UNA NOTA SOBRE LOS PROBLEMAS DE PUNTO DE SILLA EN LA MECANICA DE SÓLIDOS

A note on the saddle point problems in solid mechanics

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Profesor Asistente - Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

ALEXANDER GUTIERREZ G.

Matemático.
Magíster en Matemáticas.
Profesor Asistente – Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
alexguti@utp.edu.co

FERNANDO MESA
Profesor asociado
Departamento de Ciencias Básicas
femesa@utp.edu.co

RESUMEN

Los problemas de punto de silla surgen en la mecánica de sólidos, donde típicamente una o más variables juegan el papel de multiplicadores de Lagrange en problemas variacionales con restricciones. En este artículo se mostrará la existencia de solución de un problema de punto de silla bajo ciertas restricciones y en un espacio adecuado.

PALABRAS CLAVES: Punto de silla, problema variacional, forma bilineal.

ABSTRACT

The saddle-point problems arising in solid mechanics, where typically one or more variables play the role of Lagrange multipliers in variational problems with constraints. This article will show the existence of solution of a saddle-point problema under certain restrictions and adequate space

KEYWORDS: Saddle point, variational problem, bilinear form.

1. INTRODUCCIÓN

La formulación de los problemas de punto de silla es la siguiente:

Encontrar U y p tales que

$$a(u,v) + b(p,v) = f(v), \text{ para toda } v \in U$$
$$b(q,u) = g(q), \text{ para toda } q \in X$$

donde U y X son espacios de Sobolev, $a : U \times U \to \mathbb{R}$, $b: X \times U \to \mathbb{R}$ son formas bilineales continuas y $f(v) \in U', g(q) \in X'$.

Los espacios de Sobolev considerados en este trabajo serán construidos a partir de funciones en $L^2(\Omega)$, donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave o Lipschitz regular, en el caso de dominios poligonales. El espacio $L^2(\Omega)$ está dotado del producto interno

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

y es un espacio de Hilbert con la norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u,v)_{L^2(\Omega)}}$$

Definición 1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0$ un multindice. Denótese por $C_0^\infty(\Omega)$ las funciones definidas en Ωque tienen soporte compacto y son infinitamente diferenciables. Ahora, si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$denotamos con $D^\alpha\phi$, la derivada parcial de ϕde orden $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ como

$$D^\alpha\phi = \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Definición 1.2. Sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ un multindice. Entonces $u \in L^2(\Omega)$ posee derivada débil $v = D^\alpha u$ de orden $|\alpha|, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, si $v \in L^2(\Omega)$ y

Fecha Recepción: 9 de Septiembre de 2010
Fecha aceptación: 15 de Noviembre de 2010

$(\phi, v)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \phi, u)_{L^2(\Omega)}$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definición 1.3. Sea $m \geq 0$ entero. El espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones si $u \in L^2(\Omega)$ que poseen derivada débil $D^\alpha u$ para todo $|\alpha| \leq m$. $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert dotado con el producto escalar.

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

y la norma

$$\|u\|_m = \sqrt{(u, u)_m}$$

Se denotará por V' el espacio dual de V y la relación de dualidad entre V y V' se denotará como $V'\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definición 1.4. $H_0^m(\Omega)$ representa la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ respecto de la norma de Sobolev $\|\cdot\|_m$. El espacio dual de $H_0^m(\Omega)$ se denotará con $H^{-m}(\Omega)$. Para $u \in H^{-m}(\Omega)$ se define la norma

$$\|u\|_{-m} = \sup_{v \in H_0^m(\Omega)} \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|_m}$$

A continuación se introduce el problema variacional con restricción a estudiar.

2. PROBLEMA DE PUNTO DE SILLA

Sean V y X espacios de Hilbert y

$$a: V \times V \to \mathbb{R}, \qquad b: X \times V \to \mathbb{R},$$

formas bilineales continuas. Además, considérense $f \in V', g \in X'$. A las formas bilineales $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot)$ se le asocia el siguiente problema de minimización:

Encontrar en V el mínimo de

$$J(u) = \tfrac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u\rangle$$

bajo la restricción

$$b(\mu, u) = \langle g, \mu\rangle \; para \; todo \; \mu \in X$$

El problema de multiplicadores de Lagrange asociado al problema anterior está dado por el funcional aumentado

$$L(\mu, \lambda) := J(u) + (b(\lambda, u) - \langle g, \lambda\rangle),$$

donde $u \in V$ y $\lambda \in X$ es el multiplicador de Lagrange. Así, minimizar J equivale a encontrar el mínimo de $L(\cdot, \lambda)$ para λ fijo; λ debe escogerse de tal forma que $L(\cdot, \lambda)$ alcance un mínimo en un punto u de V que satisfaga la restricción. De esta manera se llega al problema de punto de silla.

