SOLUCIONES PERIÓDICAS DE LA ECUACIÓN DEL PÉNDULO FORZADO CON FRICCIÓN POR MÉTODOS TOPOLÓGICOS

Periodic solutions of forced pendulum equation with friction by topological methods

RESUMEN

En el presente artículo se analiza la ecuación del péndulo forzado con fricción con condiciones de Dirichlet. Para dar solución al problema, se define un operador en un espacio adecuado de manera tal que las condiciones del teorema de punto fijo de Schauder se cumplan, garantizando así la existencia de solución. Posteriormente se aplica el método de super y sub soluciones para determinar en donde se encuentra la solución de la ecuación.

PALABRAS CLAVES: Problema de Dirichlet, método de super y sub soluciones, péndulo forzado, métodos topológicos.

ABSTRACT

in this paper we analyze the forced pendulum equation with friction with Dirichlet conditions. For resolving the problem, define an operator on a suitable space so that the conditions of fixed-point theorem of Schauder are met, thereby ensuring the existence of solution. Then applied the method of super and sub solutions to determine where lies the solution of the equation.

KEYWORDS: Dirichlet problem, method of upper and lower solutions, forced pendulum, topological methods.

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Profesor Asistente - Departamento de Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co
www.ppablo.com

TIBERIO TREJOS ARICAPA
Licenciado en Matemáticas y Física.
Magister en Enseñanza de la Matemática.
Profesor T.C. Universidad Libre de Pereira.
titrejos@utp.edu.co

FERNANDO MESA
Licenciado en Matemáticas y Física.
M.Sc. Instrumentación Física.
Profesor Titular. Universidad Tecnológica de Pereira.
femesa@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Se quiere resolver el problema

$$u'' = f(t,u,u') \tag{1.1}$$

el cual representa el problema del péndulo forzado con fricción con condiciones de Dirichlet.

Para solucionar esta ecuación, se definirá un operador en un espacio adecuado de tal forma que se cumplan las condiciones del teorema de punto fijo de Schauder garantizando así que existe solución y posteriormente se aplicará el método de super y sub-soluciones para determinar en donde se encuentra la solución de la ecuación. El desarrollo para el caso del péndulo forzado con fricción es similar a cuando no se tiene fricción, para el primer caso es necesario hacer acotaciones de la derivada para que el método de super y sub-soluciones pueda ser aplicado de manera correcta.

2. METODO DE SUPER Y SUB-SOLUCIONES

Considérese el problema

$$\begin{cases} u'' = f(t,u(t)) \\ u(0) = u_0, \ u(1) = u_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

en donde f es una función continua y acotada.

Definición 2.1. Una función $\alpha \in C([0,1])$ es una sub-solucion del problema (2.1) si:

1. $\alpha''(t) \geq f\big(t,\alpha(t)\big)$
2. $\alpha(0) \leq u_0, \ \alpha(1) \leq u_1$

Una función $\beta \in C([0,1])$ es una super-solución del problema (2.1) si:

1. $\beta''(t) \leq f(t,\beta(t))$
2. $\beta(0) \geq u_0, \ \beta(1) \geq u_1$

3. SOLUCIONES PERIODICAS DE LA ECUACION DEL PENDULO

Fecha de Recepción: Enero 26 de 2010
Fecha de Aceptación: Marzo 25 de 2010

Se aplicara a continuación el método de super y sub-soluciones para demostrar un teorema de existencia de soluciones T-periódicas para la ecuación del péndulo forzado con fricción:

$$u'' + au' + \sin u = p(t) \qquad (3.1)$$

Supóngase que p es una función continua.

Si $a = 0$, entonces el problema tiene solución cuando $\bar{p} = 0$, donde $\bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$. Además, si $\bar{p}$ es muy grande, el problema no tiene solución. Integrando la ecuación, por la periocidad de *u* debe cumplirse que

$$\int_0^T \sin u(t)dt = \int_0^T p(t)dt$$

de donde se concluye que $|\bar{p}| \leq 1$.

Estas observaciones motivan a escribir cualquier función p en la forma $p = p_0 + c$, en donde $\overline{p_0} = 0$ y la constante c es el promedio de p; de esta forma el problema que se abordará es:

$$u'' + au' + \sin u = p_0(t) + c \qquad (3.2)$$

Empleando el teorema de Schauder y el método de super y sub-soluciones se probará el siguiente resultado:

Teorema 3.1. Sea p_0 una función continua tal que $\overline{p_0} = 0$. Entonces existen números $d(p_0)$ y $D(p_0)$, con $-1 \leq d(p_0) \leq D(p_0) \leq 1$ tales que (3.2) tiene al menos unas solución T-periodica si y solo si $c \in [d(p_0), D(p_0)]$.

Demostración.

Sea

$$I(p_0) = \{c \in \mathbb{R}: \ (3.2)\ tiene\ alguna\ solución\ T - periódica\}$$

En primer lugar $I(p_0)$ es un intervalo: si $c_1, c_2 \in I(p_0)$ son tales que $c_1 < c_2$, se toma $u_1\, y\, u_2$ respectivas soluciones para c_1 y c_2. Entonces para $c \in [c_1, c_2]$ se tiene que

$$\begin{aligned} u''_1 + au'_1 + sen\,(u_1) &\leq p_0 + c \\ &\leq u''_2 + au'_2 + sen\,(u_2) \end{aligned}$$

de donde $u_1\, y\, u_2$ son respectivamente una super y sub-solución del problema.

