

## FLUJO DE POTENCIA ÓPTIMO CON RESTRICCIONES DE SEGURIDAD USANDO UN METODO DE PUNTO INTERIOR

### Security-constrained optimal power flow using an interior point method

#### RESUMEN

Este artículo presenta un modelo de flujo de potencia óptimo con restricciones de seguridad usando un método de punto interior predictor-corrector. El modelo consiste en una formulación de flujo óptimo con flujos post-contingencia acoplados. El modelo considera contingencias simples en líneas de transmisión y/o transformadores encontrando un esquema de despacho que minimiza el deslastre de carga. Se presentan resultados para un sistema de prueba de 6 barras.

**PALABRAS CLAVES:** Flujo de potencia óptimo, métodos de punto interior, programación lineal.

#### ABSTRACT

*This paper presents a security-constrained optimal power flow model using a predictor-corrector interior point method. The model consists of an optimal power flow formulation coupled with post-contingency flows. The model considers single contingencies in transmission lines and/or transformers and finds a dispatch that minimizes the load shedding. Results are presented in a 6 bus test system.*

**KEYWORDS:** *Optimal power flow, interior point methods, linear programming.*

#### 1. INTRODUCCIÓN

El Flujo de Potencia Óptimo (OPF- *Optimal Power Flow*) consiste en despachar una serie de generadores para satisfacer una demanda dada teniendo en cuenta las restricciones del sistema y haciéndolo al menor costo posible. La solución general de un OPF consiste en minimizar (o maximizar) una función objetivo sujeta a restricciones de igualdad y desigualdad. La función objetivo puede tomar diferentes formas dependiendo del propósito del OPF. Algunos ejemplos de función objetivo incluyen la minimización de un parámetro como las pérdidas del sistema, el costo de operación y las emisiones. Otras formas de función objetivo pueden contemplar la maximización de un parámetro como el beneficio social neto.

El problema de Flujo de Potencia Óptimo se puede abordar usando un modelo simplificado de la red, lo cual da origen a un Flujo de Potencia Óptimo DC (DCOPF). El modelo DC de la red se obtiene ignorando las pérdidas y linealizando las ecuaciones de flujo de potencia. Este modelo simplificado nació a partir de los trabajos de Stott y Alsac en OPF con restricciones de seguridad [1].

Para resolver un DCOPF se pueden usar técnicas de Programación Lineal o Programación Cuadrática [2]. La Programación Cuadrática es un caso especial de programación no lineal donde la función objetivo es cuadrática y las restricciones son lineales.

En el caso de OPF usando Programación Lineal no solo

**JESÚS MARÍA LÓPEZ LEZAMA**

Ingeniero Electricista, M. Sc.  
Profesor Auxiliar  
Universidad de Antioquia  
lezama@udea.edu.co

**LUIS ALFONSO GALLEGOPAREJA**

Ingeniero Eléctrico, M. Sc.  
Estudiante de doctorado de la  
Universidad Estadual Paulista, Ilha  
Solteira - Brasil  
gallegopareja@gmail.com

se debe tener una formulación lineal de las restricciones del sistema, sino también de la función objetivo. El Método Simplex es uno de los más conocidos para abordar este tipo de problemas. Sin embargo, los métodos de puntos interiores han demostrado ser más eficientes cuando se manejan problemas de grandes dimensiones [3].

Cuando se modela un Flujo de Potencia Óptimo que no solo considera las restricciones de la red bajo funcionamiento normal, sino también bajo contingencias, se tiene un Flujo de Potencia Óptimo con Restricciones de Seguridad (SCOPF). La consideración de factibilidad ante primeras contingencias en el cálculo del OPF aparece en la literatura por primera vez en 1974 en el trabajo desarrollado por Stott y Alsac [1]. Sin embargo, esta metodología no garantiza la obtención de una solución óptima matemática, dado que las contingencias son ingresadas una a la vez, haciendo que la solución óptima dependa del orden en que se ingresen las contingencias [4].

Para obtener un despacho seguro de menor costo, es necesario considerar todas las contingencias a la vez, lo cual es posible mediante la inclusión de flujos post-contingencia acoplados en la formulación del problema. La idea de estos flujos aparece por primera vez en la literatura en [5] en donde se propone el uso de flujos post-contingencia acoplados en el contexto de Flujo de Potencia Óptimo con convocatoria de unidades y reserva distribuida segura. Esta idea fue posteriormente usada por

Chen [6] restringiendo su aplicación al problema del flujo óptimo con reserva distribuida de energía.

