

# Methodology for the implementation of an economic and/or statistical design for x-bar charts with variable parameters (VP)

## Metodología para la implementación del diseño económico y/o estadístico de cartas de control x-barra con parámetros variables (VP)

Rita Peñabaena-Niebles <sup>a</sup>, Oscar Oviedo-Trespalacios <sup>b</sup>, Sandra Cuentas-Hernandez <sup>c</sup> & Ethel García-Solano <sup>d</sup>

<sup>a</sup> Ph.D., Profesor Investigador, Universidad del Norte, Colombia. [rpena@uninorte.edu.co](mailto:rpena@uninorte.edu.co)

<sup>b</sup> M.Sc., Profesor Investigador, Universidad del Norte, Colombia. [ooviedo@uninorte.edu.co](mailto:ooviedo@uninorte.edu.co)

<sup>c</sup> M.Sc. (C), Investigador, Universidad del Norte, Colombia. [scuentas@uninorte.edu.co](mailto:scuentas@uninorte.edu.co)

<sup>d</sup> M.Sc. (C), Investigador, Universidad del Norte, Colombia. [egarcia@uninorte.edu.co](mailto:egarcia@uninorte.edu.co)

Received: November 22th, 2012. Received in revised form: October 15th, 2013. Accepted: November 20th, 2013.

### Abstract

Recent advances in the design of control charts have focused on variable parameters charts (VP) in which parameters are modified according to the last sample value. These charts have proved more effective in detecting assignable causes but more complex for implementation in organizations. Although, there is a lot literature regarding the economic and/or statistical design of a VP chart, few authors focus their efforts on making them accessible to companies. In this paper a new procedure is proposed to reduce the complexity and enhance the benefits of an economic and an economic-statistical design of X charts with variable parameters.

*Keywords:* X control charts, cost-effective design, statistical design, variable parameters.

### Resumen

Los últimos avances en el diseño de cartas de control se han enfocado en las cartas con parámetros variables (VP) en las cuales se modifica los parámetros de la carta de acuerdo al valor de la última muestra. Estas cartas han demostrado ser más eficaces en la detección de las causas asignables pero más complejas para su implementación en las organizaciones. Aunque es mucha la literatura referente al diseño económico y/o estadístico de cartas VP, son pocos los autores que enfocan sus esfuerzos en hacerlas accesibles a las empresas. En este artículo se presentara un nuevo procedimiento diseñado con el fin de disminuir la complejidad y aprovechamiento de las ventajas del diseño económico y económico-estadístico de cartas X con VP.

*Palabras Clave:* Cartas de control X, diseño económico, diseño estadístico, parámetros variables.

## 1. Introducción

Las cartas de control X son una de las herramientas de control estadístico de procesos más utilizadas para el mejoramiento de la calidad y la productividad en las compañías. En el diseño de una carta X para monitorear la media de un proceso se debe seleccionar tres parámetros: el tamaño de muestra (n), el intervalo de muestreo (h) y el coeficiente del límite de control (k). Sin embargo, la carta X tradicional ha demostrado tener un peor desempeño al detectar cambios pequeños y moderados en la media del proceso [1, 2, 3], por este motivo, se ha recurrido a modificar el diseño de esta carta de control utilizando diferentes enfoques, como por ejemplo variar los parámetros de la carta aumentando o disminuyendo el rigor de la búsqueda en función del valor de la última muestra tomada. Este enfoque recibe el nombre de cartas de control con parámetros variables (VP).

Sobre estas cartas son diversas las opiniones, mientras algunos autores como Reynolds et al. [4], Costa [5], Das et al. [6,7], De Magalhaes et al. [8] han demostrado que la variación de uno o más parámetros a partir de la información de la muestra anterior tiene un mejor desempeño estadístico y económico que la carta tradicional con parámetros fijos. Los supuestos base para hacer la comparación es que el proceso arroje observaciones independientes y normalmente distribuidas. Otros autores como Prabhu et al. [9] sugieren que aunque la carta VP tiene una mejor eficiencia estadística no tienen necesariamente un desempeño en costos superior a la carta tradicional.

Al igual que otros tipos de cartas, estas han venido siendo optimizadas mediante el uso de funciones que permitan mejorar su comportamiento a nivel estadístico y económico. El enfoque que busca obtener el mayor rendimiento estadístico de una carta recibe el nombre de diseño estadístico de una carta de control. Por otro lado,

cuando se busca minimizar los costos derivados del uso de la carta de control se habla de diseño económico de una carta de control. Además de estos dos enfoques, existe otro tipo de diseño que busca un equilibrio entre los costos y las propiedades estadísticas de una carta de control denominado diseño económico estadístico.

Aunque estos diseños han mejorado el desempeño de las cartas VP, algunos como el de Parkideh y Case [10] y el de Ohta y Rahim [11], son matemáticamente muy complicados y difíciles de implementar [1]. Además, otra desventaja de estas cartas es que resultan complejas administrativamente en comparación a las cartas con parámetros fijos, y en algunos casos el ahorro conseguido por reducción de residuo, reprocesos e inspecciones no es significativo en relación al costo de manejo administrativo [12].

