

Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales

Patricia Sureda Figueroa^{1,2}, María Rita Otero,^{1,2}

psureda@exa.unicen.edu.ar , rotero@exa.unicen.edu.ar

¹NYECYT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

²Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET)

Resumen

En este trabajo se desarrollan algunas de las nociones centrales de la teoría de Vergnaud y se discuten algunos ejemplos. Se analiza en detalle la noción de esquema y se discuten algunas vinculaciones con la didáctica de la matemática.

Palabras clave: TCC, esquema, situación

Fundamental notions of the Theory of Conceptual Fields

Abstract

In this paper we develop some central ideas of Vergnaud's theory and we discuss some examples. The notion of scheme is analyzed in detail and some relationships with the didactics of mathematics are discussed.

Key words: Theory of conceptual fields, scheme, situation.

Notions fondamentales de la Théorie des Champs Conceptuels

Résumé

Dans ce travail on déroule certain centrales idées de la Théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud et on discute certains exemples. On analyse d'une manière détaillée la notion de schème et on discute quelques relations avec la didactique des mathématiques.

Mots clés: Théorie des champs conceptuels, schème, situation.

"El conocimiento racional es operatorio o no es tal conocimiento"

Vergnaud, 1990:2

1. Introducción

La cita de Vergnaud que colocamos en el encabezado, pretende ilustrar una de las ideas centrales de la *teoría de los campos conceptuales*, y de este trabajo. Vergnaud, discípulo de Piaget asume que el conocimiento es adaptación: asimilación y acomodación. Asimilación del

nuevo conocimiento al antiguo, y acomodación a lo que no ha sido previsto antes, es decir, a la contingencia. Así, el conocimiento racional es una construcción del sujeto para adaptarse al medio y reducir la incertidumbre, y como tal es operatorio. Pues si el conocimiento no genera acciones de adaptación que le permitan al sujeto actuar en situación, no es conocimiento. Porque el conocimiento es adaptación.

Las consecuencias que se desprenden de esta afirmación, resultan muy relevantes para quienes estamos interesados en la enseñanza de conceptos. Si se asume que toda acción destinada a la enseñanza pretende de manera más o menos explícita, que los alumnos aprendan aquel conocimiento considerado como relevante, es indispensable disponer de una teoría cognitiva para abordar este proceso.

La *teoría de los campos conceptuales* (Vergnaud; 1990, 1994, 1996, 2005, 2007a, 2007b, 2008, 2010) proporciona un marco coherente para comprender el proceso de *conceptualización*, cuando los alumnos del nivel medio estudian las funciones *exponenciales* y *logarítmicas*; debido a que sienta algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas..

El análisis de la *conceptualización*, que es a partir de los *esquemas* pasa inevitablemente por el análisis de la *actividad*, de la cual las conductas observables son una parte muy pequeña. Pero el análisis de la *conceptualización* de las *funciones exponenciales* y *logarítmicas* no puede llevarse a cabo, si no es a partir del análisis de las conductas observables, y en nuestro caso particular, de las resoluciones escritas de los alumnos cuando enfrentan un problema. Pues no es posible tener acceso directo a la parte no observable de la actividad. Sin embargo, el *esquema* aunque no es una conducta, tiene la función de generar la *actividad* y la conducta en *situación*. Y es por esto que es posible estudiar los componentes que permiten el funcionamiento del *esquema*, esto es, los *invariantes operatorios* mediante el análisis de las conductas.

A continuación se describen brevemente los constructos teóricos: *concepto*, *campo conceptual*, *actividad*, *conceptualización*, *situación*, *esquema*, *invariantes operatorios*, *conocimiento operatorio* y *conocimiento declarativo*; que resultan claves para el estudio de la *conceptualización* de los alumnos en situación; y se discuten las implicaciones de estos constructos teóricos en la enseñanza, en particular en la enseñanza de las *funciones exponenciales* y *logarítmicas* en la escuela media.

2. Concepto

Debido a que se está interesado en el aprendizaje de conceptos relativos a la *función exponencial* y

la *función logarítmica* en el nivel medio, se analiza primero la definición de concepto que brinda la teoría de los campos conceptuales. Al respecto, es importante considerar que un *concepto* es primeramente una construcción pragmática. Como tal, si se está interesado en su enseñanza y aprendizaje, no se debe reducir el *concepto* a su definición, pues es través de las *situaciones* y de los problemas que se pretenden resolver como un *concepto* adquiere sentido para el sujeto.