En este artículo se presenta un modelo de flujo de potencia óptimo con restricciones de seguridad basado en contingencias. Para considerar todas las contingencias al mismo tiempo se plantea un sistema equivalente por islas en donde la primera isla corresponde al caso base, y las restantes corresponden al sistema tras cada una de las contingencias. Dado que el sistema equivalente es de gran tamaño se ha utilizado un método de punto interior predictor-corrector para resolver el problema de Programación Lineal resultante.

## 2. MODELO DE FLUJO ÓPTIMO CON RESTRICCIONES DE SEGURIDAD

A continuación se presenta la formulación matemática del flujo de potencia óptimo con restricciones de seguridad:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{nc} \sum_{i=1}^{ng} f(Pg_i^j) \quad (1)$$

sa:

$$Pg_k^j - D_k^j = \sum_{m=1}^{nl} F_{km}^j \quad (2)$$

$$F_{km}^j = (\theta_k^j - \theta_m^j) / x_{km} \quad (3)$$

$$\theta_{ref}^j = 0 \quad (4)$$

$$F_{km\_min}^j \leq F_{km}^j \leq F_{km\_max}^j \quad (5)$$

$$Pg_{i\_min}^j \leq Pg_i^j \leq Pg_{i\_max}^j \quad (6)$$

$$|Pg_i^j - Pg_i^0| \leq R_i \quad (7)$$

donde:

$Pg_i^j$ : Potencia entregada por el generador  $i$  en la  $j$ -ésima contingencia;

$D_k^j$ : Demanda de la barra  $k$  en la  $j$ -ésima contingencia

$F_{km}^j$ : Flujo en la línea (o transformador) que une las barras  $km$  en la  $j$ -ésima contingencia;

$\theta_k^j$ : Angulo de la barra  $k$  en la  $j$ -ésima contingencia;

$R_i$ : Velocidad de toma de carga del generador  $i$ ;

$x_{km}$ : Impedancia de la línea (o transformador) que une las barras  $km$ .

En este caso  $j=0$  corresponde al caso base, donde no se considera ninguna contingencia. Las contingencias

contempladas en el modelo consisten en fallas simples de una línea de transmisión o un transformador.

La ecuación (1) representa la función objetivo, la cual es la sumatoria de las funciones de costo de los generadores para cada una de las contingencias. En este caso, estas funciones de costo son ponderadas por la probabilidad de ocurrencia de la contingencia. Las ecuaciones (2) y (3) corresponden a la primera y segunda ley de Kirchhoff respectivamente. La ecuación (4) indica que el ángulo de la barra de referencia se debe mantener igual a cero para el caso base y cada una de las contingencias. Las ecuaciones (5), (6) y (7) corresponden a los límites mínimos y máximos de los flujos en las líneas, las potencias generadas y las velocidades de toma de carga (rampas) de los generadores. La primera y segunda ley de Kirchhoff se pueden escribir como lo indican las ecuaciones (8) y (9).

$$SF + MgPg = D \quad (8)$$

$$IF + X^{-1}S^T\theta = 0 \quad (9)$$

En este caso  $Mg$  corresponde a una matriz de posicionamiento de generadores en donde las filas corresponden a los nodos y las columnas a los generadores. Si la posición  $Mg(i,j)$  es igual a uno, significa que el generador  $j$  se encuentra en el nodo  $i$ . Esta formulación permite colocar más de un generador en una sola barra [7]. La matriz diagonal de reactancias es representada por  $X$  y la matriz de incidencia nodo rama por  $S$ . Para representar el modelo de forma compacta se utiliza el vector  $x$  que contiene las variables de optimización y esta dado por:

$$x = [F \ Pg \ \theta \ R]^T \quad (10)$$

De esta forma, las ecuaciones (8) y (9) se pueden escribir de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} S & Mg & 0 & 0 \\ I & 0 & X^{-1}S^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ Pg \\ \theta \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

En este caso todas las expresiones de la ecuación (11) corresponden a las obtenidas con el sistema equivalente. A manera de ejemplo, las matrices  $S$  y  $Mg$  estarían dadas por las expresiones (12) y (13) respectivamente, donde  $nc$  indica el número de contingencias.

$$S = \begin{bmatrix} S^0 & & & & \\ & S^1 & & & \\ & & S^2 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & S^{nc} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$Mg = \begin{bmatrix} Mg^0 & & & & \\ & Mg^1 & & & \\ & & Mg^2 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & Mg^{nc} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Las ecuaciones (5), (6) y (7) se pueden expresar como límites inferiores y superiores de las variables de optimización especificadas en el vector  $x$ .