La aplicación de estos diseños económicos estadísticos de cartas de control en la industria se ven obstaculizados por la dificultad de obtención y evaluación de costos y tiempos necesaria, la dificultad de los métodos para estimar los parámetros y la complejidad que se genera para los encargados del monitoreo de calidad al tratar de entender un sistema con algún grado de dificultad. Esta situación ha sido referenciada por autores como Montgomery [13] y Keats et al. [14].

El propósito de este artículo es presentar una metodología que facilite la implementación de los modelos económico y económico-estadístico de cartas de control con todos los parámetros variables (VP) a través de un caso de estudio presentado por Lorenzen y Vance [15] para parámetros fijos y más tarde modificado para parámetros variables por De Magalhaes et al. [16]. Los resultados de este último serán comparados con la metodología propuesta.

**2. Diseño económico-estadístico de cartas de control**

En el diseño de una carta X los parámetros tamaño de muestra (n), intervalo de muestreo (h) y coeficiente del límite de control (k) varían entre dos valores (mínimo y máximo) cuya selección disminuye o aumenta la rigurosidad del control. Así entonces, la selección de los parámetros debe cumplir con:  $n_1 < n_2, h_1 > h_2, w_1 > w_2$  y  $k_1 > k_2$ , de tal forma que el escenario con valores  $(n_1, h_1, w_1, k_1)$  corresponda al control relajado y el escenario con valores  $(n_2, h_2, w_2, k_2)$  corresponda al control estricto.

La carta VP está dividida en tres regiones diferentes (ver figura 1): la región central comprendida entre el límite de advertencia inferior y el límite de advertencia superior (LAI, LAS), la de advertencia comprendida por las zonas entre el límite de control inferior hasta límite de advertencia inferior (LCI, LAI) y el límite de advertencia superior hasta límite de control superior (LAS, LCS) y la región de acción comprendida por los valores que sobrepasan los límites de control superior (LCS) y los valores que son inferiores al límite de control inferior (LCI).



Figura 1. Regiones de la carta de control con parámetros variables

La política de decisión determina que la posición en la que caiga cada muestra determina cual set de parámetros de control (relajado o estricto) se deberá utilizar en la siguiente toma. Si el punto cae en la región central, el control se disminuye, el tamaño de muestra debe ser pequeño ( $n_1$ ), el intervalo de muestreo y los coeficientes de control y advertencia deben ser grandes ( $h_1$ ), ( $k_1$ ) ( $w_1$ ). Por otro lado, si el punto cae en la región de advertencia, el control se aumenta, en consecuencia el tamaño de muestra debe ser grande ( $n_2$ ), el intervalo de muestreo y los coeficientes de control y advertencia deben ser pequeños ( $h_2$ ) ( $k_2$ ) ( $w_2$ ). Por último, si el punto cae en la región de acción, una investigación debe comenzar para verificar la ocurrencia de una causa asignable y si es pertinente iniciar el proceso de reparación.

$$(n_i, h_i, k_i, w_i) = \begin{cases} (n_2, h_2, k_2, w_2) & \text{si } w < Z_{i-1} < LCS \\ (n_1, h_1, k_1, w_1) & \text{si } -w < Z_{i-1} < w \\ (n_2, h_2, k_2, w_2) & \text{si } LCI < Z_{i-1} < -w \end{cases}$$

El diseño estadístico de cartas de control implica la selección de los parámetros óptimos teniendo en cuenta propiedades estadísticas de interés dejando a un lado los costos asociados a su obtención. Por otro lado, cuando se desea que los costos asociados al control de un proceso se reduzcan sin tener en cuenta la pérdida de características estadísticas relevantes del mismo, se habla de un diseño económico de una carta de control. Cuando es deseable seleccionar parámetros que equilibran tanto el comportamiento estadístico como de costos de un proceso, lo llamamos un diseño económico estadístico de una carta de control [17]. Así entonces, el tipo de diseño está condicionado a que se busca obtener: reducción de costos, alto desempeño en la detección de desajustes del proceso o un equilibrio entre estas dos variables.

Individualmente, las cartas de control estadísticas tienen propiedades estadísticas estables pero un costo operacional elevado, mientras que las cartas de control económicas se concentran más en los costos en detrimento del desempeño estadístico incrementando el número de falsas alarmas y

conduciendo a sobreajustes que pueden aumentar la variación de la característica a evaluar [18]. En respuesta a esta situación surgen las cartas económico-estadísticas, que utilizan un enfoque semi-económico que minimiza la función de costos pero añadiendo restricciones sobre algunas características estadísticas, lo cual garantiza una disminución en los costos totales sin descuidar el desempeño estadístico.

**3. Metodología**

La metodología propuesta para la implementación de un diseño económico y económico-estadístico, contiene las siguientes etapas:

**2.1. Selección Primera Muestra**

La selección del tamaño y frecuencia de muestreo depende del valor de la muestra inmediatamente anterior, la primera muestra al inicio del proceso de muestreo debe ser escogida de forma arbitraria. En esta metodología se sigue el planteamiento de Bai y Lee [19] sobre utilizar la frecuencia de muestreo más baja y el tamaño de muestra más alto como una medida de protección más elevada ante la ocurrencia de una causa asignable.

