UTILIZACIÓN DEL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL EN EL CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN

Use of the central limit theorem in the calculation of the measurement uncertainty

RESUMEN
Una consecuencia práctica del teorema del límite central en el cálculo de la incertidumbre de medición es que cuando la incertidumbre combinada de un resultado de medición no está dominada por una de las componentes de incertidumbre estándar no normal de las magnitudes de entrada, una buena aproximación para calcular la incertidumbre expandida $U_p = k_p U_C(y)$ que define un intervalo de confianza con un nivel de confianza p, es asignar a k_p el valor que le corresponde asumiendo una distribución normal. Para el caso contrario, es decir cuando la incertidumbre combinada si está dominada por una de las componentes de incertidumbre estándar no normales de las magnitudes de entrada no existen criterios claros. Se presentan en este trabajo por medio de aplicaciones los dos casos junto con una explicación detallada de lo que ocurre y de los criterios utilizados para obtener la incertidumbre expandida en cada caso. El análisis de estos aspectos forma parte del trabajo que el grupo de electrofisiología del Departamento de física de la Universidad Tecnológica de Pereira viene realizando en su línea de investigación en metrología, en la cual ha desarrollado varios proyectos de investigación.

PALABRAS CLAVES: Incertidumbre, medición, metrología, límite central.

ABSTRACT
A practical consequence of the Theorem of the central limit in the calculation of the measurement uncertainty is that when the combined uncertainty of a measurement result is not dominated by one of the components of standard not normal uncertainty of the inlet magnitudes, a good approximation for the calculation of expanded uncertainty $U_p = k_p U_C(y)$ that defines a confidence interval with a confidence level p, is to assign to k_p the value which corresponds to it, assuming a normal distribution. In the opposite case, that is when the combined uncertainty is dominated by one of the components of non-normal standard uncertainty of the inlet magnitudes, there are not clear criteria. Both cases, together with a detailed explanation of what happens and of the criteria used to get the expanded uncertainty in each case, are presented in this work. The analysis of these aspects makes part of the work that the group of electro-physiology of the Physics Department of the Universidad Tecnológica de Pereira is carrying out within the research line in metrology, which has developed several research projects.

KEYWORDS: *Uncertainty, measurement, metrología, central limit.*

LUIS ENRIQUE LLAMOSA R
Profesor Titular
Facultad de ciencias básicas
Director
Grupo de Electrofisiología
U. Tecnológica de Pereira
lellamo@utp.edu.co

JOSÉ DEL C. GÓMEZ E.
Profesor titular
Facultad de ciencias básicas
U. Tecnológica de Pereira
jogomeze@utp.edu.co

1. Introducción

De acuerdo al vocabulario internacional de metrología (VIM) [1] incertidumbre de medición es el "Parámetro asociado al resultado de una medición que caracteriza la dispersión de los valores que podrían razonablemente ser atribuidos al mensurando"; y se puede afirmar que se estima a partir de parámetros de dispersión.

Existen diferentes causas por la cuales una medida no puede ser perfecta (ver fig. 1). Por medio de un diagrama de flujo se presenta nuestra versión de la metodología general para estimar la incertidumbre de medición.

Esta metodología está basada en la GUM (Guide to the expresión of Uncertainty in Measurement) [2] guía de carácter internacional que tiene el propósito de unificar criterios para la estimación de la incertidumbre de medición (figuras 2, 3, 4).

Se pretende con esta introducción ubicar al lector dentro del contexto que se requiere para un mejor entendimiento del tema que nos ocupa: La utilización del teorema del límite central en el cálculo de la incertidumbre de medición.