En el modelo propuesto se incluyen generadores ficticios de racionamiento en las barras de carga. La oferta utilizada por estos generadores corresponde al costo de racionamiento.

Si  $c^j$  es el vector de costos de generación (incluyendo los generadores ficticios) para la  $j$ -ésima contingencia y  $p_j$  es la probabilidad de falla única del  $j$ -ésimo elemento del sistema (línea o transformador), entonces el vector de costos se puede expresar como:

$$c = [p_0c^0 \ p_1c^1 \ p_2c^2 \ \dots \ p_{nc}c^{nc}] \quad (14)$$

Finalmente, el modelo representado por las ecuaciones (1) a (7) se puede representar en forma compacta como:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned} \quad (15)$$

### 3. METODO DE PUNTO INTERIOR

El problema de PL planteado en (15) se puede resolver usando un método de punto interior para variables canalizadas. Una descripción detallada de este método se puede consultar en [8] y [9].

Usando variables de holgura para convertir las desigualdades en igualdades se tiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{sa} \quad & Ax = b \\ & x - v = l \\ & x + s = u \\ & v \geq 0, s \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Usando el criterio de barrera logarítmica para eliminar las restricciones de no negatividad se tiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x - \mu \left( \sum_{j=1}^n \ln v_j + \ln s_j \right) \\ \text{sa} \quad & Ax = b \\ & x - v = l \\ & x + s = u \end{aligned} \quad (17)$$

Finalmente, usando la función Lagrangeana para eliminar las restricciones del problema se obtiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x - \mu \left( \sum_{j=1}^n \ln v_j + \ln s_j \right) - y^T (Ax - b) \\ & - z^T (x - v - l) + w^T (x + s - u) \end{aligned} \quad (18)$$

Donde  $\mu^k > 0$  es un parámetro de barrera que decrece monótonamente en el proceso iterativo. La sucesión de valores de estos parámetros genera una secuencia de sub-problemas de programación lineal basado en el teorema de Fiasco y McCormick [8].

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) son obtenidas igualando el gradiente de la función Lagrangeana a cero, el cual requiere que la primera derivada de  $l$  con respecto a todas las variables sea cero como se muestra en el sistema de ecuaciones (19).

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial y} = 0 &\rightarrow Ax = b; & \frac{\partial l}{\partial z} = 0 &\rightarrow x - v = l \\ \frac{\partial l}{\partial w} = 0 &\rightarrow x + s = \mu; & \frac{\partial l}{\partial x} = 0 &\rightarrow A^T y - w + z = c \\ \frac{\partial l}{\partial s} = 0 &\rightarrow SWe = \mu e; & \frac{\partial l}{\partial v} = 0 &\rightarrow VZe = \mu e \end{aligned} \quad (19)$$

Donde  $e$  es un vector de  $n$  elementos todos con valor de uno, y  $S, W, V, Z$  son matrices diagonales de  $s, w, v, z$  respectivamente.

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden representadas por el sistema de ecuaciones (19) son no lineales y deben ser solucionadas simultáneamente. Generalmente estas ecuaciones son solucionadas mediante el método de Newton, lo cual requiere la linealización de las ecuaciones alrededor de un punto, para un parámetro de barrera dado. Al linealizar el sistema de ecuaciones (19) se tiene:

$$\begin{aligned} A\Delta x &= b - Ax \\ \Delta x - \Delta v &= l - x + v \\ \Delta x + \Delta s &= u - x - s \\ A^T \Delta y - \Delta w + \Delta z &= c - A^T y + w - z \\ S\Delta w + W\Delta s &= \mu e - SWe - \Delta S\Delta w \\ V\Delta z + Z\Delta v &= \mu e - VZe - \Delta V\Delta z \end{aligned} \quad (20)$$

Se puede notar en el conjunto de ecuaciones (20) que los últimos términos correspondientes a las últimas dos ecuaciones son no lineales. Este conjunto de ecuaciones puede ser solucionado mediante un procedimiento

predictor-corrector similar al descrito en [9]. En el paso predictor se resuelve el sistema de ecuaciones propuesto en (20) considerando únicamente los términos lineales. La dirección obtenida en este paso (denominada dirección affine-scaling) es usada para aproximar los términos no lineales  $\Delta$  y para estimar un parámetro de barrera que serán usados en el paso corrector.