**2.2. Grafica Carta de Control**

Para la metodología se propone graficar las cartas de control de manera diferente a la tradicional, donde se utilizan límites constantes y se construye una gráfica de control con dos escalas a cada lado de la misma [20]. Con el fin de graficar las muestras pequeñas y grandes en una gráfica, se diseñó una macro de Excel que permita mover los límites de acuerdo al valor que requiera la muestra. En la Figura 2 se presenta una imagen de la una gráfica obtenida a través de la macro.

Para su ejecución, la plataforma necesita de valores de entrada la media, desviación y los parámetros óptimos del modelo y arroja la gráfica y algunos parámetros de interés seleccionados por el usuario.

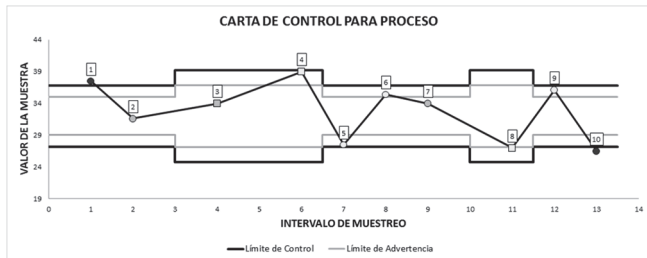


Figura 2. Carta X con parámetros variables límites variables

**2.3. Modelo de Costos**

La metodología propuesta utiliza el modelo de De Magalhaes et al. [16] para determinar los parámetros óptimos:  $n_1, n_2, h_1, h_2, w_1, w_2, k_1, k_2$  que minimizan los costos de las cartas de control. En este artículo, se propone un procedimiento que utiliza algoritmos genéticos (GA)

como método de optimización. Además, incorpora dos nuevas restricciones que evitaren que el modelo asuma probabilidades negativas que alteren el resultado de los valores óptimos. Las asunciones del modelo propuesto son:

- i. Las muestras son independientes.
- ii. Las observaciones están normalmente distribuidas.
- iii. El proceso comienza bajo control con media y desviación estándar conocida  $\mu = \mu_0$  y  $\sigma$
- iv. El modelo considera la existencia de una sola causa asignable en la operación del proceso.
- v. La ocurrencia de la causa asignable tiene distribución exponencial con media  $1/\lambda$ .
- vi. El proceso no es auto correctivo (Solo la intervención puede regresar el proceso a estado de control)
- vii. El proceso puede o no ser detenido durante la búsqueda y reparación de una causa asignable.
- viii. Los parámetros a determinar son:  $n_1, n_2, h_1, h_2, w_1, w_2, k_1, k_2$

A continuación se presenta la notación de las variables de salida y entrada utilizada en el modelo:

$$n_i = \begin{cases} i = 1 \text{ Tamaño de muestra para región central.} \\ i = 2 \text{ Tamaño de muestra para región a advertencia.} \end{cases}$$

$$h_i = \begin{cases} i = 1 \text{ Frecuencia de muestreo para región central.} \\ i = 2 \text{ Frecuencia de muestreo para región a advertencia.} \end{cases}$$

$$k_i = \begin{cases} i = 1 \text{ Coeficientes de límites de acción para región central.} \\ i = 2 \text{ Coeficientes de límites de acción para región a advertencia.} \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} i = 1 \text{ Coeficiente de límites de advertencia para región central.} \\ i = 2 \text{ Coeficiente de límites de advertencia para región a advertencia.} \end{cases}$$

$Y$ : Costo por falsa alarma.

$G$ : Tiempo promedio de/para muestrear.

$T_0$ : Tiempo promedio de búsqueda de una falsa alarma.

$T_{**}$ : Tiempo promedio para reparar una causa asignable.

$T_*$ : Tiempo promedio de búsqueda de una causa asignable.

$C_0$ : Costo promedio por hora de la no conformidad durante el periodo en que el proceso está bajo control.

$C_1$ : Costo promedio por hora de la no conformidad durante el periodo en que el proceso está fuera de control.

$W$ : Costo promedio para encontrar y eliminar una causa asignable.

$a$ : Costo fijo por toma de una muestra.

$b$ : Costo variable por toma de una muestra.

$1/\lambda$ : Tiempo promedio en que el proceso está bajo control.

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{Si la producción continúa en la búsqueda} \\ 0 & \text{Si la producción no continúa en la búsqueda} \end{cases}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 1 & \text{Si la producción continúa en la reparación} \\ 0 & \text{Si la producción no continúa en la reparación} \end{cases}$$

$p_0$ : Es la probabilidad de que se requiera una muestra grande durante el periodo bajo control.

$(1 - p_0)$ : Es la probabilidad de que una muestra sea pequeña durante el periodo bajo control.

$E(ECTU)$ : Costo por unidad de tiempo asociado al control de un proceso con una carta de control VP.

$E(C)$ : Costo esperado por ciclo.

$E(T)$ : Tiempo esperado por ciclo.

$E(C_{fa})$ : Costo esperado de falsas alarmas.

$E(C_{in})$ : Costo esperado de la no conformidad al operar en estado bajo control.

$E(C_{out})$ : Costo esperado de la no conformidad al operar en estado fuera de control.

$E(C_{sam})$ : Costo esperado de inspección y muestreo.

$E(C_r)$ : Costo esperado de encontrar y eliminar una causa asignable.

$E(F)$ : Es el número esperado de falsas alarmas.

