

MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE FENÓMENOS CÍCLICOS

Mathematical Modeling of cyclical phenomenal.

RESUMEN

En este trabajo, se presenta la modelación de la relación que hay entre la temperatura ambiente y el tiempo transcurrido durante 48 horas en el municipio de Tuluá (Valle del Cauca). La temperatura ambiente es un fenómeno físico y cíclico, en el que su comportamiento obedece con una buena aproximación a una onda sinusoidal. Para su objetivo se tendrán en cuenta 3 métodos, los cuales son: Observación, Mínimos Cuadrados y por último usando Series de Fourier

PALABRAS CLAVES: Fenómeno físico, Fourier, Mínimos cuadrados, Onda seno, Temperatura, Variación.

ABSTRACT

In this paper, it presents the modeling of the relationship between temperature and elapsed time for 48 hours in the municipality of Tuluá (Valle del Cauca). The ambient temperature is a physical phenomenon and cyclical, in which his behavior is due to a good approximation to a sine wave. For purpose shall take into account 3 methods, which are: Observation, Least Squares and finally using Fourier Series.

KEYWORDS: *Physical phenomenon, Fourier, Least squares, sine wave, temperature, Variation.*

1. INTRODUCCIÓN

En nuestra vida cotidiana nos encontramos con fenómenos cíclicos (secuencia de estados ordenados que se repiten sin alteración del orden), tales como los latidos del corazón, las olas del mar, el nivel de las mareas, el movimiento de una cuerda de guitarra, ritmos circadianos. Estos fenómenos cíclicos se asocian matemáticamente a funciones periódicas.

Este trabajo corresponde a estudios hechos en laboratorio, poniendo en práctica la investigación formativa con los diferentes actores, específicamente al fenómeno físico de la variación de la temperatura ambiente que se da entre el día y la noche, tomando observaciones en grados Celsius [°C], cada 30 min. durante 48 horas, y analizando que su comportamiento obedeció con una muy buena aproximación a una onda seno de la forma:

$$T = A \cdot \text{sen}(Bt + C) + D \dots\dots\dots (1)$$

El trabajo consiste en obtener las constantes A , B , C y D , y así poder implementar un modelo matemático predictivo, apoyándose en software o en herramientas incluso como el Excel, con el cual se puede hacer la respectiva simulación, partiendo de funciones conocidas, algoritmos matemáticos y procesos de optimización. Para ello se usarán tres métodos distintos para el ajuste de curvas los cuales consisten en: Observación, Mínimos Cuadrados y Series de Fourier. Al final del estudio se

Luis Fernando Plaza Gálvez

Magister en Enseñanza de la Matemática. Ingeniero Electricista. Profesor Asistente Unidad Central del Valle del Cauca. Grupo de Investigación ENERGÍAS
lplaza@uceva.edu.co,
lufepla@gmail.com

podrá obtener la hora en la cual se presenta la máxima temperatura, así como la temperatura mínima, y de la misma manera verificar la mayor variación que se puede presentar durante un período. Es importante obtener el espacio de tiempo para el cual, la temperatura rebosa valores críticos de interés sean por encima o por debajo, permitiendo llegar a una especie de franjas de seguridad. En los análisis de la simulación, se obtiene el período donde formalmente la función es creciente y donde es decreciente. En este estudio del fenómeno cíclico de la temperatura ambiente se supuso que los valores obtenidos en la hora 0, 24 y 48 son aproximadamente iguales.

2. CONTENIDO

2.1 Variación diaria de la Temperatura.

Se define como el cambio de temperatura entre el día y la noche, producido por la rotación de la tierra. Durante el día la radiación solar es en general mayor que la terrestre por lo tanto la superficie de la tierra se torna más caliente. Y durante la noche, bajo la ausencia de la radiación solar (en el mismo lugar), solo participa la radiación terrestre, y por lo tanto la superficie se enfría. El enfriamiento ocurre hasta la salida del sol y así sucesivamente cada 24 horas, por lo que el comportamiento de la temperatura en el transcurso día – noche es cíclico, tomando una forma de la función seno aproximadamente.