Por otra parte, los *conceptos* no toman su significación de una sola clase de *situaciones*, ni una *situación* se analiza con la ayuda de un solo *concepto*. Por ejemplo, el *concepto* de *función exponencial* se comprende a través de una diversidad de problemas prácticos (interés compuesto, decaimiento radiactivo, propagación de virus, evolución de poblaciones, etc.) y teóricos (análisis variacional, control de variables, etc.), que comportan relaciones y propiedades, cuya pertinencia es variable según las *situaciones* a tratar. Algunas de estas relaciones podrán comprenderse muy pronto, y otras mucho más tarde en el transcurso del aprendizaje. La *conceptualización* y el dominio de un campo conceptual, son procesos de largo aliento. Pero de todas maneras, la elaboración pragmática de un *concepto*, como puede ser el de *función exponencial* se construirá en solidaridad con otros conceptos, como por ejemplo el de variación exponencial, variación lineal, ecuación exponencial, logaritmo, potencia, dominio, imagen, etc. Es decir, se construirá siempre formando parte de un sistema, y como tal, no es posible estudiar su desarrollo de manera aislada.

Se destaca el carácter pragmático de la construcción del concepto, porque ésta pone en juego tanto el conjunto de *situaciones* que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, como el conjunto de los *esquemas* que el sujeto utiliza en estas *situaciones*. Sin embargo, este proceso de elaboración pragmática no prejuzga de ninguna manera el análisis del papel del lenguaje y del simbolismo en la *conceptualización*. La acción operatoria, no lo es todo en la *conceptualización* de lo real. No se debate la verdad o la falsedad de un enunciado totalmente implícito, y no se identifican los aspectos de lo real a los cuales es necesario prestar atención, sin la ayuda de palabras, enunciados, símbolos y signos. El uso de

significantes explícitos es indispensable para la *conceptualización*. Pues debido a que los *conceptos* se construyen apoyándose unos en otros, y que el lenguaje permite mejor que cualquier otro ese proceso de explicitación, se puede decir juntamente con Vigotsky, que la mediación a través del lenguaje, es un proceso ineludible en la enseñanza de las ciencias, pero no el único.

La contracara de esta aserción es que si se quiere considerar correctamente la medida de la función adaptativa del conocimiento, se debe conceder un lugar central a las formas que toma en la acción del sujeto. La enseñanza es irremplazable, pero debido a que el conocimiento racional es *operatorio* o no es tal conocimiento; el rol de la enseñanza no se puede limitar a poner en palabras el contenido conceptual de los conocimientos.

En este contexto, Vergnaud define al *concepto* como un triplete de tres conjuntos: C (S, I, Γ). Un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operatorios, y un conjunto de formas lingüísticas y simbólicas que constituyen los diferentes sistemas de representación.

- La referencia [S]: Es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto.
- El significado [I]: Es el conjunto de *invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)* sobre los cuales reposa la operacionalidad de los *esquemas*.
- El significante [Γ]: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el *concepto*, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

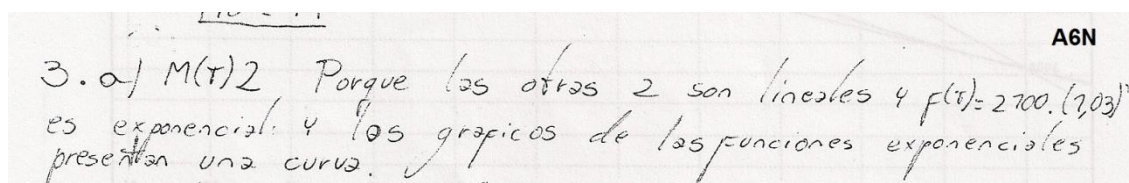
Este conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el *concepto*, de *función exponencial* con algunas de sus propiedades relativas a la situación, es el *significante* [Γ].

Respecto a esta definición, resulta relevante puntualizar que no se deben confundir los *significantes* con los *significados*. Y esto es así, porque las palabras utilizadas recobran muchos significados según la *situación* dentro de la cual se esté. Por otro lado, el sentido acordado por el sujeto se corresponde parcialmente, y a veces no del todo, al significado convencional de palabras y enunciados, o al que le da el profesor. Esto se debe a que no hay un homomorfismo directo, sino parcial, entre lo real y el lenguaje, incluido el científico.