$E(R)$ : Tiempo esperado entre la ocurrencia del cambio en la media del proceso y la primera muestra después de este.

$E(S)$ : Tiempo esperado desde la primera muestra después de la ocurrencia de una causa asignable hasta la ocurrencia de una alarma.

$E(T_1)$ : Tiempo esperado desde la primera muestra después del cambio, cuando esta muestra cae en la región de advertencia, hasta la ocurrencia de una alarma.

$E(T_2)$ : Tiempo esperado desde la primera muestra después del cambio, cuando esta muestra cae en la región central, hasta la ocurrencia de una alarma.

$E(T_{fa})$ : Tiempo esperado de búsqueda de falsas alarmas.

$\alpha_i$ : es la probabilidad del error tipo I cuando la carta tiene parámetros  $n_i, k_i, h_i$  con  $i = 1, 2$ .

$n$ : Es el promedio de tamaños de muestra tomadas mientras el proceso está bajo control.

$n'$ : Es el promedio de tamaños de muestra tomadas mientras el proceso está fuera de control.

$E(N)$ : Es el número promedio de muestras tomadas mientras el proceso está bajo control.

$E(N')$ : Es el número promedio de muestras tomadas mientras el proceso está fuera de control.

$ATS_0$ : Tiempo promedio para señalar.

$AATS$ : Tiempo esperado desde la ocurrencia de una causa asignable hasta que una alarma es dada.

$P(B = B_1)$ : Probabilidad de que la primera muestra tomada luego de la ocurrencia de la causa asignable caiga en la región central.

$P(B = B_2)$ : Probabilidad de que la primera muestra tomada

luego de la ocurrencia de la causa asignable caiga en la región de advertencia.

$P(B = B_3)$ : Probabilidad de que la primera muestra tomada luego de la ocurrencia de la causa asignable caiga en la región de acción.

#### 2.4. Calculo de Variables

Con el objetivo de disminuir los costos asociados al control de calidad, se utiliza la expresión expuesta por Ross [21], la cual determina el costo esperado por unidad de tiempo (ECT):

$$ECT = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (2)$$

Las expresiones necesarias para el cálculo del tiempo esperado de ciclo  $E(T)$  y costo esperado por ciclo  $E(C)$  se basan en lo desarrollado por Das et al. [6] y De Magalhaes et al. [16].

Para la estimación de estos parámetros, el modelo presentado divide al proceso de producción en ciclos que comienzan con el inicio o reinicio del proceso debido a la eliminación de una causa asignable o el comienzo del proceso de producción. Así, un ciclo está conformado por el periodo en control, el periodo fuera de control, periodo de investigación y reparación. Con esto tenemos que el tiempo esperado de ciclo estará dado por:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + (1 - \delta_1) E(T_{fa}) + AATS + n'G + T_* + T_{**} \quad (3)$$

Por otra parte, en un ciclo se puede incurrir en costos asociados a las falsas alarma  $E(C_{fa})$ , costos de la no conformidad al operar en estado bajo control  $E(C_{in})$  y fuera de control  $E(C_{out})$ , costos de inspección y muestreo  $E(C_{sam})$  y costo de encontrar y eliminar una causa asignable  $E(C_r)$ . De lo cual se puede deducir la expresión:

$$E(C) = E(C_{in}) + E(C_{out}) + E(C_{fa}) + E(C_r) + E(C_{sam}) = \frac{C_0}{\lambda} + C_1[AATS + n'G + \delta_1 T_* + \delta_2 T_{**}] + YE(F) + W + (a + bn)E(N) + (a + bn')E(N') \quad (4)$$

El número esperado de falsas alarmas ( $E(F)$ ) durante un ciclo vienen dado por la probabilidad de que una muestra caiga en la región de acción mientras el proceso está bajo control multiplicado por el número esperado de muestras tomadas durante el estado de control

$$E(F) = [\alpha_1 p_0 + \alpha_2 (1 - p_0)] E(N) \quad (5)$$

Donde

$$\alpha_1 = p(|Z| > k_i) \text{ y}$$

$$E(N) = \frac{e^{-\lambda h_1} p_0 + e^{-\lambda h_2} (1 - p_0)}{1 - e^{-\lambda h_1} p_0 + e^{-\lambda h_2} (1 - p_0)}$$

El tiempo promedio para señalar ( $ATS_0$ ) será utilizado como restricción para mejorar las propiedades estadísticas del diseño económico. Este viene dado por:

$$ATS_0 = \frac{[h_1(1 - p_n(0) + h_2 p_{12}(0))p_0 + [h_2(1 - p_{11}(0) + h_1 p_{21}(0))(1 - p_0)]}{1 - p_{11}(0) - p_{22}(0) + p_{11}(0)p_{22}(0) - p_{12}(0)p_{21}(0)} \quad (6)$$

