# PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS EN LA FRONTERA DE LA TEORÍA DE PLASTICIDAD EN VELOCIDADES. CRITERIO DE UNICIDAD.

Approach to boundary problems of the theory of plasticity in rates. Uniqueness criterion.

**RESUMEN**

En este trabajo se determina la condición sobre un funcional, que permite hallar el parámetro critico temporal y la forma de pérdida de estabilidad.

**PALABRAS CLAVES:** *Deformación, estabilidad, Kirchhoff , Piola.*

**ABSTRACT**

*In this work the condition to determinate the critical temporal parameter and the form of loss stability are obtained .*

**KEYWORDS:** *Deformation, stability, Kirchhoff, Piola.*

**JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA**
Matemático, Ph.D.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

**CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS**
Ingeniero Civil, M.Sc
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

## 1. Introducción

El inconveniente en la solución de problemas de estabilidad radica además de la geometría no-lineal, de igual manera en la falta de información en la configuración actual. A diferencia de los problemas con geometría no-lineal no se puede considerar la configuración actual como la inicial, ya que llevaría a resultados erróneos.

Como se ha demostrado en [6] en los problemas no-lineales con frecuencia se utilizan las condiciones en la frontera dadas en términos de sus velocidades al igual que la ecuación de estabilidad, las relaciones constitutivas y demás relaciones que se utilicen en el planteamiento del problema.

## 2. Planteamiento del problema

Sea un cuerpo arbitrario elastico-plástico que ocupa un la región $V_o$ en la configuración inicial y cuya frontera es $S_o$.

Supongamos que en la parte de la frontera $S_t$ es dado el vector de fuerzas $P = P_i g^j = P^i g_j$, y en la otra parte de la frontera $S_u$, el desplazamiento de los puntos de la frontera $u = u_i g^j = u^i g_j$ es dado.

Es necesario determinar en el punto $t$ la condición de deformación del cuerpo arbitrario analizado.

Fecha de Recepción: 17 de junio de 2010
Fecha de Aceptación: 13 de Agosto de 2010

### 3. Análisis del problema

Las ecuaciones de estabilidad en términos de sus velocidades y las correspondientes condiciones en la frontera es conveniente formularlas en términos del primer tensor de Kirchoff-Piola, el cual tiene el aspecto

$$\frac{\partial \dot{\Pi}^{ij}}{\partial x_j} = 0 . \qquad (1)$$

De manera análoga se escriben las condiciones en la frontera en términos de sus velocidades

$$N_i \dot{\Pi}^{ij} = \dot{P}_o^{\,j} \text{, en } S_t \qquad (2)$$

$$\dot{u}^j = \dot{u}_o^j \text{, en } S_u \qquad (3)$$

donde $N = N_i\, g^i = N^i\, g_i$ es la normal exterior a la superficie en la configuración inicial.

Las relaciones constitutivas se formulan en términos de la derivada de Jauman del tensor de tensiones de Kirchoff. En general las relaciones constitutivas diferenciales no-lineales se formulan de la forma

$$\overset{\nabla}{\tau}{}^{ij} = L^{ijpq} \dot{\eta}_{pq} . \qquad (4)$$

Para la formulación de la solución general o el correspondiente principio variacional es necesario que las ecuaciones de estabilidad, las condiciones iniciales y las relaciones constitutivas escribirlas en términos de un solo tensor de tensiones ver [1].

El problema antes formulado puede no tener solución única [9,46]. Supongamos que existe un $t_c$, tal que el problema (1)-(6) posee solución única, cuando $t < t_c$, donde $t$ es un parámetro monótonamente creciente, que caracteriza el proceso de la carga del cuerpo. Llamemos a esta solución la general y la designemos con el índice "$a$".

Supongamos que en el momento $t = t_c$ junto con la solución general $\dot{u}_a$ del problema (1)-(4) existe por lo menos otra solución $\dot{u}_b$.

Analicemos las siguientes relaciones relaciones $\Delta v = \dot{u}_a - \dot{u}_b$,

$\Delta \Pi = \dot{\Pi}_a - \dot{\Pi}_b$, etc.

Utilizando las transformaciones dadas en [9] se llega a la siguiente condición de unicidad :

$$I_\sigma(\dot{u}_a, \dot{u}_b) = \int_{V_o} \Delta \Pi^{ij} \Delta v_{j,i} dV > 0 \qquad (5)$$

Utilizando [1] y (5) se tiene

$$I_\sigma(\dot{u}_a, \dot{u}_b) = \int_{V_o} \Delta \overset{\nabla}{\tau}{}^{ij} \Delta \eta_{ij} dV -$$
$$\int_{V_o} \left( G^{jk} \tau_a^{il} \Delta \eta_{kl} + G^{ik} \tau_a^{jl} \Delta \eta_{kl} \right) \Delta \eta_{ij}\, dV +$$
$$\int_{V_o} \tau_a^{ij} \Delta v_{,i}^k \Delta v_{k,j}\, dV > 0. \qquad (6)$$

o en forma más compacta

$$I_\sigma = \int_{V_o} \Delta \overset{\nabla}{\tau}{}^{ij} \Delta \eta_{ij} dV - \int_{V_o} R^{ijkl} \Delta \dot{u}_{i,j} \Delta \dot{u}_{k,l} dV > 0 , \qquad (7)$$

donde las componentes de la matriz $R^{ijkl}$ se pueden escribir de la siguiente manera

$$R^{ijkl} = \left( G^{ad} \tau^{bc} + G^{ac} \tau^{bd} \right) \left( \delta_i^a \delta_j^b + \delta_j^a \delta_i^b + u_{,a}^i \delta_j^b + u_{,b}^i \delta_j^a \right) \times$$
$$\left( \delta_i^c \delta_j^d + \delta_j^c \delta_i^d + u_{,c}^i \delta_j^d + u_{,d}^i \delta_j^c \right) + \tau^{jl} g^{ik} \qquad (8)$$

