CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS ASOCIADAS A LA LEY DE LOS SIGNOS

Epistemic configurations associated to the signs law

RESUMEN
En este artículo se hace un análisis sobre los inconvenientes que ofrece el trabajo con el producto de números enteros, en las prácticas discursivas en el aula de clase de matemáticas, mas aun, si no se tiene un manejo holístico del tema. Se ofrecen varios ejemplos con los cuales configurar un proceso de enseñanza donde se involucren temas como la multiplicación entre enteros, un proceso que permita determinar los posibles significados relacionados con los objetos matemáticos en diferentes contextos de su uso.

PALABRAS CLAVES: Producto de enteros, objeto matemático, configuración epistémica.

ABSTRACT
This article makes an analysis of the disadvantages that offers the work with the product of integers in the discursive practices in the math classroom, more even, if there is no holistic theme management. Several examples with which configure a teaching process which involved issues as integers multiplication, a process that allows determining the possible meanings related to mathematical objects in different contexts of use.

KEYWORDS: *Integer's product, mathematical object, epistemic configuration.*

OSCAR FERNÁNDEZ SÁNCHEZ
M.Sc. Matemáticas,
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
oscarf@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil, M.Sc.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Trabajar con el cuerpo de los enteros no representa dificultad alguna para los matemáticos de profesión o para aquellos profesionales que han estudiado varios cursos de matemáticas en sus carreras. Se podría decir que los enteros no ofrecen dificultad alguna dentro de las matemáticas mismas, sin embargo, en el campo de la Educación Matemática, existen varios problemas con los cuales se ha tenido que lidiar. Por ejemplo, la enseñanza de las operaciones entre números negativos es un aspecto de los enteros que presenta grandes dificultades para los docentes en los cursos iniciales.

Si se indaga un poco en la historia de la matemática, inicialmente el uso de los números negativos causó traumatismo, inclusive entre los matemáticos de la época "A estos números, llamados *numeri absurdi*, se les negará durante mucho tiempo la consagración." [4]. En el ámbito de la educación matemática aun representa una de las mayores problemáticas con las cuales se ven abocados muchos docentes en las instituciones escolares.

> *La introducción conceptual de los números negativos ha sido un proceso de una lentitud sorprendente. No puede haber, ciertamente, número negativo sin la presencia de un cero; sin embargo, en Europa, los matemáticos dispusieron del cero desde el siglo XIV, y será preciso esperar hasta el final del siglo XV para ver aparecer entes numéricos no positivos* [2].

Sin embargo cabe anotar que ese sería tan solo un pretexto para disimular la posible ignorancia que del tema se pudiera padecer, pues si se tiene conocimiento de un significado del objeto a enseñar en varios contextos matemáticos de uso y de sus prácticas de modo que se domine lo que Wilhelmi, M. llama, holo-significado [6] de dicho objeto, el docente no se quedaría corto ante cualquier cuestión sobre éste, ni tampoco le tomaría demasiado tiempo para hacerlo entender a sus estudiantes.

Se pretende mostrar una posibilidad de describir las nociones involucradas con las operaciones de multiplicación de números con el objetivo de disponer de algunas herramientas con las cuales configurar un proceso de enseñanza donde se involucren estas temáticas, un proceso que permita determinar los posibles significados relacionados con los objetos matemáticos en diferentes contextos de uso de estos, y que haga manejable su enseñanza en las aulas de clase y además, que permitan organizarlos de una manera compleja, pero coherente.

LA LEY DE LOS SIGNOS EN DIFERENTES CONTEXTOS MATEMÁTICOS

1. EN EL CAMPO DEL ANÁLISIS [1]

Fecha de Recepción: 28 de Enero de 2011
Fecha de Aceptación: 28 de Abril de 2011

Sean a, $b \in P^{+}$. La ley de los inversos en P, garantiza para a la existencia de un inverso aditivo único $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

Ahora la ley uniforme para la suma en P, garantiza el hecho

$$(a + (-a))*b = 0*b$$

Si aplicamos la ley distributiva y la multiplicación por cero en P se obtiene

$$a*b + (-a)*b = 0$$

Por tanto por la unicidad del inverso se obtiene que

$$(-a)*b = -(a*b)$$

Con lo que se deduce que si se multiplican dos cantidades de signo contrario, su producto es una cantidad negativa, es decir, se tiene que (-) * (+) = (-).