Donde

$$p_{i1}(0) = P(-w_i < Z < -w_i), i = 1,2$$

$$p_{i2}(0) = P(-k_i < Z < -w_i) P(k_i < Z < -k_i), i = 1,2$$

El tiempo esperado de ocurrencia de una causa asignable o alarma ( $AATS$ ) será utilizado para calcular el tiempo esperado de ciclo, así como una restricción que permita minimizar el tiempo de detección de la ocurrencia de una causa asignable. Viene dado por:

$$AATS = E(R) + E(S) \quad (7)$$

El tiempo esperado entre la ocurrencia del cambio en la media del proceso y la primera muestra después de este ( $E(R)$ ) viene dado por:

$$E(R) = \left\{ h_1 - \frac{1 - e^{-\lambda h_1} (1 + \lambda h_1)}{\lambda (1 - e^{-\lambda h_1})} \right\} P(= h_1) + \left\{ h_2 - \frac{1 - e^{-\lambda h_2} (1 + \lambda h_2)}{\lambda (1 - e^{-\lambda h_2})} \right\} P(= h_2) \quad (8)$$

Donde:

$$P(A = h_1) = \frac{p_0 h_1}{[p_0 h_1 + (1 - p_0) h_2]}$$

y

$$P(A = h_2) = \frac{p_0 h_2}{[p_0 h_1 + (1 - p_0) h_2]}$$

El tiempo desde la toma de la primera muestra luego del cambio en el proceso y la aparición de la señal de alarma ( $E(S)$ ) viene dado por:

$$E(S) = E(T_1) P(B = B_1) + E(T_2) P(B = B_2) \quad (9)$$

Dónde:

$$P(B = B_1) = p_{11} P(A = h_1) + p_{21} P(A = h_2)$$

$$P(B = B_2) = p_{12} P(A = h_1) + p_{22} P(A = h_2)$$

$$P(B = B_3) = 1 - P(B = B_1) - P(B = B_2)$$

$$E(T_1) = \left\{ \frac{[h_1(1 - p_{22}) + h_1 p_{12}]}{1 - p_{11} - p_{22} + p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21}} \right\}$$

$$E(T_2) = \left\{ \frac{[h_2(1 - p_{11}) + h_1 p_{21}]}{1 - p_{11} - p_{22} + p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21}} \right\}$$

$$p_{i1} = P(-w_i - \delta \sqrt{n_i} < Z < w_i - \delta \sqrt{n_i}), \quad i = 1,2$$

$$p_{i2} = P(-k_i - \delta \sqrt{n_i} < Z < -w_i - \delta \sqrt{n_i}) + P(w_i - \delta \sqrt{n_i}$$

$$< Z < k_i - \delta \sqrt{n_i}), \quad i = 1,2$$

El tamaño promedio de muestra durante el periodo fuera de control ( $n'$ ) y la frecuencia promedio de muestreo durante el estado fuera de control del proceso ( $h'$ ) se expresan como:

$$n' = n_1 p_0(\delta) + n_2 (1 - p_0(\delta)) \quad (10)$$

$$h' = h p_0(\delta) + h_2 (1 - p_0(\delta)) \quad (11)$$

Donde

$$p_0 = P(-w_i - \delta \sqrt{n_i} < Z < w_i - \delta \sqrt{n_i}) - k_i - \delta \sqrt{n_i} < Z < k_i - \delta \sqrt{n_i} \quad i = 1,2$$

Para el cálculo del tamaño promedio de muestra durante el periodo bajo control del proceso ( $n$ ) y el número promedio de muestras tomadas durante el estado fuera de control  $E(N')$  utilizamos las siguientes expresiones:

$$n = n_1 p_0 + n_2 (1 - p_0) \quad (12)$$

$$E(T_2) = \left[ \frac{[AATS + n'G + \delta_1 T_* + \delta_2 T_{**}]}{h'} \right] \quad (13)$$

### 2.5. Optimización

En la literatura sobre diseño económico de cartas de control se utilizan diferentes herramientas para obtener los valores óptimos de los parámetros requeridos para minimizar costos, en este caso se utiliza una optimización por medio de algoritmos genéticos.

Las ventajas de los algoritmos genéticos (AG) como método de optimización sobre otros métodos están contenidas en los artículos de Chen [22, 23], Aparisi y García [24] y Chen y Chiou [25]. En estos se explica que el algoritmo genético es más potente a la hora de estimar la solución de un problema debido a que toma muestras aleatorias de todo el espectro de posibilidades, y a partir de estas, determina los mejores escenarios para fijar la mejor solución. Por esto, a diferencia de la mayoría de programas que optimizan los modelos de forma matemática y sistemática, se ve menos afectado por los óptimos locales seleccionando un mejor óptimo global, de tal manera que se

emula el proceso evolutivo donde se busca la supervivencia del más apto.

Los algoritmos genéticos imitan los principios darwinianos de selección natural mediante la creación de un entorno en el que cientos de posibles soluciones a un problema compiten unas con otras, y sólo la “mejor adaptada” sobrevive. Como sucede en la evolución biológica, cada solución puede transmitir sus mejores “genes” a través de soluciones “descendientes” de forma que toda la población de soluciones sigue evolucionando en soluciones mejores.

En esta aplicación se considera incluir el truncamiento de los parámetros objetivos del modelo ( $h_1, h_2, w_1, w_2, k_1, k_2$ ) de acuerdo al proceso al cual se le está haciendo el control y al instrumento utilizado para medir las variables, debido a que el paquete arroja parámetros óptimos con gran cantidad de números. Así, por ejemplo, si la medición se está haciendo sobre el diámetro de una pieza y el instrumento para realizar la medición solo mide hasta 3 cifras decimales, se recomienda truncar los parámetros objetivos  $w_1, w_2, k_1, k_2$  a igual número de cifras decimales. Igualmente, se recomienda truncar el valor para los parámetros  $h_1, h_2$  de acuerdo a la capacidad del instrumento utilizado para medir el intervalo de toma de muestra.