El mayor objetivo es concentrar los esfuerzos en la variación diurna, pues se realizaron mediciones en la ciudad de Tuluá (Valle del Cauca), con latitud constante (4° 05' Norte), longitud constante (76° 12' Occidental), con una posición respecto al eje terrestre constante, con condiciones de terreno (humedad) constante y una altura sobre el nivel del mar constante (960 m.).¹ Se realizó la práctica durante 48 horas seguidas los días 28 y 29 de marzo de 2011. Hora de inicio a las 6:00 pm. A la práctica se le tomo una tabla de valores, consignando sus datos de la siguiente manera, ayudados de termómetro y de reloj, como se ilustra en las imágenes y tabla anexas.

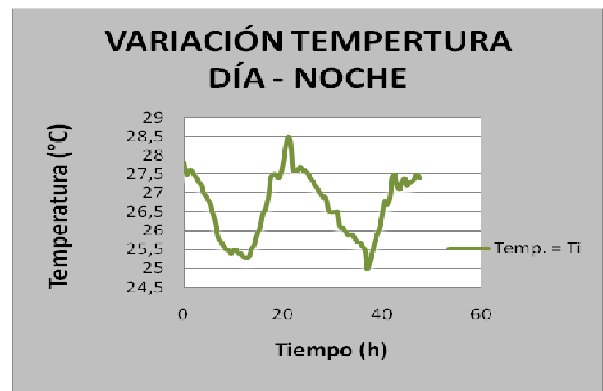


Gráfica No. 1. Dato No. 11 correspondiente a la tabla No. 1.

Dato	Hora	Tiempo transc. (horas)	Temp. (°C)	Dato	Hora	Tiempo transc. (horas)	Temp. (°C)
1	6:00 PM	0	27,8	49	6:00 PM	24	27,6
2	6:30 PM	0,5	27,5	50	6:30 PM	24,5	27,6
3	7:00 PM	1	27,6	51	7:00 PM	25	27,5
4	7:30 PM	1,5	27,6	52	7:30 PM	25,5	27,4
5	8:00 PM	2	27,5	53	8:00 PM	26	27,3
6	8:30 PM	2,5	27,4	54	8:30 PM	26,5	27,2
7	9:00 PM	3	27,3	55	9:00 PM	27	27,1
8	9:30 PM	3,5	27,2	56	9:30 PM	27,5	27
9	10:00 PM	4	27	57	10:00 PM	28	26,9
10	10:30 PM	4,5	26,9	58	10:30 PM	28,5	26,9
11	11:00 PM	5	26,8	59	11:00 PM	29	26,6
12	11:30 PM	5,5	26,6	60	11:30 PM	29,5	26,5
13	12:00 AM	6	26,4	61	12:00 AM	30	26,5
14	12:30 AM	6,5	26,1	62	12:30 AM	30,5	26,5
15	1:00 AM	7	25,8	63	1:00 AM	31	26,5
16	1:30 AM	7,5	25,7	64	1:30 AM	31,5	26,1
17	2:00 AM	8	25,6	65	2:00 AM	32	26,1
18	2:30 AM	8,5	25,5	66	2:30 AM	32,5	26
19	3:00 AM	9	25,5	67	3:00 AM	33	25,9
20	3:30 AM	9,5	25,4	68	3:30 AM	33,5	25,9
21	4:00 AM	10	25,5	69	4:00 AM	34	25,9

