Desigualdad de Neper: un caso particular

Formula general para desarrollar y demostrar algunas desigualdades clásicas.

Fernando Valdés Macías
M. Sc. Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnólogica de Pereira, Pereira, Colombia
yesithvalencia@gmail.com

***Resumen*— Una nueva forma de generar desigualdades utilizando cálculo básico, se empieza con la demostración de desigualdades básicas para luego analizar la desigualdad de Neper y presentar nuevas desigualdades.**

***Palabras clave*— Desigualdad compuesta, concavidad, convexidad, logaritmos, diferenciación.**

***Abstract*— A new formula for creating inequalities using elementary calculus; we start with Napier's inequality and we will proof new ones.**

***Key Word* —Inequalities, compound inequalities, concavity, convexity, logarithm, differential calculus.**

I. INTRODUCCIÓN

En la solución de algunos problemas de ingeniería eléctrica nos encontramos con los cálculos promedios para determinar la distancia adecuada que nos generan la reactancia inductiva o capacitiva, y estas distancias son de carácter geométrico por supuesto; pero la forma es irrelevante, es decir la disposición de los cables de transmisión pueden tener forma lineal, triangular o poligonal pero el promedio es el que cuenta siempre y cuando se realicen las transposiciones adecuadas (ésto genera otro promedio pero aritmético). Es decir si se tienen las distancias d_1, d_2, d_3 se desea saber la distancia promedio que emplearemos para calcular los parámetros de la línea de conducción, y llegamos al promedio $d = \sqrt[3]{d_1\, d_2\, d_3}$, que se denomina distancia media geométrica, ver [1]. Este promedio es el resultado de los cálculos de los flujos magnéticos y no simplemente de los promedios tomados caprichosamente; tal situación la ejemplarizamos al observar la desigualdad básica (1), ver [2] y [5]:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\, x_2 \cdots x_n}. \qquad (1)$$

Que de inmediato haría los cálculos de los parámetros imprecisos. La desigualdad (1) nos obliga a dar condiciones que pueden ser obvias para el ingeniero pero para el matemático es diferente porque tenemos las restricciones siguientes:

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R^+ \qquad (2)$$

Esto quiere decir que los conductores no pueden ser cero y que las distancias entre ellos siempre serán positivas.

Las desigualdades y los promedios tienen origen en el proceso de solución de un problema de física o pueden aparecer del contexto geométrico como el siguiente:

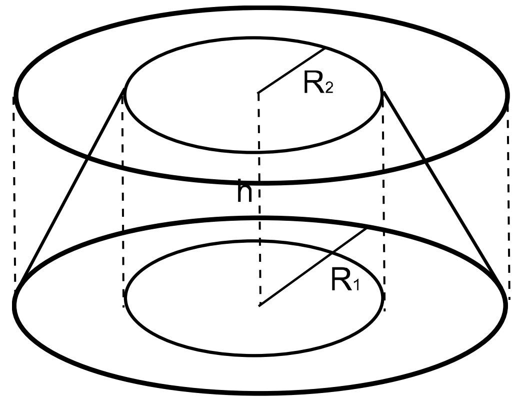

Figura 1. Promedio heroniano.

En la figura 1 el volumen del cilindro de radio $R1$ y altura h es mayor que el volumen del cono truncado que a la vez es mayor que el cilindro de radio $R2$ luego tenemos la desigualdad siguiente:

$$\pi R_1^2 h > \pi h \frac{(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)}{3} > \pi R_2^2 h.$$

(3)

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2013
Fecha de Aceptación: 20 de Noviembre de 2013

De la ecuación (3) se llega fácilmente a la desigualdad (4):

$$R_1 > \sqrt{\frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{3}} > R_2. \tag{4}$$

Surge una pregunta en relación a la desigualdad (4) y es ¿qué tipo de media o promedio corresponde al término entre R_1 y R_2? Existe una media denominada media heroniana que corresponde al matemático alejandrino Herón y que se expresa así:

$$MH = \frac{x + \sqrt{xy} + y}{3}; \tag{5}$$

ahora si $y > x > 0$ podemos escribir la desigualdad siguiente:

$$x < \frac{x + \sqrt{xy} + y}{3} < y. \tag{6}$$

La procedencia de (5) viene del cálculo del volumen de un cono o una pirámide truncada, cuya fórmula es $V = \frac{h}{3}(x + \sqrt{xy} + y)$, en donde x y y son las áreas superior e inferior de las tapas del cono. Notemos, además, que el resultado producido por (5) no es el mismo que el dado por (6) si realizamos los cálculos respectivos.