### 3. Caso de estudio

Con el fin de validar y comparar los resultados del modelo, se utiliza el caso de estudio desarrollado por De Magalhaes et al. [16], tomado originalmente de Lorenzen and Vance [15], basado en muestras de hierro licuado tomadas de manera periódica en una línea de fundición para monitorear el contenido de silicato de carbono de la pieza para graficar la curva de enfriamiento. La curva está relacionada con el contenido de silicato de carbono dado que el contenido alto del mismo resulta en baja resistencia a la tracción.

En los parámetros de entrada se tiene que el costo de muestreo es de \$4.22 por muestra y toma aproximadamente cinco minutos en realizarse. El costo promedio de cada no conformidad es de \$100. De información estadística histórica se tiene que el proceso en estado de control produce 1.36% de no conformidades (en este estado permanece un promedio de 50 horas) y 11.3% cuando se encuentra fuera de control. Cuando el estado del proceso es fuera de control, el sistema debe ser borrado y reiniciado tomando cerca de 45 minutos con un costo de reparación de \$22.80 por hora y costo de inactividad de \$21.34 por minuto. El costo del proceso bajo control es de \$114.24 por hora y fuera de control de \$949.20 por hora. Los costos por falsas alarmas son de 977.40 por hora. De acuerdo a lo anterior los modelos fueron planteados de la siguiente forma:

#### 3.1. Diseño Económico

$$\text{Min } \frac{E(C)}{E(T)} \text{ Sujeto a}$$

$$n_1 \leq n_2 \quad 1 \leq n_1 \quad 3 \leq n_2$$

$$0.1 \leq h_2 \leq h_1 \quad 0.1 \leq w_2 \leq w_1 \quad 1 \leq k_2 \leq k_1$$

$$h_1 \leq n_2 \quad w_1 \leq k_1 \quad w_2 \leq k_2$$

Donde  $n_1, n_2 \in \mathbb{R}^+$

#### 3.2. Diseño económico- estadístico

$$\text{Min } \frac{E(C)}{E(T)} \text{ Sujeto a}$$

$$n_1 \leq n_2 \quad 1 \leq n_1 \quad 3 \leq n_2 \quad w_2 \leq k_2$$

$$0.1 \leq h_2 \leq h_1 \quad 0.1 \leq w_2 \leq w_1 \quad 1 \leq k_2 \leq k_1$$

$$h_1 \geq 1 \quad w_1 \leq k_1$$

$$AATS \leq 4 \quad 500 \leq AATS$$

Donde  $n_1, n_2 \in \mathbb{R}^+$

Como se puede notar, se ha incluido adicionalmente al ejemplo de De Magalhaes et al. [16] las restricciones  $w_1 \leq k_1$  y  $w_2 \leq k_2$ . Que evitan que al momento de buscar la solución óptima el modelo asuma probabilidades negativas como resultado de considerar, en el caso de la primera restricción, el límite superior de la región de advertencia (LAS) mayor al límite superior de control (LCS) y, en el caso de la segunda, el límite inferior de advertencia (LAI) menor que el límite inferior de control (LCI). Además, se clarifica que  $n_1$  y  $n_2$  deben ser valores enteros positivos.

Para la evaluación de los resultados se consideraron los siguientes casos:

1. Diseño económico estadístico / Parámetros Variables/ Método con Algoritmo Genético (ESD/VP/AG).
2. Diseño económico estadístico / Parámetros Variables / Método programación cuadrática secuencial (ESD/VP/PCS).
3. Diseño económico / Parámetros Variables / Método con Algoritmo Genético (ED/VP/AG).
4. Diseño económico / Parámetros Variables / Método programación cuadrática secuencial (ED/VP/PCS).

De estos, el escenario 1 y 3 corresponden al método propuesto para el modelo de diseño económico y económico-estadístico resuelto usando algoritmos genéticos, utilizando el complemento Evolver 4.0 de Excel ®. Por otro lado, los modelos 2 y 4 corresponden al económico y al económico-estadístico resuelto utilizando la programación cuadrática secuencial (PCS) utilizando Matlab ® propuesta por Magalhaes et al. [16].

Para realizar los resultados se calcularon unos indicadores que permiten estimar las diferencias de costo entre los distintos escenarios considerados y distintos corrimientos.

$$PR_1 = \frac{|(ESD/VP/PCS) - (ESD/VP/AG)|}{(ESD/VP/AG)} * 100 \quad (14)$$

$$PR_2 = \frac{|(ESD/VP/AG) - (ESD/VP/PCS)|}{(ESD/VP/PCS)} * 100 \quad (15)$$

$$PR_3 = \frac{|(ED/VP/AG) - (ESD/VP/AG)|}{(ESD/VP/AG)} * 100 \quad (16)$$

$$PR_4 = \frac{|(ED/VP/PCS) - (ED/VP/AG)|}{(ED/VP/AG)} * 100 \quad (17)$$

Al resolver el modelo se tiene que el valor del PR<sub>3</sub> indica que sacrificando algunas de las propiedades estadísticas del ATS y AATS se puede obtener una disminución del costo esperado del 6.23%, 2.92%, 1.50%, 0.8%, 0.45%, 0.05% y 0% para corrimientos en la media de 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75 y 2, respectivamente, usando el AG como medio de solución. Por lo tanto, para corrimientos grandes de la media es mejor utilizar el modelo económico estadístico que el modelo económico ya que la diferencia en costos no es significativa y el modelo estadístico provee mejor comportamiento estadístico. Por otro lado para corrimientos pequeños de la media si es necesario evaluar si es más importante la disminución de los costos versus la eliminación de las propiedades estadísticas.

