UNA CARACTERIZACIÓN DE ACCIONES LIBRES Y PROPIAMENTE DISCONTINUAS

A characterization of free and properly discontinuous actions

RESUMEN
En este artículo se presenta dos resultados en forma de proposiciones acerca de acciones libres y propiamente discontinuas, las cuales se dan en grupos discretos, que en caso de actuar sobre un espacio Hausdorff localmente compacto ayuda a identificar casos de este tipo de acciones. Se ilustra este hecho con algunos ejemplos y algunos contraejemplos para mostrar la necesidad de ciertas hipótesis dadas en las proposiciones.

PALABRAS CLAVES: acción libre, acción propiamente discontinua, grupo discreto.

ABSTRACT
In this article appears two results in the form of propositions about free and properly discontinuous actions, which occur in discrete groups, that in case of acting on a Hausdorff space locally compact aid to identify cases of this type of action. This fact with some examples and some counterexamples acquires knowledge to show the necessity of certain hypotheses given in the propositions.

CARLOS A. ESCUDERO S.
Ph.D. Matemáticas
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
carlos10@utp.edu.co

OSCAR FERNÁNDEZ S.
M.Sc. Matemáticas
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
oscarf@utp.edu.co

LUIS EDUARDO OSORIO A.
M.Sc. Enseñanza de las Matemáticas
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
leosorio@utp.edu.co

KEYWORDS: free action, properly discontinuous action, discrete group.

1. PREELIMINARES

Definición 1.1. Sea G un grupo dotado con una topología de tal manera que las aplicaciones producto e inversión de la operación de grupo, $\mu: G\times G \to G$ y $\iota: G \to G$ dadas por:

$$\mu(gh) = gh; \ \ \iota(g)=g^{-1}$$

son continuas, entonces se dirá que G es un grupo topológico. Además se dirá que G es un grupo discreto si es un grupo topológico que tiene la topología discreta.

Observación 1.2. Todo grupo puede ser convertido en un grupo topológico si es dotado con la topología discreta.

Ejemplo 1.3. Cada uno de los siguientes grupos es un grupo topológico.
1. La recta real IR con la estructura de grupo aditivo y la topología euclídea.
2. El conjunto IR*= IR-{0} de números reales diferentes al cero con la multiplicación, y la topología relativa de IR.
3. El conjunto $\mathbb{C}$*= $\mathbb{C}$ -{0} de números complejos diferentes al cero bajo la multiplicación compleja, con la topología relativa de $\mathbb{C}$.
4. El grupo lineal general GL(n, IR), que es el conjunto de matrices reales invertibles de $n\times n$ con la multiplicación de matrices, con la topología relativa heredada de IR $^{n^2}$.
5. Cualquier grupo dotado con la topología discreta.

Definición 1.4. Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico. Una acción continua de G en X es una aplicación continua $\theta: G\times X \to X$, tal que satisface las siguientes dos condiciones:

1. $\theta(e,x)=x$ para todo $x\in X$, donde e es la identidad de G y
2. $\theta(g_1,\theta(g_2,x))=\theta(g_1g_2,x)$ para todo $x\in X$ y $g_1,g_2\in G$.

Fecha de Recepción: 15 de Septiembre de 2009.
Fecha de Aceptación: 18 de Noviembre de 2009.

Para simplificar la notación, se denota $\theta(g,x)$ por $g\cdot x$.

Observación 1.5. De la definición se tiene que, en particular para cada $g\in G$ la aplicación $\theta_g : X\to X$ definida por $\theta_g(x)=g\cdot x$ es una aplicación continua de X en sí mismo. Esto último, puesto que θ_g es la restricción de la acción al subespacio $\{g\}\times X\to X$. Además cada aplicación es un homeomorfismo, puesto que la definición de la acción de un grupo garantiza que la aplicación dada por $\theta_{g^{-1}}$, la cual es la inversa de θ_g, también es continua.

Cuando G es un grupo discreto, la acción $\theta: G\times X\to X$ es continua cuando se usa la topología producto en $G\times X$. En otras palabras, cuando G está dotado de la topología discreta, la acción es continua si y solo si para cada $g\in G$, la aplicación $\theta_g(x)=g\cdot x$, es continua.

Definición 1.6. Sea G un grupo, dada una acción en X, se define la órbita de $x\in X$ como el conjunto $G\cdot x=\{g\cdot x, \forall g\in G\}$.