PROBLEMA (PS). *Encontrar* $[u, \lambda] \in V \times X$ *tal que*

$$a(u, v) + b(\lambda, v) = \langle f, v\rangle \; para \; todo \; v \in V,$$
$$b(\mu, u) = \langle g, \mu\rangle \; para \; todo \; \mu \in X$$

Cada $[u, \lambda]$ solución del problema **(PS)** satisface la propiedad de punto de silla

$$L(u, \mu) \leq L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda) \; para \; todo \; (u, v) \in V \times X,$$

siempre que la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ sea V-elíptica y simétrica. Al problema **(PS)** se deben imponer condiciones adicionales que garanticen la existencia de los multiplicadores de Lagrange. En espacios de dimensión no es suficiente exigir la independencia lineal de las restricciones, en tales espacios es necesario imponer una condición tipo inf-sup que describe propiedades de la forma b(·,·).

A continuación se enuncia un teorema que permite plantear el problema **(PS)** en el marco teórico apropiado.

Teorema 2.1. Si $a: V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal continua, existe un único operador $A \in \mathcal{L}(V, V')$ tal que

$$\alpha(x, y) = \langle Ax, y\rangle \; para \; todo \; x, y \in V$$

Por el teorema anterior, los siguientes operadores A y B están bien definidos,

$$A \in \mathcal{L}(V, V'),$$

mediante $\alpha(u, v) = \langle Au, v\rangle$ para todo $u, v \in V$ y

$$B \in \mathcal{L}(X, V'),$$

mediante $b(\mu, u) = \langle B\mu, u\rangle$ para todo $u, \mu \in V \times X$, donde el operador adjunto de B se denotará con $B^* \in \mathcal{L}(X, V')$. En consecuencia, el problema **(PS)** se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} Au + B\lambda &= f \\ B^* u &= g \end{aligned} \tag{2.1}$$

Las condiciones que los operadores A y B deben satisfacer para que el problema (**PS**) este bien puesto se dan como sigue. Supóngase que $A^{-1} \in \mathcal{L}(V', V)$ existe. Bajo este supuesto tenemos que la solución de (2.1) se puede escribir como

$$u = A^{-1}(f - B\lambda)$$
$$\lambda = (B^* A^{-1} B)^{-1}[B^* A^{-1} f - g]$$

En consecuencia, la existencia de A^{-1} y $(B^* A^{-1} B)^{-1}$ es suficiente para que el problema (**PS**) tenga solución única. Sin embargo, esta condición no es necesaria, pues si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;\; y \;\; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces el sistema (2.1) tiene solución única, única cuando A es singular. Por lo tanto, no es necesario que A sea invertible. Para determinar condiciones suficientes y necesaria se introduce el espacio V_0=Kern(B^*),

$$V_0 = \{v \in V: b(\mu, v) = 0,\; para\; todo\;\; \mu \in\} \qquad (2.2)$$

Por la continuidad del operador B, el espacio Kern(B^*) es cerrado en V y V se puede descomponer como la suma directa de los espacios ortogonales V_0 y $V_0^{\perp}$. Si se define $V_{\perp} := V_0^{\perp}$. entonces

$$V = V_0 \oplus V_{\perp}$$

Teniendo en cuenta la descomposición de V se puede escribir el operador A en bloques,

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{0\perp} \\ A_{\perp 0} & A_{\perp\perp} \end{pmatrix}$$

donde $A_{00} \in \mathcal{L}(V_0, V_0'), A_{0\perp} \in \mathcal{L}(V_{\perp}, V_0'), A_{\perp 0} \in \mathcal{L}(V_0, V_{\perp}')$ y $A_{\perp\perp} \in \mathcal{L}(V_{\perp}, V_{\perp}')$.

Análogamente B se puede escribir como

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_{\perp} \end{pmatrix}$$

Por el teorema del rango cerrado se tiene la inclusión, $Im(B) \subset V_{\perp}'$, y por lo tanto, $B_0 = 0$ y $B_{\perp} = B$. En consecuencia, el sistema (2.1) se transforma en

$$A_{00}u_0 + A_{0\perp}u_{\perp} = f_0 \qquad (2.3)$$
$$A_{\perp 0}u_0 + A_{\perp\perp}u_{\perp} + B\lambda = f_{\perp} \qquad (2.4)$$
$$B^* u_{\perp} = g \qquad (2.5)$$

donde $u = u_0 + u_{\perp}$ con u_0 en V_0 y $u_{\perp}$ en $V_{\perp}$. Equivalentemente se ha escrito f como $f = f_0 + f_{\perp}$ con f_0 en V_0' y $f_{\perp}$ en $V_{\perp}$.

