ALGUNOS RESULTADOS INTERESANTES DE LA TEORÍA DE LA MEDIDA

Some interesting results of the measurement theory

EDGAR ALIRIO VALENCIA ANGULO

Profesor Auxiliar, Magíster en Ciencias Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co

CARLOS ARTURO ESCUDERO

Profesor Asociado, Ph.D. en Ciencias Matemáticas.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
carlos10@utp.edu.co

YURI ALEXANDER POVEDA

Profesor Asociado, Matemático, Ph.D. en Ciencias Matemáticas.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co

RESUMEN

En este artículo se hace una presentación un poco distinta de algunos resultados de la teoría de la medida. De la misma manera se demuestran un resultado conocido e interesante de la teoría de la medida sobre sucesiones monótonas de conjuntos definidos en una σ- álgebra.

PALABRAS CLAVES: Medida, espacio de medida y $\sigma -$ álgebras.

ABSTRACT

In this paper a slightly different presentation of some results of measure theory. In the same way, showing a well-known and interesting result of measure theory on monotone sequences of sets defined on a σ-algebra.

KEYWORDS: *measure , measure space and $\sigma -$ algebras.*

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de la medida tiene una historia de más de 5000 años, y surge de la necesidad de tratar el manejo de conceptos como: longitudes, áreas y volúmenes, fundamentalmente la gran necesidad de su cálculo ver el libro [4].

En principio las longitudes las daban en comparación con un segmento unidad, las áreas con un cuadrado unidad y los cubos con un cubo unidad, de esta manera se podrían medir figuras simples como polígonos y poliedros y se demostraron teoremas como el de Pitágoras y se calcularon volúmenes de superficies como el cono, la esfera y el cilindro.

Estos tres ejemplos particulares de medida son los que han servido como guía para sacar a la luz el concepto que detrás de ellas se escondía.

Así se mantuvieron las cosas hasta que en 1883 G. Cantor dio la primera definición formal del concepto de medida de un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ y estudio sus propiedades.

En este artículo presentamos y demostramos de manera un poco novedosa algunos resultados conocidos de la teoría de la medida.

2. MEDIDA

En esta sección recordaremos el concepto de medida de un subconjunto de Ω como lo hace Ash en [1] y cohn en [2]. Pero antes de dar la definición de medida, definamos que es una σ-algebra.

Definición 1 Llamaremos σ- álgebra en Ω a una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω que satisface las siguientes propiedades:

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2011
Fecha de Aceptación: 28 de Enero de 2011

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.

2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.

3. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Si la propiedad 3 se satisface para uniones finitas, se dice que $\mathcal{F}$ es una álgebra. De esta definición se sigue de forma inmediata que una σ- álgebra es cerrada para intersecciones numerables y una álgebra para intersecciones finitas.

Se llamará espacio medible al par $(\Omega, \mathcal{F})$ donde Ω es un conjunto cualquiera y $\mathcal{F}$ es una σ −álgebrade Ω y llamaremos conjuntos medibles a los elementos de $\mathcal{F}$.

Proposición 1. Sea $\Omega = \mathbb{Q}$ (números racionales) y R el anillo generado por los intervalos de la forma $[a,b)$, $[a,\infty)$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$. Demuestre que

$$\wp(\Omega) = \wp(\mathbb{Q}) = \mathcal{F}(R),$$

es una σ- álgebra.

Demostración. Por hipótesis sabemos que

$$\mathcal{F}(R) \subseteq \wp(\Omega).$$

Demostremos que $\wp(\Omega) \subseteq \mathcal{F}(R)$.

Sea $B \in \wp(\Omega)$, es decir $B \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $B = \bigcup_{x \in B}\{x\}$ B es finito o numerable, pero observemos que

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x, x + \tfrac{1}{n})$$

Donde $[x, x + \frac{1}{n}) \in R$.

Sea $A_n = [x, x + \frac{1}{n})$, entonces $(A)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}(R)$, luego $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}(R)$, es decir $x \in \mathcal{F}(R)$ por lo tanto

$$\bigcup_{x \in B}\{x\} = \mathcal{F}(R).$$

Uno de los conceptos fundamentales en la teoría de la medida, es la medida de un conjunto. Presentaremos este concepto, siguiendo a Weir y a Shiryaev [6] y [5] respectivamente.

Definición 2 Dado $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una medida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función no negativa

$$\mu: \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty)$$

Que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

2. $\mu(\emptyset) = 0$.