Con el concepto de órbita de un elemento, se puede hablar del espacio cociente X/G, cuyos elementos son las órbitas de la acción.

Definición 1.7. Una acción de un grupo G sobre X se dice que es libre si $g\cdot x=x$ si y solo si $g=e$.

2. Acción propiamente discontinua

Definición 2.1. Sea G un grupo que actúa continuamente en un espacio topológico X y sean $A,B\subseteq X$, se define $G_{A,B}$ como $G_{A,B}=\{g\in G : gA\cap B\neq\varnothing\}$ cuando $A=B$, solo se denotará por G_A.

Definición 2.2. Sea X un espacio topológico y G un grupo discreto. Una acción de G en X se dice es *propiamente discontinua*[1] si y solamente si para cada par de puntos $x,y\in X$, existen vecindades U de x y V de y, tal que $G_{U,V}$ es un conjunto finito.

Observación 2.3. Cuando el grupo G es discreto, obtiene propiedades topológicas especiales, por ejemplo, es Hausdorff, compacto (y localmente compacto).

Proposición 2.4. Sea G un grupo discreto y X un G-espacio Hausdorff. X es un G-espacio propiamente discontinuo si y solamente si para cada par de puntos $x,y\in X$, existen vecindades U de x y V de y, tal que $G_{U,V}$ es finito.

Proposición 2.5. Sea G un grupo discreto y X un G-espacio Hausdorff. X es un G-espacio propiamente discontinuo si y solamente si para cada subconjunto compacto $K\subseteq X$ el conjunto G_K es compacto.

Aún más, considérese la siguiente proposición, (la cual corresponde a la definición de acción propiamente discontinua dada por Boothby [11] def. 8.1, es de considerar que en dicho texto esta definición se da para grupos de Lie y variedades diferenciables).

Proposición 2.6. Supóngase que G es un grupo discreto y X un G-espacio Hausdorff. La acción es propiamente discontinua si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cada $x\in X$, existe una vecindad U tal que G_U es un conjunto finito.
2. Si $x,y\in X$ no están en la misma G-órbita, entonces existen vecindades U de x y V de y tal que $gU\cap V=\varnothing$ para todo $g\in G$.

Demostración. Al tomar $x=y$ en la definición 2.1, para x se tienen vecindades U y V tales que $gU\cap V=\varnothing$ para todo $g\in G$ excepto para un número finito de ellos. Sea $W=U\cap V$, como $gW\cap U=\varnothing$ y $W\subseteq V$ se sigue $gW\cap W\subseteq gU\cap V$, y por lo tanto se satisface la primera condición.

Ahora supóngase que $x,y\in X$ están en órbitas distintas. Por la definición 2.1 existen vecindades U de x y V de y con $gU\cap V=\varnothing$ excepto para un número finito de g, sean estos $g_1,g_2,\ldots,g_k$, sin pérdida de generalidad se puede asumir que todos son distintos. Como x e y no están en la misma G-órbita, se tiene que $g_i\cdot x\neq y$ para $i=1,2,\ldots,k$. Ahora por ser X un espacio Hausdorff existen conjuntos abiertos disjuntos $W_1,\ldots,W_k,W_y$, con $g_i\cdot x\in W_i$ e $y\in W_y$. Por la continuidad de la acción se puede elegir W de manera que $g_iW\subseteq W_i$ para todo $i=1,2,\ldots,k$, y si se elige $W'=W_y\cap V$ se tiene que

[1] El término *propiamente discontinua* se contradice a sí mismo, puesto que las acciones de grupo propiamente discontinuas son, después de todo, continuas. La razón de su nombre es de carácter histórico.

$gW \cap W' = \varnothing$ para $g = g_1, g_2, \ldots, g_k$ y por tanto para todo $g \in G$.

Recíprocamente, supóngase que se satisfacen 1. y 2., se debe probar que la acción es propiamente discontinua, en efecto, para cada $x \in X$ existe U tal que G_U es un conjunto finito por 1., sea entonces $y = g_i \cdot x$ para algunos $g_1, g_2, \ldots, g_k$ y sea $y \in U' \subseteq g_i U$ por tanto $G_{U,U'}$ es finito. Luego si x, y no están en la misma G-órbita, por 2., se puede elegir U y U' tal que $G_{U,U'} = \varnothing$ y este conjunto es ciertamente un conjunto finito.

Una consecuencia importante de estas equivalencias es la siguiente caracterización de las acciones libres y propiamente discontinuas que algunos autores como por ejemplo Do Carmo [12] pag. 22 la dan como definición de acción propiamente discontinua.