**3.1 Criterios de convergencia**

El algoritmo termina cuando las condiciones de factibilidad y optimalidad cumplen con el conjunto de ecuaciones (19).

Factibilidad primal:

$$\frac{\|Ax - b\|}{1 + \|x\|} \leq \varepsilon_f \tag{21}$$

Factibilidad de los límites mínimos y máximos:

$$\frac{\|x - l\|}{1 + \|x\| + \|v\|} \leq \varepsilon_f ; \quad \frac{\|u - x\|}{1 + \|x\| + \|s\|} \leq \varepsilon_f \tag{22}$$

La factibilidad dual:

$$\frac{\|A^T y + w - z\|}{1 + \|y\| + \|w\| + \|z\|} \leq \varepsilon_f \tag{23}$$

Condición de optimalidad:

$$\frac{\|c^T x - (b^T y - u^T w + l^T z)\|}{1 + \|b^T y - u^T w + l^T z\|} \leq \varepsilon_0 \tag{24}$$

Donde  $\varepsilon_f$  y  $\varepsilon_0$  son las tolerancias de las condiciones de factibilidad y optimalidad respectivamente.

**3.2 Selección del punto inicial**

Para seleccionar un punto inicial se define primero:

$$\xi_2 = 1 + \xi_3 \|c\| \tag{25}$$

Las variables primales iniciales son calculadas como:

$$x_j = \xi_1 \tag{26}$$

$$v_j = \max(\xi_1, x_j - l_j) \tag{27}$$

$$s_j = \max(\xi_1, u_j - x_j) \tag{28}$$

Las variables duales,  $y=0$ ,  $z$  y  $w$ , deben satisfacer las condiciones de factibilidad dual:

$$z_j = c_j + \xi_2, \quad w_j = \xi_2, \quad \text{si } c_j \geq 0 \tag{29}$$

$$z_j = \xi_2, \quad w_j = -c_j + \xi_2, \quad \text{si } -\xi_2 \leq c_j < 0 \tag{30}$$

$$z_j = -c_j, \quad w_j = -2c_j, \quad \text{si } c_j < -\xi_2 \tag{31}$$

Para obtener un mejor desempeño del algoritmo, en [9] se recomienda usar valores  $\xi_1 = 100$  y  $\xi_3 = 1$ .

**4. RESULTADOS OBTENIDOS**

Para probar el modelo se utilizó el sistema de 6 barras de Wood and Wollenberg [10] modificado, el cual se ilustra en la figura 1. Los datos de líneas y generadores se muestran en las tablas 1 y 2 respectivamente.

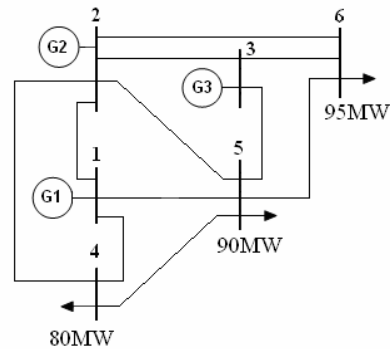


Figura 1. Sistema de potencia de 6 barras

Línea	Reactancia	Límite (MW)	P falla (%)
1-2	0.2	40	0.002
1-4	0.1	70	0.005
1-5	0.1	80	0.087
2-3	0.2	40	0.003
2-4	0.1	80	0.093
2-5	0.3	50	0.001
2-6	0.2	80	0.091
3-5	0.2	70	0.003
3-6	0.2	80	0.001
4-5	0.4	50	0.002
5-6	0.3	40	0.001

Tabla 1. Datos de líneas

Generador	Barra	Pg Min (MW)	Pg Max (MW)	Oferta (\$/MWh)
G1	1	25	120	15
G2	2	20	200	14
G3	3	10	110	18

Tabla 2. Datos de generadores

En este caso la columna 4 de la primera tabla hace referencia a la probabilidad de falla única de la línea, es

decir, la probabilidad de que dicha línea falle y las restantes estén operando. Se puede observar que las probabilidades de falla única de las líneas son pequeñas. A manera de ilustración solamente se utilizará el modelo para fallas en las líneas 1-5, 2-4 y 2-6, que son las que presentan mayor probabilidad de falla.