De nuevo, si se aplica la ley uniforme usando a $-b$, se tiene

$$(a + (-a))*(-b) = 0*(-b)$$

Y si aplicamos la ley distributiva y la multiplicación por cero en P se obtiene

$$a*(-b) + (-a)*(-b) = 0 \qquad (1)$$

Por la demostración anterior,

$$(-a)*b = -(a*b)$$

Entonces (1) queda

$$-a*b + (-a)*(-b) = 0$$

Para comprobar así que

$$(-a)*(-b) = a*b$$

En vista de la unicidad del inverso. Así se ha mostrado que si se multiplican dos cantidades con signo negativo ambas, se obtiene una cantidad con signo positivo, o que (-) * (-) = (+), que es como frecuentemente se presenta este resultado.

2. EN LA GEOMETRIA EUCLIDEANA [3]

Tomando el resultado considerado por René Descartes y que aparece en su libro *La Geometría*, el cual trata sobre la forma para hallar un segmento cuya longitud sea el producto de las longitudes de dos segmentos dados, y cuya validez está justificada a la luz del Teorema de Tales.

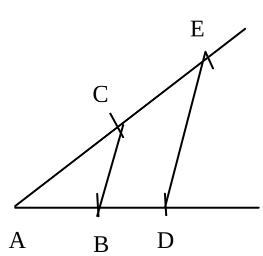

Fig. 1. Construcción para obtener el producto de las medidas de dos segmentos

De la fig. 1 se tiene que si m($\overline{AB}$) = 1 entonces

$$m(\overline{AE}) = m(\overline{AD})m(\overline{AC})$$

Ahora consideramos un plano cartesiano y dos números reales positivos a y b. Se grafica en dicho plano los números a, b y la unidad para obtener según el resultado anterior el segmento de longitud ab en el semieje positivo de las y, como se puede apreciar en la figura 2, es decir, es posible verificar el caso (+)*(+) = (+).

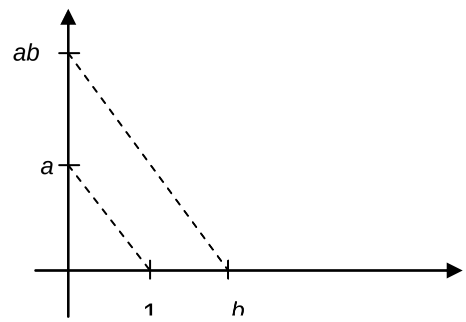

Fig. 2. Segmento de longitud *ab*

Ahora se grafica en el plano los números a, $-b$ y la unidad para obtener según el resultado anterior el segmento de longitud ab en el semieje negativo de las y, como se puede apreciar en la figura 3, es decir, es posible verificar el caso (+)*(-) = (-).

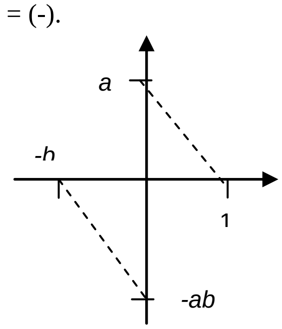

Fig. 3. Segmento de longitud *-ab*

Enseguida se grafican los números $-a$, b y la unidad para obtener el segmento de longitud ab en el semieje negativo de las y, como se puede apreciar en la figura 4, es decir, es posible verificar el caso (-)*(+) = (-).

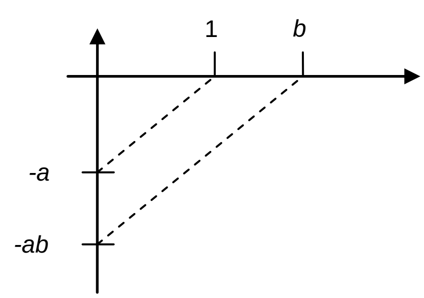

Fig. 4. Segmento de longitud *-ab*

Por último se grafican los números *-a*, *-b* y la unidad para obtener el segmento de longitud *ab* en el semieje positivo de las *y*, como se puede apreciar en la figura 5, es decir es posible verificar el caso (-)*(-) = (+).