Proposición 2.7. Sea un grupo discreto G el cual actúa en un espacio Hausdorff X, supóngase que la acción es libre y propiamente discontinua, entonces para cada punto $x \in X$ existe una vecindad U tal que $gU \cap U = \varnothing$ para todo $g \in G$ excepto para $g = e$.

Demostración. Al tomar $x = y$ en la proposición 10, existen vecindades U y V de x tales que $gU \cap V = \varnothing$ excepto para un número finito de elementos, sean ellos $g_0 = e, g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$. Ya que la acción es libre y X es Hausdorff, para cada g_i existen vecindades disjuntas W_i de x y W_i' de $g \cdot x$. Sea

$$U' = U \cap V \cap W_1 \cap (g_1^{-1} W_1') \cap \ldots \cap W_k \cap (g_k^{-1} W_k')$$

Se mostrará que U' tiene las propiedades requeridas, en efecto:

Primero considérese $g = g_i$ para algún $i \geq 1$. Si $x \in U' \subseteq g^{-1} W_1'$, entonces $g_i \cdot x \in W_i'$, el cual es distinto de W_i y por lo tanto de U'. Así $gU' \cap U' = \varnothing$.

Por otro lado, si $g \in G$ no es la identidad y no es alguno de los g_i, entonces para cualquier $x \in U' \subseteq U$, se tiene que $g \cdot x \in gU'$, el cual es disjunto con V y por lo tanto también con U.

3. Ejemplos de acciones propiamente discontinuas

En seguida se presentan algunos ejemplos para observar el comportamiento de las acciones libres y propiamente discontinuas.

Ejemplo 3.1. Sea $X = S^1$ y sea la acción de $G = \mathbb{Z}$ como potencias de una rotación irracional, es decir, la acción rota por $a/2\pi$ con a irracional. Esto es, se tiene la acción $(n, e^{2\pi i t})$ a $e^{2\pi i (t + na/2\pi)}$. Esta acción es libre, pero no propiamente discontinua, en efecto considérese el compacto $K = \{e^{2\pi i t} \in S^1 : 0 \leq t \leq 1/4\}$, ahora hay infinitos $n \in \mathbb{Z}$ tales que $nK \cap K \neq \varnothing$.

Nota: La acción propiamente discontinua obliga a la órbita $G \cdot x$ a ser un subconjunto discreto de X (para cualquier x). Sin embargo, hay acciones libres con órbitas discretas que no son propiamente discontinuas. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. Sea $G = \mathbb{Z}$ el cual actúa continuamente sobre el espacio topológico $X = \mathbb{R}^2$-{(0, 0)} por las potencias de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$.

Es decir $(n, (x, y))$ a $(2^n x, 2^{-n} y)$. Entonces las $\mathbb{Z}$-órbitas están en las hipérbolas $xy = cte$, o en los ejes coordenados. Para ver que la acción no es propiamente discontinua considérese el punto (1,0) y el compacto $X = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, entonces $nK \cap K \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, como muestra la figura 1.

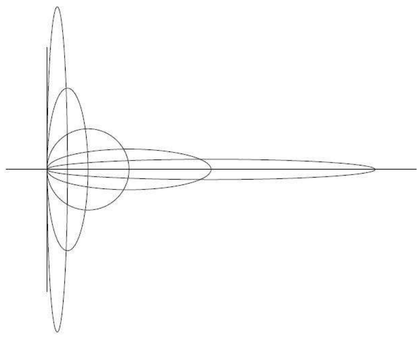

Figura 1: Acción no propiamente discontinua.

El interés en las acciones libres y propiamente discontinuas está en que para tales acciones en el caso Hausdorff localmente compacto se puede encontrar un abierto U alrededor de cada $x \in X$ tal que U es disjunto con gU siempre que $g \neq e$, y recíprocamente, cuando esto se tiene, la acción es desde luego libre y propiamente discontinua. Así, para tales acciones podemos decir que en X / G se puede identificar puntos en la misma G-órbita, con este proceso de identificación no se cruza el espacio X por identificación de los puntos de X que están arbitrariamente cercanos unos de otros.