Como se indicó en la sección 2, el modelo consiste en usar flujos post-contingencia acoplados, es decir, se tienen en cuenta todas las contingencias al mismo tiempo. Para esto, se construye un sistema equivalente formado por islas donde la primera isla es el caso base y el resto de las islas representan el sistema tras cada una de las contingencias. El acople entre las islas del sistema equivalente esta dado por las restricciones de velocidad de toma de carga. El sistema equivalente se muestra en la figura 2.

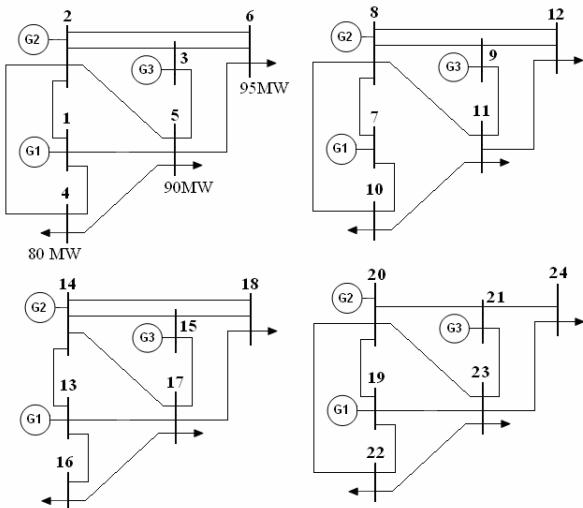


Figura 2. Sistema equivalente considerando contingencias

En la figura 3 se muestra la estructura de la matriz de restricciones de igualdad, se puede observar que esta matriz es altamente dispersa.

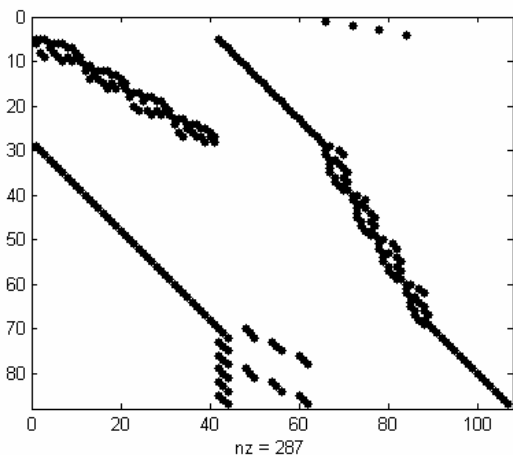


Figura 3. Estructura de la matriz de restricciones

Si no se consideran contingencias y se corre un flujo de potencia óptimo tradicional se obtiene el resultado mostrado en la tabla 3 con un costo total de 3860,2 \$/h.

Generador	Oferta (\$/MWh)	OPF tradicional
G1	15	110,17
G2	14	144,82
G3	18	10,0

Tabla 3. Resultados con un OPF sin considerar contingencias

En la tabla 3 se puede observar que el generador que hace la mayor oferta es despachado en su mínimo técnico. Al ocurrir una falla es probable que se necesite más potencia de este generador. Si la velocidad de toma de carga de este generador es muy pequeña, es probable que no pueda atender los nuevos requerimientos del sistema y se produzcan racionamientos. En la tabla 4 se muestran los racionamientos que se producen si se considera un OPF tradicional y una velocidad de toma de carga de 40MW para todos los generadores.

Barras de Carga	Falla 1-5	Falla 2-4	Falla 2-6
4	0	0,53	0
5	22,22	0	0
6	24,9	0	32

Tabla 4. Racionamientos en MW para un OPF tradicional

En la tabla 5 se muestran los resultados para un OPF con restricciones de seguridad utilizando el modelo propuesto. En este caso se consideró un costo de racionamiento de 200 \$/MWh y diferentes valores (en MW) para la velocidad de toma de carga de los generadores. Para las tres contingencias analizadas el racionamiento en cada una de las barras de carga es igual a cero. Sin embargo, el costo de operación se incrementó debido a que se utilizaron recursos más costosos (generador 3) con el fin de evitar racionamientos.