Dentro de los promedios interesantes tenemos el caso de la media armónica que tiene su razón si la mayoría de valores son cercanos entre sí pero existen unos, muy pocos, que son grandes o valores atípicos, pero con esta media obtenemos resultados que tienden a ser típicos, veamos el caso de la media armónica comparada con la media aritmética de manera binaria [7]:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x\,y} \geq \frac{2x\,y}{x+y}. \tag{7}$$

Una demostración geométrica de esta desigualdad compuesta es la que se presenta a continuación en la figura 2:

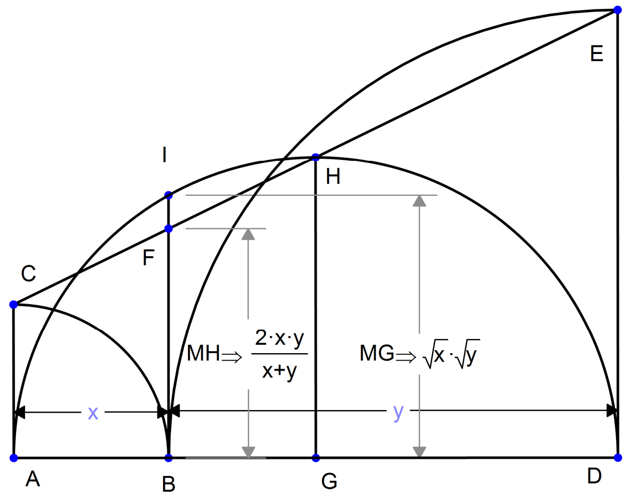

Figura 2. Demostración desigualdades.

En la figura 2 el segmento $\overline{AB} = \overline{AC} = x$, el segmento $\overline{BD} = \overline{DE} = y$; con estos segmentos se generan cuartos de circunferencias o arcos de circunferencia como $\widehat{CB}$ y $\widehat{EB}$; el punto G corresponde al punto medio del segmento $\overline{AD}$, luego el segmento $\overline{GH}$ corresponde a la media aritmética; el punto B es en donde confluyen y son tangentes las circunferencias de centro A y D, el segmento $\overline{BF}$ corresponde a la media armónica (MD), ahora la circunferencia de centro G define para los segmentos x, y la media geométrica (MG) entre estos y corresponde al segmento $\overline{BI}$, se observa de la figura 2 que la media geométrica se encuentra entre la media armónica y la media aritmética. En los estudios de fotografía satelital, para efectos de resolución en píxeles se obtiene mejor fotografía con promedios aritméticos, ver [3]

Existe la raíz media cuadrática, denominada valor rms, que se aproxima al promedio de (4) pero su origen viene de la manera como se calcula la potencia eléctrica promedio cuando la onda es variable discreta o de manera continua, su expresión para valores discretos es el siguiente:

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}. \tag{8}$$

Y para valores continuos, en el intervalo (a, b), con la función continua $f(x)$ tenemos la expresión:

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2\,dt}. \tag{9}$$

La media expresada en (8) se denomina, a veces, como la media de Hölder, y para el caso particular de dos números tenemos la expresión:

$$X = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}. \qquad (10)$$

Y entonces podemos comparar (10) con (4), esta comparación nos lleva a la expresión:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}}. \qquad (11)$$

La media Hölder generalizada se describe con la siguiente ecuación:

$$X_n = \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}. \qquad (12)$$

La idea, en esta introducción, es por lo tanto presentar que estos promedios nacen de problemas concretos y que podemos encontrar formas geométricas o analíticas de comparar estos promedios o medias matemáticas.

Ahora supongamos que se tienen dos variables, positivas x, y, además $x \neq y$ entonces se define la media logarítmica como:

$$ML(x,y) = \frac{x - y}{\ln x - \ln y} = \int_0^1 x^t y^{1-t} dt \qquad (13)$$

Pero es importante observar si una de las variables tiende a la otra se puede escribir que:

$$ML(x,x) = \lim_{y \to x} ML(x,y) = x \qquad (14)$$

La media logarítmica se encuentra entre la media aritmética y la media geométrica [4]:

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y} \qquad (15)$$

La media logarítmica es muy importante en los cálculos de conducción de calor en el flujo de líquidos en las tuberías [4].

La desigualdad estricta de Neper se expresa de la forma siguiente [6], si se tiene que $y > x > 0$:

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x} \qquad (16)$$

Ahora vamos a realizar la demostración de (16) que nos llevará a mostrar otras desigualdades; observemos la figura 3 en donde se tiene la función logarítmica natural sencilla, en los puntos A y B se han trazado dos tangentes:

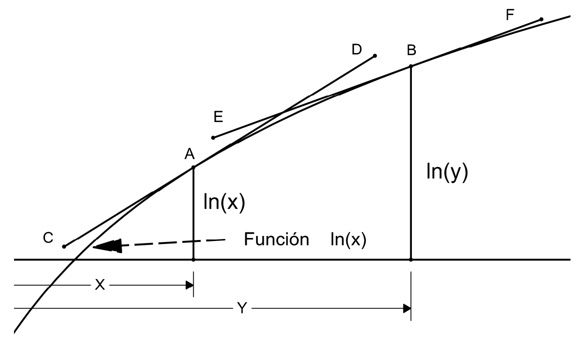

Figura 3. Demostración desigualdad de Neper.