Vigotsky quien en un principio definió al concepto como el "*significado de las palabras*" lo reformuló para introducir la idea de "*sentido*". Por su parte, Piaget tenía el hábito de decir que "*los sentidos, son los esquemas*". Pero debido a que es necesario distinguir entre los *significados* de la lengua y los *conceptos*, la *teoría de los campos conceptuales* aporta a estas ideas un complemento teórico cuando afirma que la *conceptualización* comienza con la acción en *situación*, y con la formación de *invariantes operatorios*. Pues serán ellos los responsables de diferenciar el *sentido* del *significante* de acuerdo a la *situación*.

Un ejemplo de la interacción entre estos conjuntos es el que se presenta a continuación relativo al estudio de las *funciones exponenciales*: se les dio a los alumnos de cuarto año del colegio secundario (15-16 años), la representación cartesiana de tres funciones; dos lineales y una exponencial. Los estudiantes conocían la expresión analítica $f(t) = 2100(1,03)^t$; la cantidad de dinero inicial (\$ 2100); y la cantidad de meses a la que el dinero había sido puesto a interés (23 meses). Se les solicitó determinar cuál de las curvas representaba la variación del dinero puesto a interés compuesto y justificar la elección.

Por otra parte se sabe que la referencia [S], es el conjunto de *situaciones* que le dan sentido al concepto. La siguiente es la resolución del alumno A6:



3. a) M(t)2 Porque las otras 2 son lineales y $f(t) = 2100(1,03)^t$ es exponencial. y los graficos de las funciones exponenciales presentan una curva.

A6N

Este alumno afirma sin hacer ninguna comprobación, que la curva tiene que ser $M(t)^2$. El protocolo destaca que la expresión analítica del interés compuesto corresponde a una función exponencial, por lo tanto su gráfica es *una curva y no una recta*. Luego, como $M(t)^2$ es la única curva que no es recta, infiere que tiene que ser ella. La inferencia es posible porque la única

función no-lineal que los alumnos conocían era la exponencial. Luego, cuando ellos estudian la función logarítmica se advierten cambios en la argumentación, indicando la intervención de otros esquemas más completos.

Los *invariantes operatorios* (conceptos y teoremas en acto) que parecen guiar esta resolución son los siguientes:

Conceptos en acto	Teoremas en acto
Función Lineales	TC4_{FL} : La representación gráfica de una FL es una recta.
Interés Compuesto	TA9_{IC} : El interés compuesto se expresa algebraicamente como una exponencial $f(t)=k \cdot a^t + b$.
Función Exponencial	TA3_{FE} : La representación gráfica de una FE no es una recta sino una curva.

Este conjunto de *invariantes operatorios* (*conceptos en acto y teoremas en acto*) sobre los cuales reposa la operacionalidad de los *esquemas* evocados por A6 para resolver esta situación, son el *significado* [I] del concepto de *interés compuesto*, relativo a esta *situación* y a este *significante*, en particular. Es destacable que ni los *significantes* ni la *situación*, evocan en el individuo todos los *esquemas* disponibles (por ejemplo, haber utilizado la expresión algebraica de f representándola en forma independiente, o haber calculado algunos valores para verificar y/o ofrecer un contraejemplo basándose en la lectura del gráfico, etc.). Es decir que esta situación relativa al interés compuesto, como una entre tantas otras que involucran a la *función exponencial*, no es su *sentido*, ni es el sentido de uno de sus símbolos en particular; sino el conjunto de *esquemas* que permiten diferenciar la gráfica del interés compuesto, de las otras. Y a su vez, esto es apenas un subconjunto, de todos los *esquemas* disponibles en el sujeto, relativos a la *función exponencial*.

El ejemplo muestra que no existe una biyección entre los *significantes* [Γ] y los *significados* [I], ni entre los *significados* [I] y las *situaciones* [S]; y que por lo tanto no es posible reducir el *significado* ni a los *significantes* ni a las *situaciones*, pues el *significado* viene dado por ambos. Si se quiere estudiar el desarrollo de un *concepto*, se deberán considerar estos tres planos a la vez.

3. Campo Conceptual

Debido a que un concepto no se forma aislado sino en conjunto con otros, es posible afirmar que los conceptos de *función exponencial* y *función logarítmica* se desarrollan juntos, en un largo período de escolaridad, al interior de una gran variedad de *situaciones*, y en relación con numerosos otros conceptos. Así, el *campo conceptual* de las *funciones exponenciales* es a la vez, el conjunto de las *situaciones* cuyo tratamiento implica una o más *funciones exponenciales*, y el conjunto de *conceptos y teoremas* que permiten analizar estas *situaciones* como tareas matemáticas.