Fecha de Recepción: 15 de Septiembre de 2009.
Fecha de Aceptación: 12 de Octubre de 2009

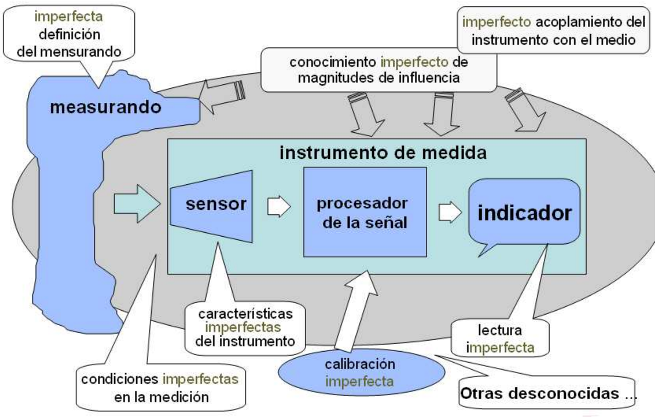


Fig. 1. Causas de la incertidumbre en la medida.

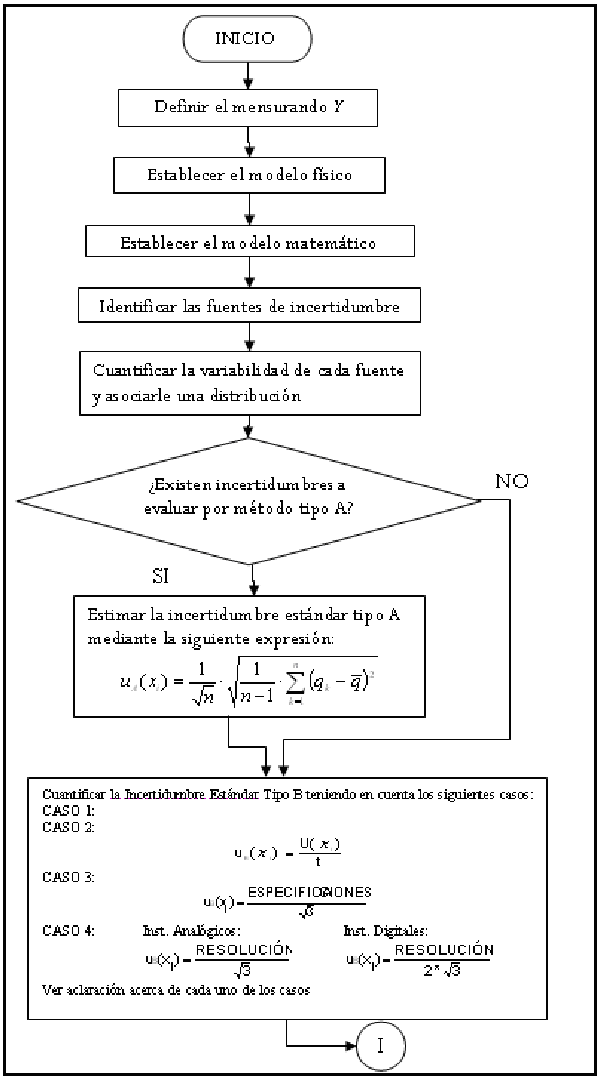


Fig. 2. Sección del diagrama de flujo que especifica la metodología a seguir.

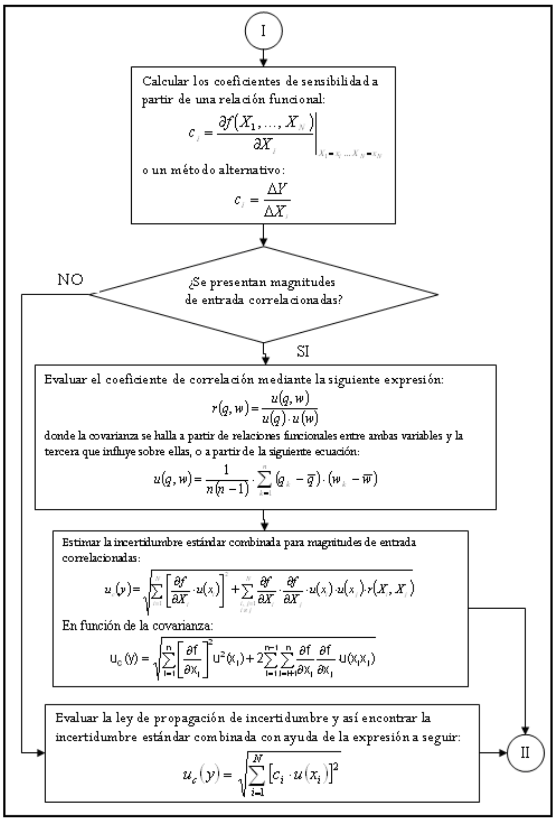


Fig. 3. Segunda sección del método.