Un ejemplo donde se nota que no se tiene una buena identificación es el siguiente:

Ejemplo 3.3. Considérese la acción de $G = \mathbb{Q}$ sobre IR por traslaciones aditivas ($\mathbb{Q}$ dotado con la topología discreta, para que encaje en la descripción de un grupo discreto). Esta es una acción continua, pero el cociente IR/$\mathbb{Q}$ no se comporta muy bien, ya que se tiene que cualesquier dos $\mathbb{Q}$-órbitas en IR contienen puntos arbitrariamente cercanos.

Sin embargo, existen otros ejemplos que presentan dificultades en cosas más sutiles:

Ejemplo 3.4. Considérense las raíces n-ésimas de la unidad $\omega_0 = e^{0i}, \omega_1 = e^{i/n}, \ldots, \omega_{n-1} = e^{(n-1)i/n}$. Sea $G = \mathbb{Z}_n$ el grupo de los enteros módulo n bajo la adicción y X = X. La aplicación $\theta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\theta(k,z) = \omega_k z$ con $0 \leq k < n$, define una acción de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{C}$, la cual rota en sentido horario a z sobre una circunferencia de radio $|z|$ al número z un ángulo $2k\pi / n$. (Figura 2)

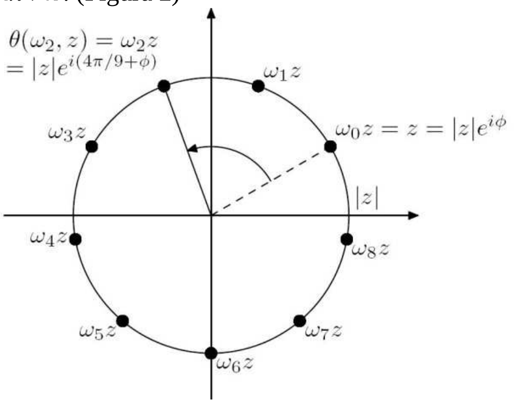

Figura 2: Acción con aplicada a $z \in \mathbb{C}$ con $n = 9$.

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ distinto de cero, su órbita consiste en n puntos igualmente separados en la circunferencia de radio $|z|$ centrado en el origen. Es geométricamente obvio (y por lo tanto es fácil dar una prueba rigurosa) que para una bola abierta euclidiana centrada en z con radio ε lo suficientemente pequeño (del orden de $|z|\pi / n$) $B_\varepsilon(z)$, es disjunta de sus traslaciones por los elementos del grupo no triviales; es decir, al hacer girar $B_\varepsilon(z)$ sobre el origen por ángulos $2k\pi / n$ con $k \in \mathbb{Z}$ se consiguen conjuntos disjuntos de $B_\varepsilon(z)$, excepto cuando n divide a k. Por lo tanto, en $\mathbb{C}$-{0} la acción es libre y propiamente discontinua. Sin embargo, para el origen es muy diferente (cuando n>1): el origen es fijado por el grupo entero, y así cada vecindad del origen encuentran su traslación por cualquier elemento del grupo. Así, la acción en todo $\mathbb{C}$ no es libre debido a las dificultades en el origen, sin embargo es propiamente discontinua.

A continuación se dan ejemplos de acciones libres y propiamente discontinuas:

Ejemplo 3.5.

1. Considérese la acción de $\mathbb{Z}$ sobre IR por traslaciones aditivas (n, x) a $x + n$. Esta acción es continua para la topología discreta en $\mathbb{Z}$, que sea libre se sigue de la ecuación $x = x + n$ la cual es cierta solo para $n = 0$. Para mostrar que es propiamente discontinua para cada $x \in$ IR tómese un abierto $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, de donde se tiene que $nU \cap U = \varnothing$ para todo $n \neq 0$.

2. La aplicación antípodal en S^n visto como una acción del grupo $\mathbb{Z}_2$={-1,1} ($A(x) = -x$ para el elemento diferente del neutro), es libre y propiamente discontinua. Que sea libre es claro por la continuidad, y para cualquiera $x \in S^n$, los puntos cerca a x todos tienen sus antípodos bastante lejos.

3. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. La aplicación continua (z, w) a $(1/z, -w) = (\bar{z}, -w)$ toma la primera circunferencia y la refleja por el eje x (en la figura 3 se divide en dos cilindros, y se identifica el superior con el inferior), toma la segunda y la hace girar 180 grados (en la figura 4 se visualiza el giro sobre los bordes del cilindro), además es su propio inverso (si se aplica dos veces da la identidad). Así, se tiene una acción por el grupo $\mathbb{Z}_2$ sobre el toro T, como en el caso de la aplicación antípodal en la esfera, la acción es libre y propiamente discontinua, porque una vecindad pequeña de un punto (z_0, w_0) en S^1 se mueve bastante lejos de sí mismo bajo la aplicación de esta acción por el único elemento no trivial de $\mathbb{Z}_2$, debido al hecho que w_0 es girado 180 grados. Se ha dado entonces el cociente asociado al toro $T = S^1 \times S^1$ bajo la acción de $\mathbb{Z}_2$, $S^1 \times S^1 / \mathbb{Z}_2$ se llamará la botella de Klein.

