

## APLICACIÓN DEL TEOREMA DE LERAY - SCHAUDER A UN PROBLEMA DE CONTORNO

### Application of Leray – Schauder’s theorem a boundary problem

#### RESUMEN

En el presente artículo se muestra una aplicación de existencia de solución para un problema de contorno usando el teorema de Leray-Schauder. Bajo condiciones apropiadas, se prueba la existencia y unicidad de un problema no lineal de segundo orden.

**PALABRAS CLAVES:** Contorno, punto fijo, Leray- Schauder.

#### ABSTRACT

This article it show an application of the existence of solution for a boundary problem using the Leray-Schauder theorem. Under proper conditions, we prove the existence and uniqueness for a non-linear second order.

**KEYWORDS:** Boundary, fixed point, Leray-Schauder.

#### PEDRO PABLO CÁRDENAS A.

Licenciado en Matemáticas y Computación.

Magíster en Enseñanza de la Matemática.

Profesor Departamento de Matemáticas.

Universidad Tecnológica de Pereira  
ppablo@utp.edu.co

#### JHON JAIRÓ LEÓN S.

Licenciado en Matemáticas y Computación.

Magíster en Enseñanza de la Matemática.

Profesor Departamento de Matemáticas.

Universidad Tecnológica de Pereira  
leonj@utp.edu.co

#### FERNANDO MESA

Licenciado en Matemáticas y Física.

Magister en Instrumentación Física.

Profesor Departamento de Matemáticas.

Universidad Tecnológica de Pereira  
femesa@utp.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones importantes del teorema de punto fijo de Leray-Schauder es la de resolver problemas de contorno no lineales de segundo orden y orden superior.

Se mostrara en este trabajo que el problema

$$\begin{cases} u'' + g(t, u) = 0 \\ u(0) = u_0, u(T) = u_T \end{cases}$$

bajo ciertas condiciones tendrá solución única en cierto espacio.

## 2. TEOREMA DE LERAY - SCHAUDER

**Teorema 2.1** (Leray-Schauder). Sea  $E$  un espacio de Banach y sea  $T: E \times [0, 1] \rightarrow E$  una aplicación compacta tal que  $T(x, 0) = 0, \forall x \in E$ . Si  $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in E$  que

verifique  $T(x, \alpha) = x$  para algún  $\alpha \in [0, 1]$  se tiene que  $\|x\| < M$ , entonces  $\exists x \in E$  tal que  $T(x, 1) = x$ .

Para ver los detalles de la demostración de este teorema, se invita al lector ver [1].

Es importante recordar que el teorema de punto fijo de Schauder es la generalización del teorema de punto fijo de Brouwer en dimensión infinita; por ello se recuerda dicho teorema importante de la topología. Recordemos entonces dicho teorema:

**Teorema 2.1. (Brouwer).** Considérese  $H$  Hilbert de dimensión finita,  $C \subset H$  un conjunto compacto, convexo no vacío. Si  $f: C \rightarrow C$  es una función continua, entonces tiene un punto fijo. [1]

**Teorema 2.2. (Schauder).** Sea  $C$  un subconjunto convexo y compacto en  $E$ , espacio de Banach. Si  $T: C \rightarrow C$  es continuo, entonces  $T$  tiene un punto fijo. [1]

Ahora, se hace mención de un corolario del teorema de Leray-Schauder que será de gran importancia para lo que se pretende hacer.

**Corolario 2.1.** Sean  $E$  un espacio de Banach y  $K: E \rightarrow E$  una aplicación compacta. Si  $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in E$  que cumpla  $x = \sigma Kx$  para algún  $\sigma \in [0,1]$  se tiene que  $\|x\| \leq M$ , entonces  $K$  tiene al menos un punto fijo.

**Demostración.** Tomando  $T: E \times [0,1]$  como  $T(x, t) = tKx$ ,  $T$  cumple las hipótesis del teorema, luego

$$\exists x \in E: x = T(x, 1) = Kx \quad \blacksquare$$

Para otra demostración sin usar el teorema anterior, se invita al lector ver [1].

### 3. PROBLEMA DE CONTORNO

Considerese el problema de segundo orden

$$\begin{cases} u'' + g(t, u) = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T \end{cases} \quad (3.1)$$

con  $g = [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $\frac{\partial g}{\partial u} \leq 0$ . Entonces (3.1) tiene solución única en  $H^2[0, T]$ .

**Demostración.** Primero nótese que si

$$H^2[0, T] \cap H_0^1[0, T]$$

se tiene que

$$\|w'\|_2^2 = - \int_0^T w''w,$$

luego, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|w'\|_2^2 \leq \|w''\|_2 \|w\|_2$$

Además, por la desigualdad de Poincaré, se sabe que

$$\exists c_1 \in \mathbb{R}: \|w\|_2 \leq c_1 \|w'\|_2,$$

de donde, usando las dos desigualdades anteriores se deduce que

$$\|w'\|_2 \leq c_1 \|w''\|_2$$

y también

$$\|w\|_2 \leq c_1 \|w''\|_2$$

De donde se sigue que

$$\|w\|_{H^1} \leq c \|w''\|_2 \quad (3.2)$$

con  $c = \sqrt{c_1^2 + c_1^2}$ .

Por otro lado, si se tiene que  $v \in H^1[0, T]$  y se considera el problema

$$\begin{cases} u'' = -g(t, v) \\ u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T \end{cases}$$

Claramente tiene única solución en el conjunto

$$H^2[0, T] \subset H^1[0, T]$$

Por otro lado, si se define el conjunto  $K: H^1[0, T] \rightarrow H^1[0, T]$

Como  $Kv = u$ , siendo  $u$  dicha solución,  $K$  está bien definida.