La tangente CD en el punto A, y la tangente EF en el punto B. la pendiente del segmento AB se expresa con la ecuación siguiente:

$$P_{AB} = \frac{\ln y - \ln x}{y - x} \qquad (17)$$

Ahora se observa que en el punto A se tiene una tangente que corresponde a la pendiente de la curva en A y de manera similar sucede con el punto B. Luego la pendiente en A y en B se pueden escribir así:

$$P_A = \frac{1}{x}; \quad P_B = \frac{1}{y} \qquad (18)$$

Ahora notamos que la pendiente en A es mayor que la pendiente en B, pero la pendiente del segmento AB se encuentra entre estos dos valores, de manera gráfica podemos decir que queda demostrada la desigualdad de Neper ya que la función logaritmo es monótona y su concavidad es hacia abajo. De este ejemplo se llega a la siguiente forma de realizar o crear desigualdades aplicando la desigualdad (18):

$$\begin{cases} f'(a) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > f'(b) & \text{si } f''(x) < 0 \wedge a < b; \\ f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b) & \text{si } f''(x) > 0 \wedge a < b. \end{cases} \qquad (19)$$

Si exigimos que en el intervalo $[a, b]$ la función $f(x)$, diferenciable en (a, b) es monótona. Veamos el siguiente caso en donde queremos demostrar la desigualdad:

$$xe^x + 1 \geq e^x \qquad (20)$$

Luego la función que utilizaremos es $f(x) = e^x$ y si tenemos un intervalo $[a, b]$, además es claro que $e^a \leq e^b$, y $f''(x) > 0$; entonces si aplicamos (18) obtenemos:

$$e^b > \frac{e^b - e^a}{b - a} > e^a \qquad (21)$$

Ahora procedemos a realizar transformaciones algebraicas que nos conducirán a desigualdades clásicas:

$$\frac{e^b}{e^a} > \frac{e^b/e^a - 1}{b-a} > 1$$
$$e^{b-a} > \frac{e^{b-a}-1}{b-a} > 1$$

Si hacemos que $b-a=x$:

$$e^x > \frac{e^x-1}{x} > 1$$

Se obtienen, entonces, dos desigualdades, muy conocidas, como $e^x \geq x+1$ y la otra es $xe^x+1 \geq e^x$.

En relación con las ecuaciones en (19) cuando hablamos de concavidad nos referimos a la concavidad hacia abajo y podemos decir simplemente curva cóncava en el intervalo, por ejemplo $[x;y]$, si la concavidad es hacia arriba se denomina curva convexa [8]; entonces si tenemos una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se dice que es cóncava en un intervalo $[x;y]$, si para cualquier t en $[0;1]$ tenemos que:

$$f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y) \quad (22)$$

O también estrictamente cóncava si utilizamos el símbolo $>$.

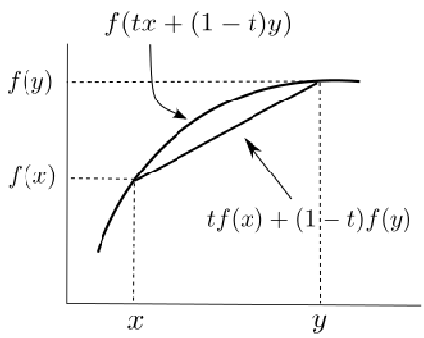

Figura 4. Definición de concavidad.

Observemos la figura 4, en ella vemos que la función, de manera parametrizada, se encuentra por encima del segmento $tf(x)+(1-t)f(y)$:

Ahora supongamos que vamos a averiguar el origen de la desigualdad siguiente:

$$\sqrt{1-k^2} \leq \frac{k}{\sin^{-1}(k)} \quad \text{si } 0 \leq k \leq 1 \quad (23)$$

Para demostrar y buscar el origen de esta desigualdad vamos a detallar la función $f(x)=\sin^{-1}(x)$ en el intervalo $[a;b]$, luego aplicando (19) y observando que esta función es convexa en el intervalo $[-1;0]$, y cóncava en $[0;1]$ donde tomaremos la presente situación luego tendríamos que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \geq \frac{\sin^{-1}(b)-\sin^{-1}(a)}{b-a} \geq \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \quad (24)$$

Veamos la gráfica de la función en la figura 5:

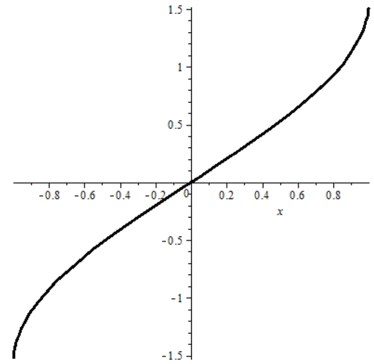

Figura 4. Definición de concavidad.