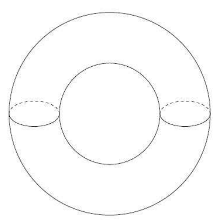

Figura 3: Identificación

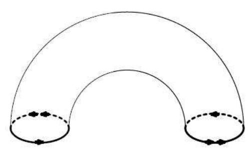

Figura 4: Giro sobre los bordes

Esta definición de la botella de Klein está relacionada con la vizualización tradicional, dada como el espacio cociente del rectángulo $[0,1]\times[0,1]$ por la relación de equivalencia que identifica los puntos $(x,0) : (x,1)$ y $(0,y) : (1,1-y)$, con $0 \le x, y \le 1$, o un poco más general como el cociente de P^2 por la relación de equivalencia definida por $(x,y) : (x+n,(-1)^n y+m)$ para $n,m \in \mathbb{Z}_2$. La botella de Klein se muestra en las figuras 5 y 6:

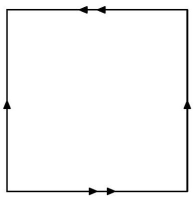

Fig5: Identificación

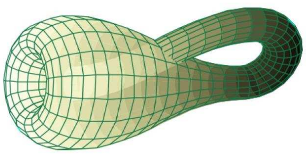

Fig6: Visualización tradicional

4. Conclusiones

Cuando un grupo G es finito, la acción siempre es propiamente discontinua. Si la acción es propiamente discontinua no tiene por qué ser libre. Si la acción es libre, no necesariamente es propiamente discontinua.
Para las acciones libres y propiamente discontinuas en el caso Hausdorff localmente compacto se puede encontrar un abierto U alrededor de cada $x \in X$ tal que U es disjunto con gU siempre que $g \neq e$.
Cuando el espacio es Hausdorff localmente compacto y el grupo es discreto, la acción es libre y propiamente discontinua.
Para las acciones libres y propiamente discontinuas se tiene que en X/G se identifican puntos en la misma G-órbita, con este proceso de identificación no se cruza el espacio X por identificación de los puntos de X que están arbitrariamente cercanos unos de otros. Esto garantiza que X/G es Hausdorff.

5. Bibliografía

[1] M.A. Armstrong. *Topología Básica*. Editorial Reverté S.A, 1987.
[2] P. Baum, A. Connes, N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-Theory of group C^*-Algebras*, Contemp. Math. 167 (1994), pp.241-291.
[3] P. Baum, P. M. Hajac, R. Matthes, W. Szymánski. *Non-commutative geometry approach to principal and associated bundles*. To appear in book Quantum Symmetry and Noncommutative Geometry (ed. By P. M. Hajac), 2006.
[4] A. Becker. *Matrix groups, An Introduction To Lie Groups*. Springer, 2002.
[5] E.T. Bell. *Los Grandes Matemáticos*. Preparado por Patricio Barros. Edición en internet: http://www.geocities.com/grandesmatematicos/index.html.
[6] H. Biller. *Proper actions on cohomology manifolds*, Preprint 2182, Fachbereich Mathematik, Technische Universitat Darmstadt, 2001. Edición en internet: http://wwwbib.mathematik.tu-armstadt.de/Preprints/shadows/pp2182.html.
[7] H. Biller. Characterizations of Proper *Actions*, Preprint 2211, Fachbereich Mathematik, Technische Universitat Darmstadt, 2001, Edición en internet: http://wwwbib.mathematik.tu-armstadt.de/Preprints/shadows/pp2211.html.
[8] R.H. Bing. *A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres*, Ann. of Math.56 (1952), 354-362.
[9] F. Brickell, R.S. Clark. *Differentiable Manifolds an introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
[10] N. Bourbaki. *General topology*, Part 1, Hermann, Paris and Addison-Wesley, Reading, 1966, the translation of Topologie Generale, Hermann, Paris.
[11] W.M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2a Ed. Academic press, inc, 1986.
[12] M.P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1993.
[13] J. Dugundji. *Topology*, Allyn and Bacon, 1970.
[14] R. Engelking. *General Topology*. Heldermann, 1989
[15] J. Fraleigh. *Algebra Abstracta-3aEd*. Addison Wesley Iberoamérica, 1967.
[16] A. Gleason. *Spaces with a compact Lie group of transformations*, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 35-43.
[17] V. Guillemin, Yael Karshon, Viktor L. Ginzburg. *Moment Maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions*. AMS, 2002.
[18] I.N. Herstein. *Algebra Moderna* Editorial Trillas México, 1964.
[19] K.H. Hofmann, S.A. Morris. *The structure of compact groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 2006
[20] S. Illman. *Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fth problem*, Ann. of Math. Stud. 138 (1995), 189-220.
[21] S. Illman. *Hilbert's fifth problem and proper actions of Lie groups*, Current Trends in transformation groups, 1-23, K-Monogr. Math., 7, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002
[22] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. press, New York, 1991.
[23] M.A. Kervaire. *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. 34(1960), 257-270.