Teorema 2.2. (Brezzi). Sea en V_0 definido en (2.2), la aplicación en $\mathbb{L}: V \times X \to V' \times X'$, $\mathbb{L}(u, \lambda) = (f, g)$ definida en el problema **(PS)** es un isomorfismo si y sólo si existen las inversas

$$A_{00}' \in \mathcal{L}(V_0', V_0) \;\; y \;\; B^{-1} \in \mathcal{L}(V_{\perp}', X) \qquad (2.6)$$

Para la demostración de este teorema se seguirán las ideas de Brezzi. Primero se mostrará que si (2.6) se cumple entonces $\mathbb{L}$ es un isomorfismo. Como B es invertible se tiene $(B^*)^{-1} = (B^{-1})^* \in \mathcal{L}(X', V_{\perp})$. Entonces de (2.5) se tiene $u_{\perp} = (B^*)^{-1}g$. u_0 se obtiene de (2.3) pues, $u_0 = A_{00}^{-1}(f_0 - A_{0\perp}u_{\perp})$. Finalmente, λ se obtiene de la ecuación (2.4). Vease el reciproco. Sea $f_0 \in V_0'$arbitrario y $f_1 = 0, g = 0$. Supongase que (u, λ) es solución de $\mathbb{L}(u, \lambda) = (f_0, 0)$, entonces existe una constante positiva α tal que $\|f_0\|_{V'} \leq \alpha \|u\|_V$. De la ecuación (2.5) se tiene que $B^* u_{\perp} = 0$, entonces $u_{\perp} = 0$, pues si $u_{\perp} \in V_0$ y $V_0 \cap V_{\perp} = 0$. En consecuencia se tiene que la ecuación (2.3) se reduce a $A_{00}u_0 = f_0$ que tiene solución única $u_0 \in V_0$ para cada $f_0 \in V_0'$. Entonces, $A_{00}: V_0 \to V_0'$ es biyectiva y acotada, del teorema de la función abierta se tiene que $A_{00}^{-1} \in \mathcal{L}(V_0', V_0)$. Si se toma $f_1 \in V_{\perp}$ arbitrario y $f_0 = 0, g = 0$, se tiene de las ecuaciones (2.4) y (2.5) que $u_{\perp} = 0$ y $u_0 = 0$. En consecuencia la ecuación (2.4) se puede escribir como $B\lambda = f_{\perp}$ y tiene solución única $\lambda \in X$. Similarmente, como se infirió que A_{00} era continua y acotada, se tiene que $B' \in\in \mathcal{L}(V_{\perp}', X)$.

En la práctica es muy útil escribir la condiciones del teorema anterior en términos de las formas bilineales $a(\cdot,\cdot)$ y $b(\cdot,\cdot)$. Para tal fin, se necesita el siguiente teorema:

Teorema 2.3. Sean U,V espacios de Hilbert y $a: U \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y $A: U \to V'$ el operador lineal definido por

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle,\; para\; todo\;\; u \in U, v \in V.$$

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $A^{-1} \in \mathcal{L}(V', U)$ existe,
2. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ satisface la condición *inf-sup*, es decir, existe $a > 0$ tal que

$$\underset{v \in V}{sup} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u\|_U$$

En el siguiente teorema se dan condiciones suficientes para que la aplicación $\mathbb{L}$ sea un isomorfismo.

Teorema 2.4. Si las formas bilineales del problema **(PS)** cumplen las siguientes condiciones:

1. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es V_0-elíptica, es decir, existe $a > 0$ tal que

   $\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u), para\; todo\; u \in V_0,$
2. y la forma bilineal $b(\cdot,\cdot)$ satisface la condición *inf-sup*, es decir, existe una constante positiva β tal que

   $$\underset{v \in V}{sup} \frac{b(\mu, v)}{\|v\|_V} \geq \beta \|\mu\|_X \;\; \text{para todo } \mu \in X.$$

Entonces la aplicación $\mathbb{L}: V \times X \to V' \times X', \mathbb{L}(u, \lambda) = (f, g)$ definida en el problema **(PS)** es in isomorfismo.