Se verifica ahora que  $K$  es continuo. En efecto,

Sean  $u, v \in H^1[0, T]$  tal que  $\frac{H^1}{u \rightarrow v}$ , luego  $u \rightarrow v$  uniformemente ya que

$$H^1[0, T] \subset C[0, T]$$

Por otro lado,

$$Ku - Kv \in H^2 \cap H_0^1[0, T]$$

Así, por la ecuación (3.2) se tiene

$$\begin{aligned} \|Ku - Kv\|_{H^1} &\leq c \|(Ku)'' - (Kv)''\|_2 = c \\ \|g(\cdot, u) - g(\cdot, v)\|_2 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Se verifica a continuación que  $K$  es compacto. En efecto, sean  $M \in \mathbb{R}$  y  $u \in H^1[0, T]: \|u\|_{H^1} \leq M$  y sea

$$\varphi(t) = \frac{u_T - u_0}{T} t + u_0$$

Luego,

$$Ku - \varphi \in H^2 \cap H_0^1[0, T],$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|Ku - \varphi\|_{H^1} &\leq c\|(Ku)'' - \varphi''\|_2 = c\|(Ku)''| \\ &= c\|g(\cdot, u)\|_2 \leq C_M \end{aligned}$$

Siendo  $C_M$  una constante que depende únicamente de  $M$ , por lo tanto

$$\|Ku\|_{H^1} \leq \|Ku - \varphi\|_{H^1} + \|\varphi\|_{H^1} \leq C_M + \|\varphi\|_{H^1} \leq C_M$$

Además,

$$\|(Ku)''\|_2 \leq \frac{C_M}{\sigma}$$

Entonces

$$\|Ku\|_{H^2} \leq \hat{C}_M$$

Luego, con la inclusión de  $H^2[0, T]$  en  $H^1[0, T]$  es compacta,  $K$  resulta compacto.

Sea  $w \in H^1[0, T]$ :  $w = \varphi Kw$  con  $\varphi \in [0, 1]$ .

Entonces  $w$  es solución del problema

$$\begin{cases} u'' = \sigma g(t, u) \\ u(0) = \sigma u_0, \quad u(T) = \sigma u_T \end{cases}$$

Sea

$$\varphi_\sigma(t) = \sigma \left( \frac{u_T - u_0}{T} t + u_0 \right)$$

Y defínase

$$S_\sigma u = u'' + \sigma g(t, u)$$

Sea  $u, v \in H^2[0, T]$  con  $u = v$  en el borde, luego

$$\begin{aligned} - \int_0^T (S_\sigma u - S_\sigma v)(u - v) &= \\ &= \int_0^T (u - v)'(u - v) - \sigma \int_0^T (g(t, u) - g(t, v))(u - v) \end{aligned}$$

$$= \|(u - v)'\|_2^2 - \sigma \int_0^T \frac{g(t, u) - g(t, v)}{u - v} (u - v)^2$$

Como por hipótesis se tenía  $\frac{\partial g}{\partial u} \leq 0$ , entonces usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\|u' - v'\|_2^2 \leq \|S_\sigma u - S_\sigma v\|_2 \|u - v\|_2$$

Luego, por Poincaré y razonando como antes,

$$\exists \hat{c}: \|u - v\|_{H^1} \leq \hat{c} \|S_\sigma u - S_\sigma v\|_2$$

Entonces, tomando  $u = v$  y  $v = \varphi_\sigma$ , se tiene que

$$\|\varphi_\sigma\|_\infty = \sigma \|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^1} &\leq \|w - \varphi_\sigma\|_{H^1} + \|\varphi_\sigma\|_{H^1} \leq m + \\ &\sigma \|\varphi\|_{H^1} \leq m + \|\varphi\|_{H^1} \leq \tilde{m} \end{aligned}$$

con  $\tilde{m}$  independiente de  $w$  y  $\sigma$ .

Así, por el corolario 2.1,  $K$  tiene un punto fijo. Luego, el problema (3.1) tiene solución.

Para ver la unicidad, se supone que  $u$  y  $v$  son soluciones del problema, entonces

$$S_\sigma u = S_\sigma v = 0$$

Por lo tanto,

$$\|u - v\|_{H^1} \leq \hat{c} \|S_\sigma u - S_\sigma v\| = 0$$

De donde se sigue que  $u = v$ . ■

#### 4. CONCLUSIONES

Dentro de los métodos topológicos, los teoremas de punto fijo se han aplicado a la resolución de diversas ecuaciones no lineales [2], [3]. En este artículo se demostró utilizando el teorema de Leray-Schauder, la existencia de solución (bajo ciertas condiciones) de un problema de contorno no lineal.

Utilizando el teorema (2.1) y el corolario (2.1), se probó que el operador  $T$  definido para el problema (3.1) tenía un punto fijo, el cual dio existencia de solución.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) para la realización de este artículo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004
- [2] AMSTER, P.G. Resolution of Semilinear Equations by Fixed Point Methods. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.
- [3] AMSTER, P, Pinnau, R., Large Convergent Iterative Schemes for a Nonisentropic Hydrodynamic Model for Semiconductors. ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) Vol 82-8 (2002) 559-566.
- [4] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.
- [5] MORTON K.W. & Mayers D.F. (1981) Numerical Solutions of Partial Differential Equations. an introduction, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] HUBBARD, F. Numerical solution of partial differential equations – II. AP.