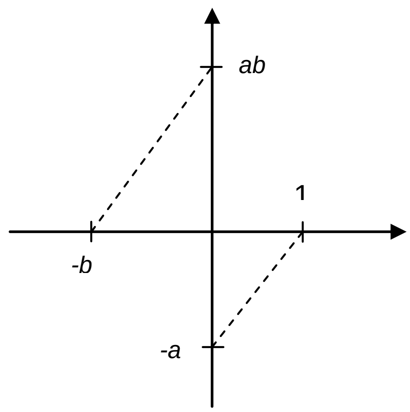

Fig. 5. Segmento de longitud *ab*

3. EN LA FÍSICA [5]

Considérese la siguiente situación: Un cuerpo que se mueve con velocidad uniforme v ($v > 0$), se desplaza sobre un camino recto una distancia d en un tiempo t ($t > 0$). Para efectos de nuestro problema, considérese el valor v si el cuerpo se aleja de un punto de referencia P (el cuerpo avanza), y $-v$ si el cuerpo se acerca al punto P (el cuerpo retrocede). Así mismo, el valor de t será el futuro y $-t$ será el pasado; de manera análoga, d será una posición futura del cuerpo y $-d$ una posición en el pasado del dicho cuerpo.

Considérese que el cuerpo *avanza*, para conocer la posición del mismo respecto del punto *P después* de transcurridos *t* segundos, se efectúa

$$(v \text{ m/s})*(t \text{ s}) = d_1$$

Es decir, el cuerpo *estará* a una distancia d_1 del punto P hacia *adelante*. Y se verifica que (+) * (+) = (+).

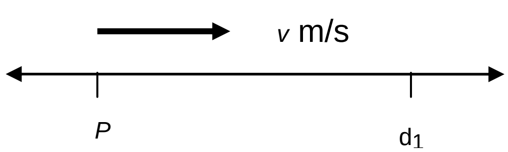

Fig: 6. El cuerpo se aleja del punto P, d_1 mts hacía adelante

Si aun se *avanza*, para conocer la posición del cuerpo respecto del punto *P hace t* segundos, se efectúa

$$(v \text{ m/s})*(-t \text{ s}) = -d_2$$

Es decir, el cuerpo *estaba* a una distancia d_2 del punto P hacia *atrás.* Y se verifica que (+) * (-) = (-).

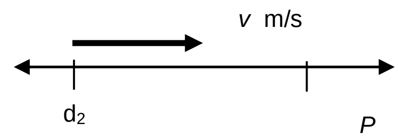

Fig. 7. El cuerpo *estaba* a una distancia d_2 del punto P hacia *atrás* hace t seg.

Ahora si se *retrocede*, para conocer la posición del cuerpo respecto del punto *P después* de transcurridos *t* segundos, se efectúa

$$(-v \text{ m/s})*(t \text{ s}) = -d_3$$

Es decir, el cuerpo *estará* a una distancia d_3 del punto P hacia *atrás*. Y se verifica que (-) * (+) = (-).

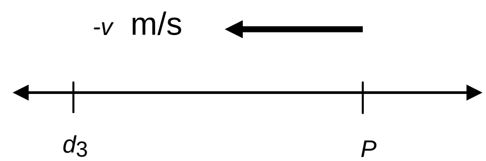

Fig. 8. El cuerpo se aleja del punto P, d mts hacia atrás.

Y por último, si se *retrocede*, para conocer la posición del cuerpo respecto del punto *P hace t* segundos, se efectúa

$$(-v \text{ m/s})*(-t \text{ s}) = d_4$$

Es decir, el cuerpo *estaba* a una distancia d_4 del punto P hacia adelante. Y se verifica que (-) * (-) = (+).