Los valores de PR<sub>1</sub> y PR<sub>2</sub> resultaron en una disminución de costos esperados de 10.79%, 5.71%, 3.60%, 2.73%, 2.16%, 1.66% y 1.26% en relación a los resultados de AG y 9.74%, 5.4%, 3.48%, 2.66%, 2.11% 1.63% y 1.25% en relación al resuelto con PCS para corrimientos en la media de 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75 y 2, respectivamente. De esto se puede concluir que la solución con el algoritmo genético representa una disminución significativa de los costos en referencia a la solución con programación cuadrática secuencial.

El valor de PR<sub>4</sub> indica que las solución del modelo económico con el AG disminuye los costos esperados en un 14.21%, 7.91%, 5.08%, 3.51%, 2.62%, 1.71% y 1.27% en relación a la solución con PCS para corrimientos en la media de 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75 y 2 respectivamente.

En términos del ahorro total esperado derivado de utilizar determinado método de solución, se calculó la siguiente expresión:

$$\text{Ahorro}\% = \frac{|(\text{Modelo}_1) - (\text{Modelo}_2)|}{(\text{Modelo}_2)} * 100 \quad (18)$$

La Tabla 1 resume los ahorros obtenidos y nos permite observar las diferencias entre los distintos modelos ilustrados. Los valores negativos indican que el desempeño del modelo ubicado en la parte inferior izquierda es inferior, en el porcentaje ilustrado, en relación al modelo ubicado en la parte superior. Cabe recordar que es deseable obtener valores altos de ATS y valores pequeños de AATS, por lo tanto, aun cuando la formula arroja signos positivos para el parámetro ATS en la tabla se colocó el signo inverso para sus resultados indicando que no es conveniente para el

modelo de la izquierda tener este parámetro mayor que el modelo de la parte superior.

El modelo económico-estadístico resuelto con PCS posee un costo promedio superior en un 4.2% (en relación a el mismo) y 4.3% (en relación al AG) al modelo resuelto con el algoritmo genético. Además, tiene un comportamiento del AATS inferior en un 1.6% (en relación a el mismo) y 1.7% (en relación al AG) pero un mejor comportamiento en el desempeño del AST aumentándolo en un 19.4%(en relación a el mismo) y 24.1%(en relación al método con algoritmos genéticos).

Tabla 1.  
Diferencias de porcentual del costo por escenario

		ESD/VP/ AG	ESD/VP/ PCS	ED/VP/ AG	ED/VP/ PCS
<b>ESD/VP /AG</b>	ECTU	-	-4.2%	2.0%	-3.4%
	AST	-	19.4%	-429.5%	-8.7%
	AATS	-	-1.6%	9.8%	2.6%
<b>ESD/VP /PCS</b>	ECTU	4.3%	-	6.4%	0.8%
	AST	-24.1%	-	-557.2%	-35.0%
	AATS	1.7%	-	11.7%	4.3%
<b>ED/VP /AG</b>	ECTU	-1.9%	-6.0%	-	-5.3%
	AST	81.1%	84.8%	-	79.5%
	AATS	-9.0%	-10.4%	-	-6.6%
<b>ESD/VP /PCS</b>	ECTU	3.5%	-0.8%	5.6%	-
	AST	8.0%	25.9%	-387.0%	-
	AATS	-2.5%	-4.1%	7.1%	-

El modelo económico resuelto con el AG disminuye los costos en un 2% (en relación a el mismo) y 1.9% (en relación al modelo económico-estadístico) al modelo económico-estadístico. También, tiene un comportamiento del AATS inferior en un 9.8% (en relación a el mismo) y 9% (en relación al modelo económico-estadístico) pero un mejor comportamiento en el desempeño del AST aumentándolo en un 429.5% (en relación a el mismo) y 81.1%(en relación al modelo económico-estadístico).

Finalmente, se detectó que el algoritmo genético como método de optimización mejora significativamente los costos asociados al problema. Por otro lado, a la hora de seleccionar que diseño es más conveniente para la compañía, entre económico o económico-estadístico, se recomienda evaluar las implicaciones de no restringir el modelo y permitir que variables como las falsas alarmas intervengan con mayor frecuencia en el proceso.

#### 4. Conclusiones

Con los resultados obtenidos en la aplicación de la metodología, podemos afirmar que el uso del algoritmo genético como método de optimización permite obtener mejores resultados que la optimización utilizada en el artículo original de De Magalhaes et al. [16]. Lo anterior, gracias a que el algoritmo genético arroja parámetros que minimizan en una mayor proporción el costo de calidad

asociado al monitoreo con cartas VP. Las mayores diferencias entre los modelos se encuentran en corrimientos pequeños de la media.