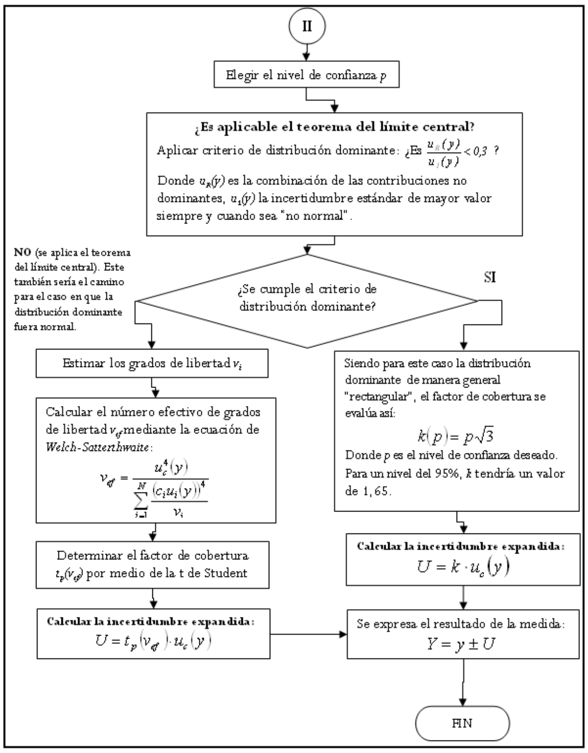


Fig. 4. Tercera sección del método (incertidumbre expandida).

2. El teorema del Límite Central

En la práctica, la mayoría de los experimentos de medición tienen características que los aproximan fácilmente a una condición de normalidad. De acuerdo al *Teorema del Límite Central*, para que la distribución de probabilidad de un resultado de medición tienda al modelo normal se requiere:

a) Que la relación funcional *f* que define al mensurando *Y* sea una función lineal de otras magnitudes;

b) Que la distribución de probabilidad de las magnitudes que definen al mensurando *Y* sea del tipo normal.

c) También se puede aceptar que la distribución de probabilidad de algunas magnitudes de definición sea rectangular sólo si éstas últimas son en número menor que las del tipo normal, y si la desviación estándar experimental del proceso de medición se estima a partir de un conjunto grande de observaciones. Sin embargo, aún cuando la distribución de probabilidad de las magnitudes de definición no sea normal, el Teorema del Límite Central permite aproximar la distribución de probabilidad del mensurando *Y* por una distribución normal.

Si una variable *Y* se puede expresar como $Y=\sum \varsigma_i X_i$, y toda función X_i se puede caracterizar mediante una distribución de probabilidad normal, entonces *Y* estará también caracterizada por una distribución normal. Ahora, cuando algunas de las X_i no se pueden caracterizar mediante una distribución normal, la función *Y* podrá ser también caracterizada por una distribución aproximadamente normal en virtud del Teorema del Límite Central: *"La distribución de Y es aproximadamente normal con un valor esperado* $\varepsilon(Y)=\varsigma\cdot\varepsilon(X_i)$ *y varianza* $(Y)=\sum \varsigma_i^2\sigma^2(X_i)$ *donde* $\varepsilon(X_i)$ *y* $\sigma^2(X_i)$ *son el valor esperado de* X_i *y su varianza respectivamente, siempre y cuando los* X_i *sean independientes y* $\sigma^2(Y)$ *sea mucho mayor que cualquier componente* $\varsigma_i^2\sigma^2(X_i)$ *de una función* X_i *no caracterizada por una distribución normal."* [3]

La importancia de este teorema radica en que es el soporte de la combinación de diferentes magnitudes de entrada caracterizadas con distintas distribuciones de probabilidad (ver figura 5 y figura 6) para conformar la función de la magnitud (*Y*) de interés, caracterizada por una distribución aproximadamente normal, y poder obtener así, su incertidumbre estándar compuesta junto con su número efectivo de grados de libertad (v_{ef}).