Es de tener en cuenta que debido a la no linealidad de las relaciones constitutivas de la teoría de plasticidad que tienen en cuenta la microdeformación, la función $\Delta W = \overset{\nabla}{\tau}{}^{ij} \Delta \eta_{ij}$ depende de dos campos de velocidades, y debido a esto el funcional $I_\sigma(\dot{u}_a, \dot{u}_b)$ no es cuadrático.

Éste hecho restringe la utilización de la condición (6) o (7) para analizar la bifurcación del proceso de deformación. A pesar de esto para un gran número de variantes de la teoría de plasticidad se puede reemplazar la ecuación (7) por una condición más fuerte, la cual se basa en la linearización [9], "cuerpo de comparación".

El cuerpo de comparación posee las mismas propiedades que la ecuación del estado lineal en sus velocidades y se construye de tal forma que para cualquier $\dot{\eta}^a$ y $\dot{\eta}^b$ tenga lugar la siguiente relación

$$\Delta W \geq \Delta \mathrm{W_L} \equiv D^{ijpq} \Delta\eta_{ij}\Delta\eta_{pq} . \qquad (9)$$

Para evaluar la matriz $D^{ijpq}$ es necesario utilizar las fórmulas dadas [1] e integrar en la región $\Omega_o$. Siendo $\Omega_o$ la dirección de la deformación activa microplástica en el momento en que ocurre la bifurcación.

En este caso de manera fácil se muestra que la unicidad se obtiene si al linearizar el cuerpo de comparación es estable en el sentido de Euler, es decir si tiene lugar la siguiente igualdad

$$H(\Delta v) \equiv \int_{\mathrm{V_o}} D^{ijpq}\Delta\dot{\eta}_{ij}\Delta\dot{\eta}_{ipq}dV - \int_{\mathrm{V_o}} R^{ijkl}\Delta\dot{u}_{i,j}\Delta\dot{u}_{k,l}dV > 0 . \qquad (10)$$

De esta forma el problema de encontrar los puntos de bifurcación del proceso de deformación y la forma propia de pérdida de estabilidad conlleva a determinar los valores y funciones propias del problema de valor inicial para el sistema de ecuaciones

$$\Delta\dot{\Pi}^{ij}_{,j} = 0 ,$$

$$\Delta\dot{\eta}^{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{k,i}\dot{u}^k_j + \dot{u}_{k,j}\dot{u}^k_i\right), \qquad (11)$$

$$\Delta \overset{\nabla}{\tau}{}^{ij} = D^{ijpq}\Delta\eta_{pq} . \qquad (12)$$

Teniendo en cuenta las siguientes condiciones en la frontera

$$N_i\dot{\Pi}^{ij} = 0 \text{ en } S_t \qquad (13)$$

$$\Delta v_j = 0 \text{ en } S_u \qquad (14)$$

Utilizando los resultados obtenidos se demuestra que la condición estacionaria del funcional $H(\Delta v)$ está dado en (10)-(13).

De esta forma para determinar el parámetro crítico temporal $t_c$ y la forma propia de perdida de estabilidad se $\tilde{v}$ utiliza la siguiente condición:

$$\delta H = 0 . \qquad (15)$$

## 4. Conclusión

Para determinar la bifurcación del proceso de deformación se puede utilizar sistema (11)-(14) o el principio variacional (15)

## 5. Bibliografía


1. *Gonzalez J.R.* Stability and Postbifurcation Behavior of Shells under Combined Loading. GAMM2001. Zurich, 2001. P. 44.
2. *Grigoluk E.I. Estabilidad de envolturas no-homogeneas.* .Dokl. A.C URSS. -1958.-119, №.4.-Pp. 663-666.
3. *Ilushin A.A. Plasticidad.* M., 1948. 876 p.
4. Kadashevish Yu. A., Novozhilov V.V. Chernyakov. Yu.A. *Teoria de plasticidad y eleasticidad utilizando la microdeformacion* // PMM. 1986. T.50, №6. p.890-897.
5. *Lure A.I. Teoria de elasticidad no lineal*. M.: Nauka, 1980. 512 p.
6. Novozhilov V.V., Kadashevish Yu. A., Chernyakov. Yu.A. Teria general de plasticidad que tiene en cuenta la microdeformación. Dokl. AN USSR. 1985. T. 284, T.4. P.821-823.
7. *Vavakin A.S., Vasin R.A. El comportamiento elástico-plástico del acero ST 45en trayectorias en forma de elice* de deformación. Plasticidad y destrucción de cuerpos duros. M 1988. P.21-29.
8. *Zelenskiy A.G., Shvayko N. Yu.* Influencia de la historia de carga en la bifurcación del proceso de deformación de envolturas cilindricas. Dokl. A.C URSS. Ser.A. 1978. T 1. Pp. 38-43.

9. *Sachenko A. V.* Sobre la estabilidad de envolturas después de la parte elástica //Izd. Kazan. Fil. AN USSSR. Ser. Fiz-mat. I Tech Nauk.-1956.-№ 10.-P.81-100.