4. EN EL ÁMBITO FINANCIERO [7]

Supóngase que una persona X abre una cuenta corriente en un banco cualquiera, con una cantidad de dinero a, luego periódicamente se hacen consignaciones en esta cuenta por el mismo monto a, por b periodos, de modo que en esta cuenta se ha hecho, después de estos b periodos una consignación total por un monto de $a*b$ unidades de dinero, y esta cantidad pertenece al señor X, verificándose el hecho (+) * (+) = (+).

Supóngase que después de los b periodos gira b_1 cheques por a_1 unidades de dinero, además supóngase que $b_1 < b$, luego de dichos giros la persona X tiene a_1*b_1 menos del dinero que tenía (suponiendo $a_1*b_1 < a*b$), es decir se verifica en este caso el hecho: (-) * (+) = (-).

Supóngase que a la persona X el banco le presta cierta cantidad D de dinero, teniendo en cuenta que la persona tiene un empleo fijo que garantiza el cumplimiento de unas cuotas de amortización de dicha deuda fijadas por el banco. La deuda para la persona X equivale a un adelanto en el tiempo de los salarios que se va a ganar, por tanto podemos tomar cada periodo de pago como un tiempo negativo, en el sentido que es una recuperación de ese tiempo adelantado, las cuotas también son cantidad de dinero negativa porque es dinero que va a dejar de percibir mientras canela su deuda, así si la cuota es a y la deuda se cancela en T periodos entonces cuando haya pagado b cuotas con b < T, la cantidad $a*b$ es positiva para su cuenta en el banco porque esta se restará de la cantidad D que es negativa para X, y se verifica que (-) * (-) = (+).

5. EN LA ARITMÉTICA [1]

Sean $a, b \in Z^+$. El producto de ellos es

$$a*b = b + b + \cdots + b \text{ } (a \text{ veces})$$

Es decir, se verifica que (+) * (+) = (+).

Ahora si se efectúa

$$a*(-b) = (-b) + (-b) + \cdots +(-b) \text{ } (a \text{ veces})$$
$$= -(a*b)$$

Y se verifica que (+) * (-) = (-).

Si efectuamos

$$(-a) * b = -(b + b + \cdots + b) \text{ } (|a| \text{ veces en sentido opuesto a } b)$$

Es decir, se verifica que (-) * (+) = (-).

Por último, si se efectúa

$$(-a)*(-b) = -((-b) + (-b) + \cdots + (-b)) \text{ } (|a| \text{ veces en sentido opuesto a } -b)$$
$$= a*b$$

Y en este caso se verifica que (-) * (-) = (+).

4. CONCLUSIONES

Se han mostrado varios ejemplos donde es posible verificar la ley de los signos en contextos para los cuales se describen las nociones involucradas con las operaciones de multiplicación de números con las cuales se dispone de algunas herramientas que permiten configurar un proceso de enseñanza donde se involucre la ley de los signos, se presentan como alternativas de un proceso que permita determinar los posibles significados relacionados con dicha ley en diferentes contextos de uso, y que se espera que haga manejable su enseñanza en las aulas de clase y además, que permita organizar de una manera coherente los contenidos de enseñanza donde dicha ley sea necesaria.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] Apostol, T. Calculus. V. 1. Ed. Reverté. Barcelona, 1972.

[2] Boyé, Anne. Documentos de Historia de la Ciencia. Les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Nantes. Consultado en el sitio web http://www.educa.rcanaria.es/penelope/es_confboye.htm. el 19 de agosto de 2009.

[3] Descartes. La Geometría. Trad. De Rossell Soler, P. Introducción a la Obra Matemática de Descartes. Ed. Espasa-Calpe Argentina S.A. Buenos Aires, 1947.

[4] Guedj, D. El Imperi de las Cifras y los Números. Ed. B, S.A. Barcelona, 1998.

[5] Sears, W. y Zemansky, M. Física. Trad. De Yusta, A. Ed. Aguilar S. A. Madrid, 1971.

[6] Wilhelmi, M., Godino, J. y Lacaste E. Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. Universidad Pública de Navarra. Pamplona, 2004.

[7] Zendejas, H. Matemáticas Financieras. Ed. Trillas. México DF, 1993.