22	4:30 AM	10,5	25,5	70	4:30 AM	34,5	25,8
23	5:00 AM	11	25,4	71	5:00 AM	35	25,7
24	5:30 AM	11,5	25,4	72	5:30 AM	35,5	25,7
25	6:00 AM	12	25,3	73	6:00 AM	36	25,6
26	6:30 AM	12,5	25,3	74	6:30 AM	36,5	25,5
27	7:00 AM	13	25,3	75	7:00 AM	37	25
28	7:30 AM	13,5	25,5	76	7:30 AM	37,5	25,2
29	8:00 AM	14	25,6	77	8:00 AM	38	25,4
30	8:30 AM	14,5	25,8	78	8:30 AM	38,5	25,7
31	9:00 AM	15	26	79	9:00 AM	39	25,9
32	9:30 AM	15,5	26,2	80	9:30 AM	39,5	26,1
33	10:00 AM	16	26,5	81	10:00 AM	40	26,4
34	10:30 AM	16,5	26,6	82	10:30 AM	40,5	26,8
35	11:00 AM	17	26,9	83	11:00 AM	41	26,7
36	11:30 AM	17,5	27,4	84	11:30 AM	41,5	26,9
37	12:00 PM	18	27,5	85	12:00 PM	42	27,4
38	12:30 PM	18,5	27,5	86	12:30 PM	42,5	27,5
39	1:00 PM	19	27,4	87	1:00 PM	43	27,2
40	1:30 PM	19,5	27,5	88	1:30 PM	43,5	27,1
41	2:00 PM	20	27,8	89	2:00 PM	44	27,3
42	2:30 PM	20,5	28,2	90	2:30 PM	44,5	27,4
43	3:00 PM	21	28,5	91	3:00 PM	45	27,2
44	3:30 PM	21,5	28,4	92	3:30 PM	45,5	27,3
45	4:00 PM	22	27,6	93	4:00 PM	46	27,3
46	4:30 PM	22,5	27,6	94	4:30 PM	46,5	27,4
47	5:00 PM	23	27,6	95	5:00 PM	47	27,5
48	5:30 PM	23,5	27,7	96	5:30 PM	47,5	27,4

Tabla No. 1. Toma de datos con ayuda de termómetro y reloj.



Gráfica No. 2. Información de temperatura y tiempo asociadas a la Tabla No. 1

2.2 Estudios realizados

¹ www.Tuluá.gov.co/información_general.shtml

Es importante mencionar que ya se han hecho estudios empiricos, en el cual se enseñan aplicaciones de comportamientos de funciones trigonometricas, como es el caso de la onda seno, ver (STEWART, 2007, Pp. 459-465.) y (SWOKOWSKI, 2006. P.469) o un poco mas especializados como (SANTANA, 2009, Pp. 85-96), en el que se hacen análisis mas detallados del comportamiento de la temperatura por un espacio de tiempo de 120 años.

2.3 Ajuste de la variación de Temperatura por Observación del comportamiento de los datos.

Al observar detenidamente el comportamiento grafico de los datos tabulados de temperatura y tiempo transcurridos es fácil darse cuenta que con una buena aproximación, la función que mejor se comporta es la de una onda seno desplazada tanto verticalmente como horizontalmente de la forma expresada en (1)

A representa la amplitud de la onda, y se puede obtener como la mitad de la diferencia entre los valores máximo y mínimo de las temperaturas.

$$A = \frac{1}{2}(T_{\max} - T_{\min}) \dots\dots\dots (2)$$

$$A = \frac{1}{2}(28.5 - 25)$$

$$A = 1.75$$

D representa el desplazamiento vertical, y se puede obtener como el promedio de los valores máximo y mínimo de las temperaturas.

$$D = \frac{1}{2}(T_{\max} + T_{\min}) \dots\dots\dots (3)$$

$$D = \frac{1}{2}(28.5 + 25)$$

$$D = 26.75$$

El período es $\frac{2\pi}{B}$, el cual a su vez es igual a 24 (Horas del día), por lo tanto

$$B = \frac{\pi}{12} \dots\dots\dots (4)$$

C representa el desplazamiento de fase (horizontal), donde el signo “+” representa desplazamiento a la izquierda y el signo “-” representa desplazamiento a la derecha. En este caso al comparar con la onda seno, se da un desplazamiento horizontal hacia la izquierda, el cual se obtiene haciendo la resta de los valores de tiempo entre el punto máximo de la curva obtenida de datos y la

curva seno con la misma amplitud y el mismo desplazamiento vertical. En este caso se tiene que