Demostración. Sean $A \in \mathcal{L}(V, V')$ tal que $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$, para todo $u, v \in V, B \in \mathcal{L}(X, V'), B^* \in \mathcal{L}(V, X')$ tal que $b(\mu, v) = \langle B\mu, u\rangle = \langle \mu, B^*u\rangle$ para todo $[u, \mu] \in V \times X$. Primero se mostrará la existencia de $u \in V$. Como b es continua y cumple 2. entonces, por el teorema2.4, $B^*: V_\perp \to X'$ es un isomorfismo. En consecuencia, para $g \in X'$ existe $u_\perp \in V_\perp$ que satisface $B^*u_\perp = g$ tal que

$$\|u_\perp\|_V \leq \frac{1}{\beta}\|g\|_{X'} \qquad (2.7)$$

Ahora, la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ cumple la condición 1., entonces el problema

$$a(u_0, v) = \langle f, v\rangle - a(u_\perp, v) para\ todo\ v \in V_0 \qquad (2.8)$$

tiene solución única $u_0 \in V_0$ tal que $Au_0 = f - Au_\perp$ y

$$\|u_0\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'} + \|u_\perp\|_V \qquad (2.9)$$

Considérese en V' la forma lineal L

$$\langle L, v\rangle := \langle f, v\rangle - a(u_0 + u_\perp, v)\ para\ todo\ v \in V,$$

que por (2.9), pues $L|_{V_0} = 0$, pertenece a $Im(B) = Kern(B^*)^\perp = \{v' \in V' : \langle v', v_0\rangle = 0,\ para\ todo\ v_0 \in V_0\}$. A continuación se motrará la existencia de λ. La condición 2. Implica $B: X \to Kern(B^*)^\perp$ es un isomorfismo, entonces existe $\lambda \in X$ tal que

$$\langle L, v\rangle = b(\lambda, v) = \langle \lambda, B^*v\rangle = \langle B\lambda, v\rangle\ para\ todo\ v \in V$$

Y además

$$\|\lambda\|_X \leq \frac{1}{\beta}\|L\|_{V'} \leq \frac{1}{\beta}(\|f\|_{V'} + \|u\|_V\ ) \qquad (2.10)$$

Tomando $u = u_0 + u_\perp$ se tiene por un lado

$$a(u, v) + b(\lambda, v) = a(u_0 + u_\perp, v) + \langle f, v\rangle - a(u_0 + u_\perp, v)$$

que es igual a $\langle f, v\rangle$. Ahora,

$$b(\mu, v) = b(\mu, u_0 + u_\perp) = b(\mu, u_0) + b(\mu, u_\perp) = \langle g, \mu\rangle$$

Así queda demostrada la existencia de $[u, \lambda] \in V \times X$. La solución es única, en efecto, si se toma $f = g = 0, v = u\ y\ \mu = -\lambda$, entonces $u \in V_0$ y $a(u, u) = 0$, como a satisface la condición 1. Se tiene que $u = 0$. Ademas se tiene que $sup_{v \in V} b(\lambda, v) = 0$, entonces $\lambda = 0$. Por lo tanto, $\mathbb{L}$ es inyectiva y sobreyectiva. De los estimativos (2.7), (2.9) y (2.10) tenemos que $\mathbb{L}^{-1}$ es continua.

El teorema anterior establece la dependencia continua de las soluciones de problema **(PS)** respecto a los datos f y g. Sea $[u, \lambda]$ una solución de **(PS).** De (2.9) y (2.10) se tiene

$$\|u\|_V \leq c(\|f\|_{V'} + \|g\|_{X'}\ )$$

además del resultado anterior y de (2.10) se llega a

$$\|\lambda\|_X \leq c(\|f\|_{V'} + \|g\|_{X'}\ )$$

Por consiguiente,

$$\|u\|_V + \|\lambda\|_X \leq c(\|f\|_{V'} + \|g\|_{X'}\ ) \qquad (2.11)$$

que corresponde a la estabilidad de las soluciones del problema **(PS).**

3. CONCLUSIONES

Los problemas de punto de silla aparecen con frecuencia en Mecánica de sólidos y por ello la aplicación de métodos variacionales resulta de gran importancia para obtener la existencia de solución bajo ciertas restricciones.

Se encontró el mínimo del funcional bajo ciertas restricciones dadas utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

Las simulaciones numéricas deben hacerse bajo ciertas modificaciones, puesto que se encontró que existe inestabilidad sobre todo en problemas relacionados con la ecuación de Stokes.

BIBLIOGRAFIA

[1] BREZZI. F. On the existence, uniqueness and aproximation of de saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. Anal. Num. 8, R-2, 1974. P. 129-151.

[2] EVANS, L.C.. Partial Differential Equation. Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.

[3] HACKBUSH, W. Elliptic Differential Equations: Theory and Numerical Treatment, Berlin. Springer-Verlag, 1992.

[4] YOSIDA, K. Functional Analysis. Berlin. Springer-Verlag, 1965.