with integer entries and integer eigenvalues" *American mathematical monthly*, vol. 90, pp. 202-203, Mar. 1983.