[24] Kobayashi, Shoshichi- Nomizu, Katsumi. *Foundations of differential geometry*, Vol I, Vol II. John Wiley & Sons, 1963.
[25] T. Kobayashi. *Discontinuous Groups for Non-Riemannian Homogeneous Spaces* -2001. Edición en internet: www.akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/texdvi/Kobaya3.pdf
[26] T. Kobayashi. *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory, 6 (1996), 147-163. Edición en internet: http://www.emis.de/journals/JLT/vol.6 no.2
[27] T. Kobayashi. *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285. (1989), 249-263.
[28] T. Kobayashi. *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces-revisited*. Edición en internet: www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/_le/RIMS1537.pdf.
[29] T. Kobayashi. *Deformation of properly discontinuous actions of* $\mathbb{Z}^k$ *on* $\mathbb{P}^{k+1}$, www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/_le/RIMS1536.pdf.
[30] T. Kobayashi. *On discontinuous group actions on non-Riemannian homogeneous spaces*, www.kurims.kyotou.ac.jp/preprint/file/RIMS1537.pdf.
[31] T. Kobayashi. *Introduction to actions of discrete groups on pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, Acta Appl. Math., 73 (2002), 115-131.
[32] J.L. Koszul. *Sur certains groupes des transformations de Lie*, *Colloque de Géométrie Différentielle*, Strasbourg, (1953).
[33] J.M Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2000.
[34] J.M Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2003.
[35] T. Matumoto, M. Shiota. *Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications in: Homotopy Theory and Related Topics.* Adv. Stud. Pure Math., vol. 9, Kinokuniya, Tokyo, 1986, 41-55.
[36] J. Milnor. *Introduction to algebraic* K*-theory*. Princeton University Press-1971.
[37] G. Mislin, A. Valette. *Proper Group Actions and the Baum-Connes Conjecture*, Advanced Courses in Mathematics, Birkhäuser Barcelona 2003.
[38] D. Montgomery, C.T. Yang. *The existence of a slice*, Ann. of Math., 65 (1957), 108-116.
[39] D. Montgomery, L. Zippin. *Examples of transformation groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 5(1954),460-465.
[40] D. Montgomery, L. Zippin. *Small subgroups of finite-dimensional groups*, Ann. of Math. 56(1952), 213-241.
[41] G.D. Mostow. *Equivariant imbeddings in euclidean space*, Ann. of Math., 65 (1957), 432-446.
[42] J.R. Munkres. *Topología 2ª Ed*. Pearson Educación S.A.-2002.
[43] J.V.Neumann. *Die Einf uhrung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, Ann. of Math.34 (1933), 170-190.
[44] S. de Neymet U. *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
[45] R.S. Palais C^1*-actions of compact Lie groups on compact manifolds are* C^1*-equivalent to* C^1*-actions*, Amer. J. Math. 92 (1970), 748-760.
[46] R. S. Palais. *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2), 73 (1961), 295-323.
[47] R.S. Palais, *The classification of G-spaces*, Memoirs of Amer. Math. Soc., 36 (1960).
[48] L.S. Pontraguin. *Grupos continuos*. Editorial MIR, 1978.
[49] J.J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*. *4a.Ed*. Springer Verlag, New York, 1995.
[50] T. tom Dieck. *Transformation groups*, Studies in Mathematics, vol 8. Walter de Gruyter, 1987.