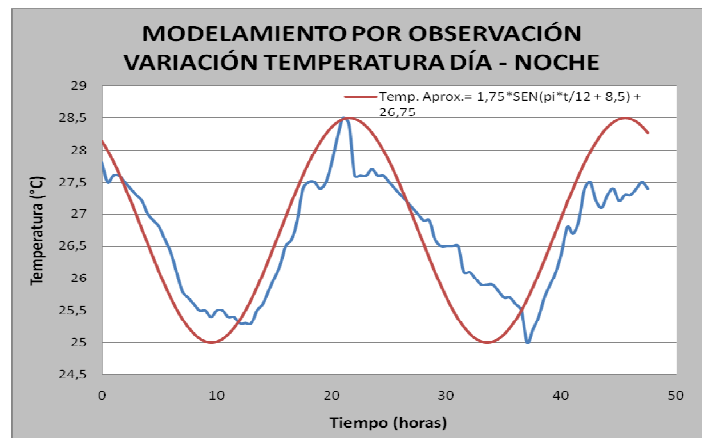
$$C = +8.5,$$

Resultados obtenidos.

Por lo tanto la curva ajustada es

$$T = 1.75 \text{ sen} \left[\frac{\pi}{12} t_i + 8.5 \right] + 26,75$$

A continuación se presenta en la grafica No. 3, el comportamiento de la curva aproximada por observación, así como la que representa los datos reales obtenidos en la toma de datos.



Gráfica No. 3. Análisis gráfico de la curva aproximada por Observación y la real.

2.4 Ajuste de la variación de Temperatura por Mínimos Cuadrados.

Aquí se aplican los conceptos de aplicaciones de la derivada. Parte de determinar el error de un ajuste como:

$$E(t_i) = h(t_i) - T(t_i) \dots\dots\dots (5)$$

Donde $h(t_i)$ es el valor real observado en el tiempo t_i y $T(t_i)$ es el valor de la función de ajuste (función de n parámetros k_n) evaluada en t_i .

Se define la función

$$F(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum [E(t_i)]^2 \dots (6)$$

Donde k_1, k_2, \dots, k_n representan los parámetros de la función de ajuste. El método de los mínimos cuadrados

busca minimizar la función F con respecto a los parámetros k_r

La condición de optimización buscada se garantiza haciendo $k = [1...n]$:

$$\frac{\partial F}{\partial k_k} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial \sum [E(t_i)]^2}{\partial k_k} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$2 \sum [E(t_i)] \frac{\partial E(t_i)}{\partial k_k} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

Teniendo en cuenta (5), y el hecho que $h(t_i)$ no depende de ninguno de los coeficientes de la función de ajuste, la ecuación (9) se reduce a

$$\sum [h(t_i) - T(t_i)] \frac{\partial T(t_i)}{\partial k_k} = 0 \dots (10)$$

Para un mayor análisis y comprensión ver (WALPOLE, 1998, Pp. 362), (CHAPRA, 1999. Pp. 541-544) y (CARDONA, 2001. Pp. 87 - 98).

Teniendo en cuenta que el parámetro B , presente en la ecuación (1), tiene la forma $B = 2\pi f$, donde f es la frecuencia e igual al inverso del periodo, y donde se está trabajando con periodos de 24 horas, se reduce a expresarse como aparece en (4).