El detalle acá es que $u_1\, y\, u_2$ no están necesariamente ordenadas; sin embargo, por la periocidad del problema es claro que se puede reemplazar a u_1 por $u_1 + 2k\pi$ en donde $k \in \mathbb{Z}$ es suficientemente grande para que valga $u_1 \geq u_2$.

Empleando el teorema de Schauder, puede verse ahora que $I(p_0)$ es no vacío y compacto. Para ello obsérvese nuevamente que si *u* es una solución T-periódica de (3.2), entonces c tiene que ser igual al promedio de la función $sen\, u(t)$. Esto motiva a pensar en el siguiente problema integro-diferencial.

$$\begin{cases} u'' + au' + sen\, u = p_0(t) + c(u) \\ \qquad u(0) = u(T) = r \end{cases} \qquad (3.3)$$

en donde *c(u)* es una función acotada definida por

$$c(u) = \frac{1}{T}\int_0^T sen\, u(t)dt$$

El teorema de Schauder garantiza que existe al menos una solución *u* de (3.3); integrando se obtiene que

$$\int_0^T (u'' + au' + sen\, u)dt = \int_0^T c(u)dt = Tc(u)$$

Por definición de *c(u)* y por ser *u(T)=u(0)* se deduce que

$$u'(T) - u'(0) = \int_0^T u''(t)\, dt = 0,$$

es decir, es T-periódica.

Luego se tiene,

$$I(p_0) = \{c(u):\ u\ es\ una\ solución\ de\ (3.3)\}$$

para algún *r*.

En donde puede verse que $I(p_0)$ es no vacio. Más aun, si u es solución de (3.3) para algún r , entonces $u + 2\pi$ es solución para $r + 2\pi$ y vale $c(u) = c(u + 2\pi)$. Luego,

$$I(p_0) = \{c(u):\ u\ \ es\ solución\ de\ (3.3)\}$$

para algún $r \in [0,2\pi]$.

Para ver la compacidad, supóngase que u_n es solución de (3.3) para algún $r_n \in [0,2\pi]$. Por medio de estimaciones a priori existe una constante C tal que

$$\|u_r - r_n\|_\infty \leq C\|u''_n + au'_n\|_{L^2}$$

$$\|u'_n\|_\infty \leq C\|u''_n + au'_n\|_{L^2}$$

Pero $u''_n + au'_n$ está claramente acotada; en consecuencia, el teorema de Arzelá-Ascoli dice que existe una subsucesión $\{u_{nj}\}$ que converge uniformemente a cierta *u*. Es claro además que $c(u_{nj}) \rightarrow$

$c(u)$. Por otra parte, también la sucesión $\{u''_{nj}\}$ está acotada para la norma infinito y nuevamente el teorema Arzelá-Ascoli dice que existe una subsucesión $\{u_{n_{jk}}\}$ tal que $\{u'_{n_{jk}}\}$ converge uniformemente a cierta función continua v. escribiendo

$$u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t u'_n(s)\, ds$$

puede verse que

$$u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t v(s)\, ds$$

de donde se deduce que u es de clase C^1 y $u' = v$. Finalmente a partir de la ecuación

$$u''_n + au'_n + sen\, u_n = p_0 + c(u_n)$$

Se ve que $u''_{n_{jk}}$ converge uniformemente a cierta función w, y escribiendo ahora

$$u'_n(t) = u'_n(0) + \int_0^t u''_n(s)\, ds$$

Se deduce que u es de clase C^2 y resulta se solución del problema (3.3). Esto prueba que $I(p_0)$ es compacto.

Observación 3.1. Si $a = 0$ se tiene que $d(p_0) \leq 0 \leq D(p_0)$. Para el caso general, el teorema dice en primer lugar que el conjunto de valores de c para los cuales hay solución es no vacio. Sin embargo, aún si a=0, no se sabe si existe alguna función p_0 para la cual $d(p_0) = D(p_0)$ (para un caso así, el problema se dice singular). El conjunto de funciones para las que vale $d(p_0) < D(p_0)$ es abierto y denso en $L^2(0,T)$. Obsérvese que condiciones concretas sobre p_0 que garantizan que el intervalo no se reduce a un punto. Por ejemplo, si

$$\|\boldsymbol{p_0}\|_\infty < 1$$

En tal caso $\|p_0 + c\|_\infty \leq 1$ para algún c en algún entorno de 0, y tomando $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{3\pi}{2}$ resulta:

$$\alpha'' + a\alpha' + sen\, \alpha = 1 \geq p_0 + c$$

$$\alpha'' + a\alpha' + sen\, \alpha = 1 \geq p_0 + c$$

El método de super y sub-soluciones garantiza que el problema tiene al menos una solución entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

4. CONCLUSIONES

En este articulo se utilizaron técnics propias del analsisi no lineal de las cuales aplicando el teorema de Schauder y el método de super y sub-soluciones se logro demostrar la existencia de soluciones periódicas para la ecuación del péndulo forzado con fricción bajo condiciones de Dirichlet.

Es importante aclarar que las soluciones encontradas son cualitativas y que podrían permitir aplicar algunos métodos numéricos para obtener una aproximación a la solución analítica, ya que se conoce en donde puede encontrarse dicha solución.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) para la realización de este artículo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004

[2] AMSTER, P.G. Resolution of Semilinear Equations by Fixed Point Methods. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.

[3] AMSTER, P, Pinnau, R., Large Convergent Iterative Schemes for a Nonisentropic Hydrodynamic Model for Semiconductors. ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) Vol 82-8 (2002) 559-566.

[4] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.

[5] TREJOS A, T. Soluciones periódicas de la ecuación del pendulo forzado con fricción por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira. (2009).