En lo referente a facilitar la implementación de un modelo económico y económico-estadístico, podemos decir que se logra gracias a la utilización de un software accesible a las empresas y que puede ser fácilmente ejecutado utilizando el complemento Evolver de Excel. Por esto, ya no será necesaria la programación de algoritmos que permitan obtener los parámetros óptimos ni de programas que en muchos casos son de difícil acceso y manejo. Otra ventaja del procedimiento propuesto es que brinda información sobre como graficar las muestras en la carta de control y así disminuir los errores asociados a la complejidad de variar los parámetros de acuerdo al comportamiento del proceso.

### Agradecimientos

Este artículo fue escrito en el marco del proyecto Desarrollo de un *Modelo de Cartas de Control para Procesos Altamente Correlacionados* No.121552128846, financiado por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación Colombiano, COLCIENCIAS (contrato 651-2011) y ejecutado por la Universidad del Norte.

### Referencias

[1] Costa, A.F.B. y Rahim, M., Economic design of X charts with variable parameters: The Markov chain approach. *Journal of Applied Statistics*, 3, (1), pp. 875-885. 2001.

[2] Apley, D. y Lee, H., Design of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts for Autocorrelated Processes With Model Uncertainty. *Technometrics*, 45, (3), pp. 187-198. 2003.

[3] De Magalhaes, M.S., Costa A.F.B. y Moura- Neto, F.D. Joint economic model for totally adaptive X and R charts. *European Journal of Operational Research*, 99, pp. 236-246. 2006.

[4] Reynolds Jr., M. R., Amin, R.W., Arnold, J., y Nachlas, J.A. X charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30, pp. 181-192. 1988.

[5] Costa, A.F.B. X control chart with variable sample size. *Journal Quality of Technology*, 26, pp. 155-163. 1994.

[6] Das, T. K. y Jain, V. A Design Methodology for Random Sampling Policies for X-Bar Control Charts. *IIE Transactions on Quality and Reliability Engineering*, 29, 9. 1997.

[7] Das, T.K., Jain, V. y Gosavi A. Economic design of dual-sampling interval policies for X charts with and without run rules. *IIE Transactions*, 29, pp. 497-506. 1997.

[8] De Magalhaes, M.S., Epprecht, E.K. y Costa, A.F.B. Economic design of a VP X chart. *International Journal of Production Economics*, 74, pp. 191-200. 2001.

[9] Prabhu, S.S., Runger, G. C., y Keats, J.B. X chart with adaptive sample sizes. *International Journal of Production Research*, 31, pp. 285-290. 1993.

[10] Parkhideh, B. y Case, K. E. The economic design of a dynamic X-control chart. *IIE Transactions*, 21(4), pp. 313-323. 1989.

[11] Ohta, H. y Rahim, M. A. A Dynamic Economic Model for an X-Control Chart Design. *IIE Transactions*, 29, pp. 481-486. 1997.

[12] Prabhu, S.S., Montgomery, D.C. y Runger, G.C. A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval X Control Scheme, 26, pp. 164-176. 1994.

[13] Montgomery, D. C. The Economic Design of Control Charts: A Review and Literature. *Journal of Quality Technology*, 12, pp. 75-8. 1980.

[14] Keats, J.B, Castello, E.D, Collani, E.V. y Saniga, E.M. Economic modeling for statistical process control. *Journal of Quality Technology*, 29, 2, pp. 144. 1997.

[15] Lorenzen, T.J., y Vance, L.C. . The economic design of control charts: A unified approach, *Technometrics*, 28, pp. 3-10, 1986.

[16] De Magalhaes, M.S., Costa, A.F.B., y Epprecht, E. K. Constrained Optimization Model for the Design of an Adaptive X Chart. *International Journal of Production Research*, 40, pp. 3199 - 3218. 2002.

[17] Peña-Baena Niebles, R.P, y Sanjuán M. Diseño de un experimento para evaluar el uso de la carta EWMA con predicción en el monitoreo de procesos correlacionados. *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo*, 15, pp. 67-83, 2004

[18] Woodall, W.H. Weaknesses of the economic design of control charts. *Technometrics*, 28, pp. 408-410. 1986.

[19] Bai, D. S., y Lee, K. T. An economic design of variable sampling interval X-bar control charts. *International Journal of Production Economics*, 54, pp. 57-64. 1998.

[20] Costa, A.F.B. Joint X and R Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals. *Journal of Quality Technology*, 31, pp. 387-397. 1999.

[21] Ross, S.M. *Applied Probability Models with Optimization Applications*. Holden-Day, San Francisco. 1970.

[22] Chen, Y. K. An Evolutionary Economic-Statistical Design for VSI X Con-trol Charts Under Non-normality. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 22, pp. 602- 610. 2003.

[23] Chen, Y. K. Design of X control charts for non normal data using variable sampling policy. *International Journal of Production Economics*, 92, pp. 61-74. 2004.

[24] Aparisi, F. and García-Díaz, J. C. Economic design of EWMA control charts using regions of maximum and minimum ARL. *IIE Transactions*, 37, (11), pp. 1011-1021. 2005.

[25] Chen, Y. K., and Chiou, K. C. Design of VSI X control charts for monitoring correlated samples. *Quality and Reliability Engineering International*, 21, pp. 757-768. 2005.