Generador	OPF con rampa=20	OPF con rampa=30	OPF con rampa=40
G1	34,95	30,0	20,0
G2	141,27	156,42	176,42
G3	88,58	78,58	68,58
Costo	4099,3 \$/h	4054,3 \$/h	4004,3 \$/h

Tabla 5. Resultados con un OPF con restricciones de seguridad para diferentes valores de rampa de los generadores

En la tabla 5 se puede observar que para altas velocidades de toma de carga el generador más costoso se usa en menor medida, haciendo que el costo total del despacho disminuya. Para valores de velocidad de toma de carga muy altos, el despacho calculado por el OPF con restricciones de seguridad tiende a los valores obtenidos para el OPF tradicional.

Los flujos en las líneas tras cada una de las contingencias para el OPF con restricciones de seguridad usando una

rampa de 40 MW se muestran en la tabla 6. Se puede observar que para la contingencia de la línea 2-4, las líneas 1-2 y 1-4 se encuentran en sus límites inferior y superior respectivamente.

Línea	Falla 1-5	Falla 2-4	Falla 2-6
1-2	-11,25	-40,00	-28,76
1-4	36,63	70,00	13,86
1-5	----	30,00	34,89
2-3	27,59	20,33	5,46
2-4	59,14	----	71,38
2-5	40,75	36,67	30,80
2-6	61,25	57,00	----
3-5	33,54	34,67	40,74
3-6	33,66	36,67	73,29
4-5	15,78	-10,00	5,25
5-6	0,085	1,33	21,70

Tabla 5. Flujos en las líneas para las diferentes fallas

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha presentado un modelo de flujo de potencia óptimo con restricciones de seguridad basado en contingencias. Para un sistema de potencia dado, se encuentra un esquema de despacho que minimiza los desastres de carga cuando ocurren contingencias simples en transformadores o líneas de transmisión.

El método de punto interior para resolver el PL resultante muestra ser eficiente para sistemas pequeños y medianos, sin embargo, para analizar sistemas de grande porte, es necesario optimizar el método utilizando rutinas que aprovechen la esparcidad de la matriz de restricciones con el fin de obtener resultados en tiempos de cálculo aceptables.

El modelo se puede modificar fácilmente para incluir otro tipo de contingencias, las cuales pueden incluir fallos en generadores, o contingencias múltiples.

Una versión posterior del modelo buscará incluir una representación AC de la red de transmisión, con lo cual, sería necesario considerar los voltajes de las barras y las potencias reactivas como variables de optimización. En este caso, habría que explorar diferentes métodos para solucionar el problema de programación no lineal resultante.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] O. Alsac and B. Stott. "Optimal Load Flow with Steady-State Security", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 93 pp. 745-751, May/June 1974.
- [2] M. Bazaraa, H. Sherali and C. Shetty. "*Linear programming and network flows*", John Wiley and Sons, 1983.
- [3] G.L. Torrez, V.H. Quintana, "An interior point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 13, pp. 1211-1218, Nov. 1998.
- [4] J.M. López-Lezama, C.E. Murillo-Sánchez, L.J. Zuluaga, and J.F. Gutiérrez-Gómez, "A contingency-based security-constrained optimal power flow model for revealing the marginal cost of a blackout risk-equalizing policy in the colombian electricity market," in *proc 2006 Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America*.
- [5] Thorp, J., Murillo-Sanchez, C.E. and Thomas, R.J. "Time-space Methods for Determining Locational Reserves: A Framework for Locational Based Pricing and Scheduling for Reserve Markets" *Report to the Department of Energy, November 2001*.
- [6] Chen, J., Thorp, J., Thomas. R.J. and Mount, T.D., "Locational Pricing and Scheduling for an Integrated Energy-Reserve Market", *Proc of the 36th Hawaii International Conference on Systems Sciences, 2003*.
- [7] R.D Zimmerman, C.E. Murillo-Sanchez, and D. Gan. "*MATPOWER user's manual*", <http://www.pserc.cornel.edu/matpower/>, 2006.
- [8] N.K. Karmarkar, "A new polynomial-time algorithm for linear programming". *Combinatorica*, vol. 4, pp. 373-395, 1984.
- [9] L.S. Vargas, V.H. Quintana and A. Vannelli, "A tutorial description of an interior point method and its applications to security-constrained economic dispatch", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 8, No 3, pp. 1315-1323, Aug 1993.
- [10] A. Wood and B. Wollenberg. *Power generation operation and control*. John Wiley & sons. 1984.