De este teorema se puede deducir que la distribución de probabilidad de la variable *Y* estará más próxima a una distribución normal cuanto mayor sea el número de componentes X_i y cuanto más cercanos sean entre sí los valores de los $\varsigma_i^2\sigma^2(X_i)$. Por otro lado, se necesitarán menos funciones X_i cuanto más próximas de la normal sean sus respectivas distribuciones.

2.1 Criterio para la aplicación del Teorema del Límite Central[1].

Si la medición se encuentra en una situación tal que una de las contribuciones de incertidumbre presupuestadas puede identificarse como un término dominante, por ejemplo el término con subíndice 1 de la ecuación 1, la incertidumbre estándar combinada asociada al resultado de la medición *y* puede escribirse como:

$$u_c(y)=\sqrt{u_1^2(y)+u_R^2(y)} \qquad (1)$$

Se tiene:

$$u_R(y)=\sqrt{\sum_{i=2}^{N} u_i^2(y)} \qquad (2)$$

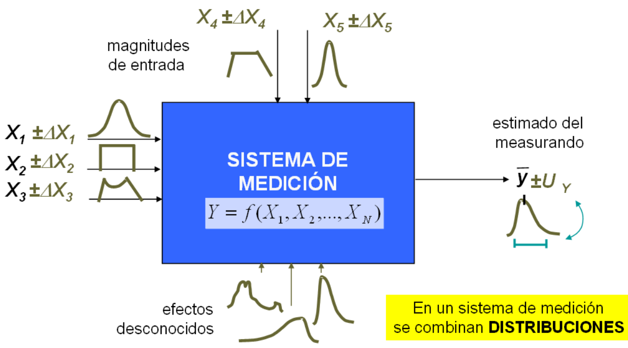


Fig. 5. Mediciones en el mundo real.

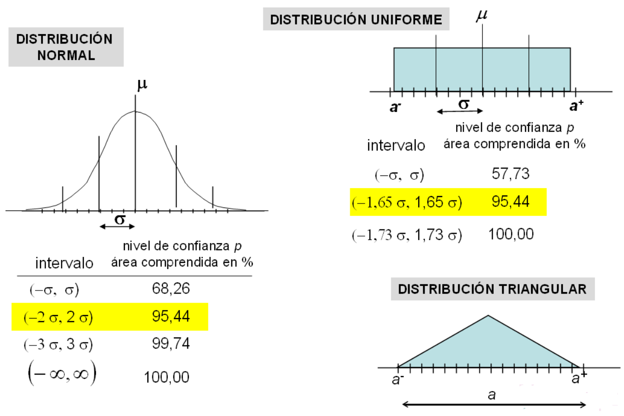


Fig. 6. Distribuciones frecuentes.

Que denota la contribución total de incertidumbre de los términos no dominantes. Cuando la relación entre la contribución total de incertidumbre $u_R(y)$ de los términos no dominantes y la contribución de incertidumbre $u_1(y)$

---

[1] Este criterio es extraído del documento de aplicación para laboratorios "EA 4/02 (rev00): *Expressions of the Uncertainty of Measurements in Calibration*" [4], publicado por la Cooperación Europea para la Acreditación (*European co-operation for Accreditation*, EA).

del término dominante es menor que 0,3, la ecuación 1 puede aproximarse como:

$$u_c(y) \cong u_1(y) \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u_R(y)}{u_1(y)}\right)^2\right] \quad (3)$$

El error relativo de aproximación es menor que $1x10^{-3}$. El máximo cambio relativo en la incertidumbre estándar combinada resultante desde el factor dentro de los paréntesis en la ecuación 3 no es mayor al 5%. Este valor está dentro de la tolerancia aceptada para el redondeo matemático de valores de incertidumbre.