3. Es numerablemente aditiva, es decir, si dado $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

y cuya unión esta en $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Se dirá que la medida que la medida es aditiva si la condición 3 solo es válida para colecciones finitas de conjuntos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Se dirá que una medida μ es σ-finita si existe una sucesión de conjuntos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \quad \text{y} \quad \mu(A_n) < \infty.$$

Se llamará espacio de medida a la tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ donde μ es la medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$ de Ω.

Proposición 2. Sea $\mu(A) = n$ si A tiene n elementos y $\mu(A) = \infty$ si A es un conjunto infinito. Demostremos que μ es una medida en $\wp(\mathbb{Q})$ y además μ es σ-finita, pero

$$\beta = {}^{\mu}/_{R}$$

(β es igual a μ restringida a R) no es σ-finita.

Demostración. μ es positiva. En efecto, claramente por definición $\mu(A) \geq 0$.

μ es numerablemente aditiva: sea $A_1, A_2, \ldots \in \wp(\mathbb{Q})$, una familia de conjuntos tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y cuya unión esta en $\wp(\mathbb{Q})$, demostremos que

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Supongamos que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es finito, entonces A_n es finito para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = Car(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Car(A_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Donde $Car(A_n)$ se define como el número de elementos del conjunto A_n.

Supongamos que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es infinito e $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \infty)$, entonces suceden dos casos:

Caso1. Supongamos que $(A)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos donde cada conjunto A_n es finito para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\mu(A_n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, los números a_n son números enteros positivos, y como la suma numerable de números positivos es infinito, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty,$$

por consiguiente

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Caso2. Sea A_n infinito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(A_n) = \infty$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$, luego

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ahora demostremos que μ es σ-finita en $\wp(\mathbb{Q})$.

Como $\mathbb{Q}$ es numerable, entonces $(\{x\})_{x\in\mathbb{Q}}$, es una sucesión en $\wp(\mathbb{Q})$ tal que

$$\mathbb{Q} = \cup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$$

y $\mu(\{x\}) = 1 < \infty$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Sea $\beta = {}^{\mu}/_{R}$. Demostremos que β no es no es σ-finita.

Como R es el anillo generado por los intervalos de la forma $[a, b)$, $[a, \infty)$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$. Si $A \in R$, entonces existe una familia finita y disjunta de intervalos de la forma $[a, b)$, $[a, \infty)$, sea $(\delta_k)_{1\leq k\leq n}$ esta familia tal que

$$A = \cup_{k=1}^{\infty} \delta_k \text{ entonces } \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\delta_k).$$

Ahora, como $\mu([a, b)) = \infty$, como $\mu([a, \infty)) = \infty$, entonces

$$\beta(A) = \mu(A) = \infty \text{ para todo } A \in R.$$

Luego no existe ninguna sucesión $(A)_{n\in\mathbb{N}}$ en R tal que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por consiguiente

$$\beta = {}^{\mu}/_{R}$$

no es σ-finita.

3. ALGUNOS RESULTADOS INTERESANTES EN LA TEORIA DE LA MEDIDA

Antes de presentar estos resultados, definamos algunos conceptos sobre sucesiones de conjuntos que utilizaremos en esta sección.

Definición 3. Una sucesión de conjuntos es no decreciente si $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Decimos que una sucesión de conjuntos es no creciente si $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos no decreciente su limite es el conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si es no creciente, su limite es el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. En uno u otro caso, escribiremos respectivamente

$$\lim_n \uparrow A_n = \bigcup_n A_n \qquad \lim_n \downarrow A_n = \bigcap_n A_n$$

$$\lim_n A_n = \bigcup_n A_n \qquad \lim_n A_n = \bigcap_n A_n$$

Definimos

$$\lim_n supA_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k$$

$$\lim_n infA_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Proposición 3. Sea $A_n = \left(\frac{-1}{n}, 1\right]$ si n es par y $A_n = \left(-1, \frac{1}{n}\right]$ si n es impar, calcule

$$\lim_n sup\, A_n \quad \text{y} \quad \lim_n inf\, A_n.$$

Solución. Observemos que

$A_n \bigcup A_{n+1} =$

$$\begin{cases} \left(\frac{-1}{n}, 1\right] \bigcup \left(-1, \frac{1}{n+1}\right] = (-1, 1] \; si\; n\; es\; par \\ \left(-1, \frac{1}{n}\right] \bigcup \left(\frac{-1}{n+1}, 1\right] = (-1, 1] \; si\; n\; es\; impar. \end{cases}$$

Por lo tanto $\bigcup_{k\geq n} A_k = (-1, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\lim_n supA_n = (-1, 1].$$