Por lo tanto, la ecuación (1), se convierte en

$$T = A \cdot \text{sen} \left[\frac{\pi}{12} t_i + C \right] + D \dots (11)$$

Por lo tanto la función a minimizar es:

$$F = \sum_1^m \left(h(t_i) - \left[A \cdot \text{sen} \left[\frac{\pi}{12} t_i + C \right] + D \right] \right)^2 \dots (12)$$

Donde los parámetros a encontrar son: A , C y D , los cuales son las variables respecto a las cuales se van a tomar las derivadas parciales e igualadas a cero, tal como aparece en la ecuación (10) y el valor de m , como límite superior de la sumatoria es 96 en este caso, pues se tomaron datos durante 2 días continuos cada 30 minutos, de temperatura y tiempo transcurrido. Aquí $h(t_i)$ va a ser igual a T_i . Por lo tanto sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial A} = \sum_1^m \left(T_i - \left[A \cdot \text{sen} \left[\frac{\pi}{12} t_i + C \right] + D \right] \right) \cdot \text{sen} \left[\frac{\pi}{12} t_i + C \right] = 0 \dots\dots (13)$$

Luego al aplicar propiedades y al abrir las sumatorias se llega a:

$$C = \text{Tan}^{-1} \left[\frac{\sum_1^m T_i \cos \left[\frac{\pi}{12} t_i \right]}{\sum_1^m T_i \text{sen} \left[\frac{\pi}{12} t_i \right]} \right]$$

$$A = \frac{2}{m} \cdot \frac{\cos C \sum_1^m T_i \text{sen} \left[\frac{\pi}{12} t_i \right] + \text{sen} C \cdot \sum_1^m T_i \cos \left[\frac{\pi}{12} t_i \right]}{\text{sen}^2 C}$$

$$D = \frac{\sum_1^m T_i}{m}$$

Resultados obtenidos.

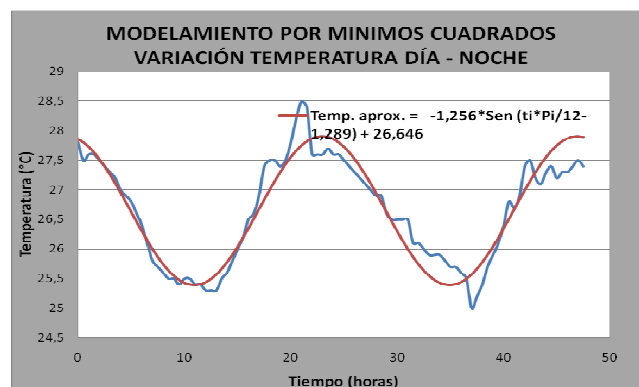
Para una de las prácticas en mención se obtuvieron los siguientes resultados. Teniendo en cuenta que a cada valor obtenido de t_i entre 0 y 48 se le podía tomar T_i , y adicionalmente se podían obtener

$$\text{sen} \left[\frac{\pi}{12} t_i \right], \text{ y simultáneamente } \cos \left[\frac{\pi}{12} t_i \right].$$

Por lo tanto, la primera práctica arrojó el siguiente resultado

$$T_{\text{apx.}} = -1,256 \cdot \text{sen} \left[\frac{\pi}{12} t - 1.289 \right] + 26,646$$

A continuación se presenta en la grafica No. 4, el comportamiento de la curva aproximada por el método de los Mínimos Cuadrados, así como la que representa los datos reales obtenidos en la toma de datos.



Gráfica No. 4. Análisis gráfico de la curva aproximada por Mínimos Cuadrados y la real.

2.5 Ajuste de la variación de Temperatura por Series de Fourier.

Una función cuyos valores se repiten a intervalos regulares, se dice que es una función periódica. Para mejor comprensión dirigirse ver (SAN MARTÍN, 2005, Pp. 363- 379)

Definición:

Sea $f(x)$ una función real, definida para todo x . Se dice que es periódica de período T , si $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Definición:

Sea $f(t)$ una función periódica de período T , se le llama su desarrollo en serie de Fourier a la expresión

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + B_k \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{T} t \right) \dots(14)$$

Sea $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, el cual es llamada la frecuencia fundamental y sus múltiplos constantes $2w_0, 3w_0$, etc., son llamados armónicos.