Bajo estas suposiciones la distribución de valores que podrían ser atribuidos razonablemente al mensurando es esencialmente idéntica a la distribución resultante a partir de la contribución dominante conocida. De esta densidad de distribución $\varphi(y)$, el nivel de confianza p puede estar determinado por cualquier valor de la incertidumbre expandida U por la relación integral:

$$p(U) = \int_{y-U}^{y+U} \varphi(y')dy' \quad (4)$$

Invirtiendo esta relación para un nivel de confianza dado, resulta en la relación entre la incertidumbre de medición expandida y el nivel de confianza $U = U(p)$ para la densidad de distribución dada $\varphi(y)$. Usando esta relación, el factor de cobertura puede expresarse finalmente como:

$$k(p) = \frac{U(p)}{u_c(y)} \quad (5)$$

Evaluación de la incertidumbre expandida en el caso en que el resultado de la medición tiende a ser una distribución rectangular [4]: Por ejemplo, en el caso de un voltímetro en el que la contribución de incertidumbre dominante que resulta desde la resolución finita de la indicación sea $u_{\delta Vx}(E_X) = 0{,}029$ V mientras que la contribución total de incertidumbre de los términos no dominantes sea $u_R(E_X) = 0{,}0064$ V; se tiene de forma pertinente la relación $u_R(E_X)/u_{\delta Vx}(E_X) = 0{,}22$. De esta manera la distribución resultante de valores que pueden atribuirse razonablemente como errores de indicación, es esencialmente rectangular. El nivel de confianza para una distribución rectangular está relacionado linealmente con la incertidumbre expandida de la medición (siendo $a/2$ el semi-ancho de la distribución rectangular), así:

$$p = \frac{U}{a/2} \quad (6)$$

Resolviendo esta relación para la incertidumbre expandida de medición U e insertando el resultado junto con la expresión de la incertidumbre estándar de medición relacionada con la distribución rectangular dada por la Ecuación 2.11, finalmente se tiene la relación:

$$k(p) = p\sqrt{3} \quad (7)$$

Por ejemplo, para un nivel de confianza p = 95%, de este modo el factor de cobertura pertinente sería k = 1,65.

Evaluación de la incertidumbre expandida en el caso en que el resultado de la medición tiende a ser una distribución normal [4]: En este caso de manera rigurosa la incertidumbre expandida se calcula de acuerdo a la ecuación 8 como:

$$U = u_c \cdot t_p(v_{ef}) \quad (8)$$

Donde $t_p(v_{ef})$ es el factor derivado de la distribución t de Student a un nivel de confianza p y v_{ef} grados de libertad y que puede obtenerse de la tabla de distribución t de student.

Para obtener una mejor aproximación en la definición de los intervalos de confianza en lugar de emplearse la distribución normal se requiere emplear la distribución de Student y el factor de cobertura k_p entonces se determina a partir del coeficiente t de Student evaluado en el número de grados de libertad efectivos del estimado de salida, o sea, $k_p = t(V_{ef})$.

Lo anterior es una consecuencia de que para la incertidumbre estándar combinada u_c(y) la medida de la incertidumbre es el número de grados de libertad efectivos (V_{ef}) del estimado de salida y que en buena aproximación se obtiene combinando los grados de libertad de los estimados x_i de las X_i magnitudes de entrada. Esa combinación se obtiene a través de la llamada fórmula de Welch-Satterthwaite que tiene la forma siguiente [5]:

$$v_{ef} = \frac{U_C^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}} \quad (9)$$

Cuando los valores de una magnitud de entrada siguen una distribución normal, la medida de la incertidumbre de la incertidumbre estándar estimada empleando métodos estadísticos (evaluación Tipo A) es el número de grados de libertad del estimado $v = n - m$, donde n es el número de observaciones y m la cantidad de magnitudes que se determinan. Cuando se determina una sola magnitud de salida $v = n - 1$.

Los grados de libertad asociados a una incertidumbre Tipo B son mucho más difíciles de estimar. En la GUM se propone un método de estimación para los casos generales de evaluación Tipo B que se basa en el empleo de la expresión siguiente:

$$v_i \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \quad (10)$$

La magnitud entre corchetes es una medida de la incertidumbre de $u(x_i)$ cuyo valor se puede obtener a partir de la experiencia o el conocimiento que se tenga del procedimiento de medición. No obstante, cuando se establecen fronteras que es un caso típico en la actividad de calibración, los límites se eligen de modo tal que la probabilidad de que los valores de la magnitud puedan ser encontrados fuera de ellos es extremadamente pequeña, y en ese caso los grados de libertad pueden considerarse infinitos.