Si definimos que $a=0$, y que $b>a$, se concluye de (24) que:

$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \geq \frac{\sin^{-1}(b)}{b}$, ahora si $b=k$ llegamos a la expresión (23): $\sqrt{1-k^2} \leq \frac{k}{\sin^{-1}(k)}$.

Ahora supongamos que nos piden que analicemos la siguiente desigualdad que incluye un parámetro $t \geq 0$ así:

$$t+tx-x^2 \leq te^x \quad (25)$$

Para la expresión (25) utilizaremos la función $f(x)=xe^x$, si aplicamos (19) en un intervalo $[a;b]$, y además podemos ver, con derivadas, que la función es convexa a partir de -1, obtenemos:

$$e^a+ae^a < \frac{be^b-ae^a}{b-a} \quad (26)$$

Si dividimos (26) por e^a llegamos a:

$1+a < \frac{be^{b-a}-a}{b-a}$ y si hacemos $b-a=x$ se consigue la expresión $x+ax < be^x-a$, cuando $b=t$, y $a=b-x$ concluiremos entonces la ecuación (25): $t+tx-x^2 < te^x$.

Para terminar la parte de los ejemplos vamos a demostrar una desigualdad clásica e importante:

$$e^x \geq \left(1+\frac{x}{k}\right)^k \quad (27)$$

Para analizar la desigualdad (27) acudiremos a la función $f(x)=\ln(1+x)$, esta función es cóncava, entonces aplicando las relaciones que tenemos en (19) y empleando un intervalo $[a;b]$, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{1+b} > \frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a} > \frac{1}{1+a} \qquad (28)$$

Si de (28) tomamos la primera desigualdad se consigue que $\frac{b-a}{1+b} > \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)$ ahora tomemos nuevamente $b-a=x$ luego ahora se tiene:

$$\frac{x}{1+b} > \ln\left(\frac{1+b}{1+b-x}\right) = -\ln\left(\frac{1+b-x}{1+b}\right) \qquad (29)$$

$$\frac{x}{1+b} > -\ln\left(1+\frac{x}{-(1+b)}\right) \qquad (30)$$

Si decimos que $-(1+b)=k$ entonces (30) se transforma en:

$$x > \ln\left[\left(1+\frac{x}{-(1+b)}\right)^{-(1+b)}\right] = \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)^{k}$$

(31)

De inmediato tenemos que (31) es equivalente a:

$$e^{x} > \left(1+\frac{x}{k}\right)^{k} \qquad \blacksquare$$

CONCLUSIONES

Las desigualdades y promedios son muy importantes dentro de la ingeniería aplicada pero a la vez son los problemas de física y matemáticas que generan nuevas aproximaciones a los promedios y a las desigualdades, se presentó una manera para demostrar desigualdades y así como también cómo generar y demostrar nuevas desigualdades que pueden ser útiles en la solución de problemas.

REFERENCIAS

[1] Olle I. Elgerd, *Electric Energy Systems Theory,* New Delhi, 1976, p 169.

[2] Nicholas D. Kazarinoff, "Analytic Inequalities" 1961, Library of Congress, catalog number 61-6544 24841-0110,USA.

[3] Guillaume Quin. Et al, EUSAR, Comparison of Harmonic, Geometric and Arithmetic Means for Change Detection in SAR Time Series, 9th European Conference on Synthetic Radar (2012.). Germany.

[4] Bathia, Rajendra, *The logarithmic Mean*, Resonance. June 2008, pp 594, volume 13, Issue 6, Springer.

[5] Kazarinoff, Nicholas, "Geometry Inequalities”, First ed., Yale University, Library of Congress Catalog Number 61-6229.

[6] Claudi Alsina & Roger Nelsen, When Less is More. Mathematical Association of America (MAA), 2009, ISBN 978-0-88385-342-9, Library of Congress Number 2008942145. USA

[7] Valdez, Rogelio, et al. Inequalities, A mathematical Olympiad Approach. Birkhäuser, ISBN 978-3-30346-0049-1.

[8] Apostol, Tom M, Calculus. Volume I, One variable Calculus. Second Edition 1967, ISBN 04710005.