Si la función $f(t)$ es continua, los coeficientes A_k y B_k de (14) se pueden calcular por medio de

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(kw_0 t) dt \dots\dots\dots(15)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(kw_0 t) dt \dots\dots(16)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \dots\dots\dots(17)$$

En nuestro caso $f(t)$ es una función discreta (puntos), por lo tanto los coeficientes A_k y B_k de (14) se pueden calcular por medio de la aproximación en Sumas de Riemman, así:

$$A_k = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^n T(t_i) \cos\left(k \frac{\pi}{12} t_i\right) \dots(18)$$

$$B_k = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^n T(t_i) \operatorname{sen}\left(k \frac{\pi}{12} t_i\right) \dots (19)$$

Aquí $\frac{A_0}{2}$ se toma como la temperatura promedio, valor idéntico al obtenido para la constante D , en la solución por Mínimos Cuadrados, método 2.

En este caso $n = 96$, y queriendo expresar con 5 armónicos la expansión en serie de Fourier discreta. Ver (PROAKIS, 1998. Pp. 237-255)

Resultados obtenidos.

A continuación se relacionan las respuestas obtenidas para los coeficientes de Fourier propuestos los cuales se obtuvieron a partir de los datos consignados en la tabla No. 2.

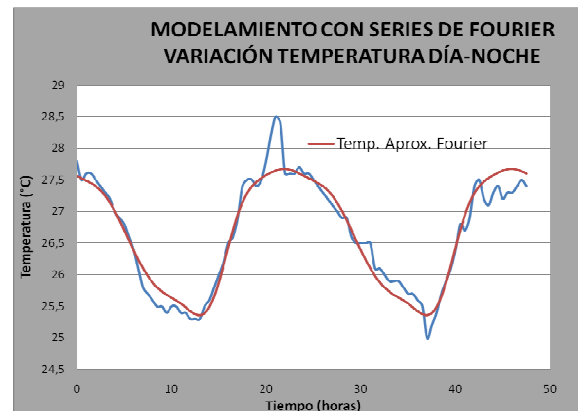
Coeficiente	Valor
$A_{0/2}$	26.646.875
A_1	1.114.124
A_2	-0.172996
A_3	-0.022293
A_4	0.019717
A_5	-0.023603
B_1	-0.322157
B_2	-0.062914
B_3	0.129818
B_4	-0.058592
B_5	0.057857

Tabla No. 2. Valores obtenidos para los coeficientes de Fourier de orden 5

Por lo tanto, luego de conocer los coeficientes de Fourier, y al reemplazar en (22), la función aproximada se convierte en

$$T(t) = 26.647 + \sum_{k=1}^5 \left(A_k \cos \frac{\pi k}{12} t + B_k \operatorname{sen} \frac{\pi k}{12} t \right)$$

A continuación se presenta en la grafica No. 5, el comportamiento de la curva aproximada por análisis de los coeficientes de Fourier, así como la que representa los datos reales obtenidos en la toma de datos.



Gráfica No. 5. Análisis gráfico de la curva aproximada por Series de Fourier y la real.

3. CONCLUSIONES.

Se han conocido herramientas útiles para la docencia y la investigación, donde se pudo ver la aplicación de funciones periódicas, así como su comportamiento. Inicialmente se dio una aproximación de la experimentación pretendiéndola asimilar al modelo matemático de una onda seno desplazada tanto horizontal como vertical, luego se pudo implementar un proceso de optimización por medio de aplicaciones de la derivada en el instrumento denominado Ajuste por Mínimos Cuadrados, y por último se usó la técnica más especializada como son las Series de Fourier.

Después de obtener el modelo matemático, como aquella expresión que describía mejor el comportamiento de la variable temperatura con el tiempo, que en los tres casos fue compuesta por funciones trigonométricas, se procedió a calcular el error relativo presente en los 96 datos, llegando al resultado expuesto en la tabla No. 3. Para cada metodología puesta en marcha, se obtuvo el mínimo, el máximo, y el error relativo promedio, así como su varianza. Con lo anterior se pudo concluir que el modelo encontrado tanto con ajuste por Mínimos Cuadrados como por Series de Fourier, presentan similares resultados y si se logra implementar, específicamente está última, pero haciendo simulación con un número mayor a cinco armónicos, y apoyándose en un software como SCILAB, se puede intentar llegar a una mejor modelación.