3. Aplicaciones

3.1 Aplicación 1: En la calibración del punto de 50,000 V de un multímetro digital se obtuvieron los siguientes datos:

Tabla No 1 Valores obtenidos en la calibración de un multímetro

Dato #	1	2	3	4	5	6
Valor (V)	50,000	49,999	49,998	50,000	49,998	49,999

Las especificaciones de los instrumentos son las siguientes:
Exactitud instrumento bajo prueba:
± (0,03% lectura + 3 dígitos)
Resolución instrumento bajo prueba: 0,001 V
Especificaciones del patrón: ± (18 ppm salida + 150 µV)
Cálculo de la incertidumbre expandida:
Valor medio de los datos es: 49,999 V
Desviación estándar: 8,944E-04 V

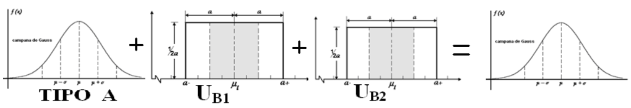
Resultados (tabla 2):

Tabla No 2 Resultados obtenidos

TIPO DE INCERTIDUMBRE	**VALOR**
Repetibilidad (TIPO A)	3,651E-04
Resolución (UB2)	2,887E-04
Especificaciones patrón (UB1)	6,062E-04
Incertidumbre combinada	7,643E-04
Incertidumbre expandida	1,536E-03
Grados efectivos	95,98
$U_{C\text{-}D}/U_D$	0,768

Incertidumbre combinada:

$$Uc = \sqrt{(3{,}651E-4)^2 + (2{,}887E-4)^2 + (6{,}062E-4)^2} = 7{,}643E-4\ V$$



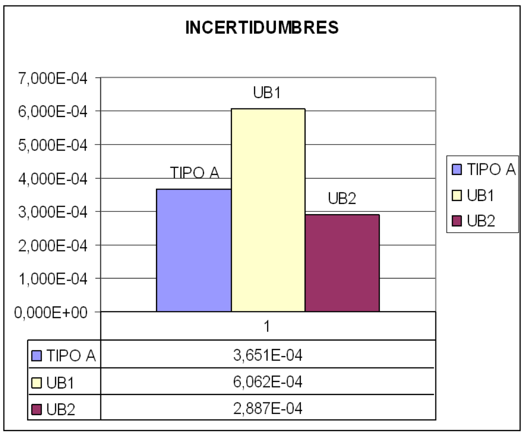


Fig. 7. Aportes de incertidumbre.

$$\frac{U_{c-D}}{U_D} = \frac{\sqrt{(3{,}651E-4)^2 + (2{,}887E-4)^2}}{6{,}062E-4} = \frac{4{,}655E-4}{6{,}062E-4} > 0{,}3$$

$$\frac{U_{c-D}}{U_D} = 0{,}768$$

De acuerdo a lo anterior la incertidumbre expandida se calcularía de la manera siguiente:
Hallar los grados efectivos de libertad:
Grados efectivos = 95,98
Hallar el k para un factor de cobertura del 95%:
Nota: De acuerdo al tipo de distribución de Uc el factor k se extrae de la Tabla *t*-student
k = 2,01
Calcular la Incertidumbre expandida
Ue = 2,01 x 7,643 mV
Ue = 1,536 mV

3.2 Aplicación 2: En la calibración del punto de 50,00 V de un multímetro digital se obtuvieron los siguientes datos (ver tabla 3):

Tabla No 3 Valores obtenidos en la calibración del punto 50,00 V de un multímetro digital.