Observemos ahora que

$A_n \bigcap A_{n+1} =$

$$\begin{cases} \left(\frac{-1}{n}, 1\right] \bigcap \left(-1, \frac{1}{n+1}\right] = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n+1}\right] \; si\; n\; es\; par \\ \left(-1, \frac{1}{n}\right] \bigcap \left(\frac{-1}{n+1}, 1\right] = \left(\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \; si\; n\; es\; impar. \end{cases}$$

Sea $B_n = A_n \bigcap A_{n+1}$. Observemos que $B_{n+1} \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto

$$B_{n+1} = A_{n+1} \bigcap A_{n+2}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+2}\right] \; si\; n\; es\; impar \\ \left(\frac{-1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right] \; si\; n\; es\; par \end{cases}$$

por lo tanto $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y además

$$\bigcap_{k\geq n} A_n = \bigcap_{k\geq n} B_n = \lim_n \downarrow B_n = \{0\}.$$

Luego $\lim_n inf\, A_n = \{0\}$.

Proposición 4 Sea $\mathcal{F}$ una es $\boldsymbol{\sigma}$-algebra y $\boldsymbol{\mu}$ una medida con valores en los reales. Demuestre que si $(\boldsymbol{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}$ y $\mathbf{lim}_n\, \boldsymbol{A_n} = \boldsymbol{A}$, entonces

$$\lim \mu_n(A_n) = \mu(A).$$

Demostración. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $\lim_n A_n = A$, entones como

$$A = \lim_n supA_n = \lim_n infA_n,$$

por lo tanto

$$A = \lim_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k. \quad (1)$$

Sea $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ entonces observemos que

$$B_n = A_n \bigcup A_{n+1} \bigcup A_{n+2} \bigcup \ldots$$

y que

$$B_{n+1} = A_{n+1} \bigcup A_{n+2} \bigcup A_{n+3} \bigcup \ldots$$

Entonces $B_{n+1} \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente , por lo tanto

$$\lim_n B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Luego por (1)

$$A = \lim_n B_n.$$

Ahora por (1) y como μ es una medida, entonces

$$\lim \mu_n(B_n) = \mu(A). \quad (2)$$

Ahora como $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$, entonces $A_n \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\mu(A_n) \leq \mu(B_n),$$

Por consiguiente

$$\lim_n \mu(A_n) \leq \lim_n \mu(B_n).$$

Por (2) tenemos que

$$\lim_n \mu(A_n) \leq \mu(A) \quad (3)$$

Ahora, sea $C_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$. Observemos que

$$C_n = A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap \ldots$$

$$C_{n+1} = A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} \cap \ldots$$

Entonces $C_n \subseteq C_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Es una sucesión no decreciente, por lo tanto

$$\lim_n C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Luego $A = \lim_n C_n$ y por consiguiente

$$\mu(A) = \lim_n \mu(C_n).$$

Ahora como $C_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$ entonces $C_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\mu(C_n) \leq \mu(A_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que

$$\lim_n \mu(C_n) \leq \lim_n \mu(A_n),$$

por lo tanto

$$\mu(A) \leq \lim_n \mu(A_n).$$

Finalmente se concluye que

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. CONCLUSIONES

La conclusión más importante del trabajo es que se pueden usar conceptos y propiedades de sucesiones monótonas de conjuntos de una $\boldsymbol{\sigma}$-algebra $\mathcal{F}$ para demostrar la que si $(\boldsymbol{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos monótona en $\mathcal{F}$ y $\mathbf{lim}_n\, \boldsymbol{A_n} = \boldsymbol{A}$, entonces

$$\lim \mu_n(A_n) = \mu(A).$$

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] R. B. Ash, *Analysis and probability. Ac Press, 1972.*

[2] D. L. Cohn, Measure *theory* . Cambridge Birkhauser Boston, 1980.

[3] M. Degroot. Probabilidad y estadística, Segunda edición, Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. 1988.

[4] P. Ibarrola, L. Pardo y V. Quesada. *Teoría de la probabilidad*, Editorial Síntesis S. A, 1997.

[5] Paul Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Addinson –Wesley Iberoamericana, S. A 1970.

[6] M. Muñoz, L. Blanco. *Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad.* Universidad Nacional de Colombia, Primera edición 2002.

[7] Vicente Quesada y Alfonso García. Lecciones de Calculo de Probabilidad. Días de Santos. 1988.

[8] A. N. Shiryaev. *Probability*. Second Edition. Academic Press, 1975.

[9] A. J. Weir, *General integration and measure.* Vol II Cambridge Univ. Press 1974.

[10] D. Williams. *Probability Theory with Martingales.* Cambridge University Press, 1997.