CRITERIO	MÉTODO 1 (OBSERVACIÓN)	MÉTODO 2 (MÍNIMOS CUADROS)	MÉTODO 3 (SERIES DE FOURIER)
ERROR MÁXIMO	4,717%	2,641%	2,995%
ERROR MÍNIMO	0,008%	0,017%	0,031%
ERROR PROMEDIO	2,076%	0,849%	0,624%
VARIANZA	12,4 E-05	4,01E-05	2,72E-05

Tabla No. 3. Análisis de resultados obtenidos con el Error relativo, para la mejor aproximación.

4. RECOMENDACIONES.

Es importante realizar la práctica, no por dos días, sino durante los 30 días del mes, para luego tomar el promedio de los 30 días, y sobre estos promedios se puede obtener el modelo para la temperatura promedio mensual. En forma análoga, se pueden tomar datos durante todo el año, y modelando sobre los doce datos promedio mensuales, se puede obtener el comportamiento medio anual de la temperatura en una determinada región, permitiendo de esta manera, hacer

proyecciones en aplicaciones que podrían ir de la mano con la agricultura.

Si se desea una mayor precisión en los resultados obtenidos, se puede acceder a un termómetro con precisión de dos cifras decimales y que permita descargar la información en tiempo real con cable USB, a una plataforma Windows.

Teniendo en cuenta que ya existen en el mercado calculadoras que realizan regresión sinusoidal, tales como la Cassio FX 9850 GC plus, se pueden revisar los datos obtenidos a través de los diversos modelos estudiados aquí y realizar la debida comparación.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- [1] CARDONA, Y. M. y FERNANDEZ, J. M., Análisis de mareas por el método de la descomposición en armónicos, Tesis para optar al título de Ingeniero Civil, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2001. Pp. 87 – 98.
- [2] CHAPRA, S. C. y CANALE, R. P., *Métodos numéricos para ingenieros*, Editorial Mc Graw-Hill, 3ª edición, México D.F., 1999. Pp. 541-544.
- [3] PEIRANO, P., Estilo de Vida y Trastornos del Sueño. En: Medwave. Año 4, No. 8, (Septiembre de 2004). Disponible <http://www.medwave.cl/atencion/infantil/FUDOCIV2003/2/1.act>.
- [4] PROAKIS, J. G. y MANOLAKIS, D. G., Tratamiento digital de señales, Editorial Prentice Hall, 3ª edición, Madrid, 1998. Pp. 237-255.
- [5] SAN MARTÍN, J., UÑA, J. I. y TOMELO, P. V., *Métodos Matemáticos. Ampliación de Matemáticas para Ciencias e Ingeniería*, Editorial THOMSON, Madrid, 2005. Pp. 363- 379.
- [6] SANTANA, A., BUTROVIC, A. y OLAVE, C. (2009). Variación de la temperatura en Punta Arenas (Chile). En: Anales Instituto Patagonia. Vol. 37, No. 1, (2009). Pp. 85 – 96.
- [7] STEWART, J., REDLIN, L., WATSON, S., Pre cálculo, Matemáticas para el cálculo, Editorial CENGAGE Learning, México D.F., 2007. Pp. 459-465.
- [8] SWOKOWSKI, E. W., COLE, J.A., Algebra y trigonometría analítica, Editorial THOMSON, 11ª Edición, México D.F., 2006. P.469.
- [9] WALPOLE, R. E., MYERS, R. H. y MYERS, S. L. Probabilidad y Estadística para ingenieros, Editorial Pearson Educación, 6ª Edición, México D.F., 1998. Pp. 362.