Dato #	1	2	3	4	5	6
Medida (V)	49,99	49,99	49,99	49,99	49,99	49,99

Las especificaciones de los instrumentos son las siguientes:
Exactitud instrumento bajo prueba:
± (0,03% lectura + 3 dígitos)
Resolución instrumento bajo prueba: 0,01 V
Especificaciones del patrón:
± (18 ppm salida + 150 µV)

Cálculo de la incertidumbre expandida:
Valor medio de los datos es: 49,99 V
Desviación estándar: 0,000E+00 V

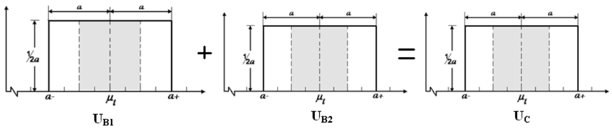
Resultados (tabla 4):

Tabla No 4 Resultados obtenidos

TIPO DE INCERTIDUMBRE	**VALOR**
Repetibilidad (TIPO A)	0,000E+00
Resolución (UB2)	2,887E-03
Especificaciones patrón (UB1)	6,062E-04
incertidumbre combinada	2,950E-03
incertidumbre expandida	4,867E-03
$U_{C\text{-}D}/U_D$	0,210

Incertidumbre combinada:

$$Uc = \sqrt{(2{,}887E-3)^2 + (6{,}062E-4)^2} = 2{,}950E-3\ V$$



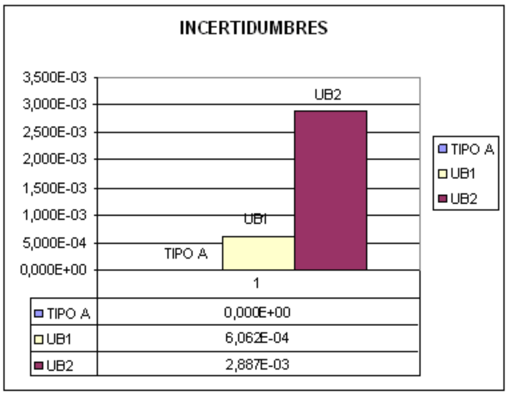


Fig. 8. Aportes de incertidumbre.

$$\frac{U_{c-D}}{U_D} = \frac{\sqrt{(6{,}062E-4)^2}}{2{,}887E-3} = \frac{6{,}062E-4}{2{,}887E-3} \langle 0{,}3$$

$$\frac{U_{c-D}}{U_D} = 0{,}210$$

Como se observa la relación dio menor que 0,3 lo que ratifica como es lógico que el tipo de distribución de la incertidumbre combinada es rectangular. Teniendo en cuenta esto se calcula entonces la incertidumbre expandida de la siguiente manera:

Ue = 1,65 x 2,950 mV
Ue = 4,867 mV

Análisis (tabla 5):

Tabla No 5. Análisis de resultados

	Asumiendo Como distribución normal	**Con Teorema Limite Central**
Grados efectivos de libertad	∞	--
Uc	2,950 mV	2,950 mV
K	1,96	1,65
Ue	5,781 mV	4,867 mV

4. Conclusiones

Se presentó en este trabajo mediante un análisis profundo que incluye algunas aplicaciones prácticas, toda una metodología que permite al experimentalista tener las herramientas necesarias para una mejor utilización del teorema del límite central en el cálculo de la incertidumbre de medición, el cual en la mayoría de los casos es utilizado de una manera arbitraria que supone equivocadamente que se puede generalizar a todas las situaciones de medida

Referencias

[1] International Vocabulary of Fundamental and General Terms in Metrology, BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAP, IUPAC, OIML (1993).

[2] JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY (Francia). Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) [Archivo PDF en línea]. Sèvres: JCGM, 2008. 132 p. Disponible en Internet: (URL: http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf).

[3] CHAPARRO O., Gustavo. Error e Incertidumbre en las Mediciones. Bogotá D.C.: Superintendencia de Industria y Comercio – División de Metrología, 2000. 48 p.

[4] EUROPEAN CO-OPERATION FOR ACCREDITATION (Francia). EA 4/02: Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration [Archivo PDF en línea]. París: EA, 1999. 79 p. Disponible en Internet: (URL: **http://www.european-accreditation.org/n1/doc/EA-4-02.pdf**).

[5] LLAMOSA RINCÓN, Et al. Aspectos Metrológicos Fundamentales para la Acreditación de un Laboratorio de Patronamiento Eléctrico. Pereira: Postergraph S.A., 2005. 220p.