Así, a la hora de estudiar el *campo conceptual* de las *funciones exponenciales y logarítmicas*, resultará fundamental analizar qué *situaciones* favorecen su conceptualización, ya que la resolución de las *situaciones* es la que permite analizar las tareas cognitivas y los procedimientos que pueden ser puestos en juego en cada una de ellas. Las *situaciones* se encuentran así, en la base de la *conceptualización* de un *campo conceptual*.

4. Conceptualización y Actividad

La *conceptualización* es un proceso que forma parte de la *actividad* y está dirigido a reducir la incertidumbre que genera el enfrentarse a situaciones, sean estas nuevas o conocidas. Así, mientras la *actividad* refiere a los gestos, los conocimientos y competencias científicas y técnicas, la interacción con los otros, las

competencias lingüísticas, las competencias afectivas, etc.; la *conceptualización* puede ser definida como la construcción, o la identificación directa o cuasi-directa de los objetos del mundo, de sus propiedades, relaciones y transformaciones (Vergnaud, 2007b: 299). Así, el análisis de la *conceptualización*, que es a partir de los *esquemas* pasa inevitablemente por el análisis de la *actividad*, de la cual las conductas observables son una parte muy pequeña. Pero el análisis de la *conceptualización* de las *funciones exponenciales y logarítmicas* no puede llevarse a cabo, si no es a partir del análisis de las conductas observables. Pues no es posible tener acceso a la parte no observable de la actividad. Sin embargo, el *esquema* aunque no es una conducta, tiene la función de generar la *actividad* y la conducta en *situación*. Y por esto es que resulta posible estudiar mediante el análisis de las conductas, los componentes que permiten el funcionamiento del *esquema*, esto es, los *invariantes operatorios*.

5. Situación y Esquema

El concepto de *situación* es muy importante dentro de la *teoría de los campos conceptuales* debido a que los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto, son en función de las *situaciones* a las cuales son confrontados.

El concepto de *esquema* es juntamente con el de *situación* uno de los más importantes de la teoría de los *campos conceptuales* debido a que son los *esquemas* quienes se adaptan a las *situaciones*, y no el sujeto al objeto, como había formulado Piaget.

Aunque este concepto había sido ya propuesto por Kant, cuando lo empleó para las cuestiones de espacio y tiempo, y más tarde reformulado por algunos filósofos neo-kantianos; fue Piaget quien dio el paso decisivo en dirección de la *actividad* al proponer al *esquema* como instrumento de asimilación y acomodación. Vergnaud retoma esta noción de *esquema* que proponía Piaget y lo amplía a la vez que se aparta de la idea lógica de este constructo, para centrarse más en su aspecto pragmático. Así, para Vergnaud los *esquemas* son pragmáticos en el sentido de que funcionan para la adaptación y la acción operatoria del sujeto. Los *esquemas* se acomodan a las *situaciones* pues se relacionan con las características de las *situaciones* a las cuales se aplican y son funcionales a estas.

Las definiciones que Vergnaud propone de *esquema* son las siguientes:

1. Un esquema es una totalidad dinámica funcional.
2. Un esquema es una organización invariante de la *actividad* para una clase definida de *situaciones*.
3. Un esquema comprende necesariamente cuatro categorías de componentes:
 - -una meta (o varias), sub-metas y anticipaciones.
 - -reglas de acción, de toma de información y de control.
 - -invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)
 - -posibilidades de inferencia.
4. Un esquema es una función que toma sus valores de entrada en un espacio temporalizado de n dimensiones, y sus valores de salida en un espacio igualmente temporalizado a n' dimensiones (n y n' muy grandes).

La primera definición se podría decir que es la que fue heredada de Piaget, ya que se corresponde con las reflexiones que él hacía del *esquema* como una forma dinámica, próxima de lo que los gestaltistas habían reconocido para la percepción (Vergnaud, 2007b:292).

La definición de *esquema* como la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada, va un poco más lejos que la primera, y le fue sugerida a Vergnaud por el concepto de algoritmo. El algoritmo es una regla que permite tratar todos los problemas de una cierta clase, asegurando en un número finito de pasos bien una solución, o bien mostrando que no hay solución. Los algoritmos son *esquemas*, pero no todos los *esquemas* son algoritmos. Los *esquemas* son objetos del mismo tipo lógico que los algoritmos pero sin la seguridad de la efectividad, es decir, sin la propiedad de lograr el objetivo con seguridad, y en un número finito de pasos.

Los *esquemas* son frecuentemente *eficaces*, pero no siempre *efectivos*. Cuando un niño utiliza un *esquema* ineficaz para una cierta situación, la experiencia le conduce bien a cambiar de *esquema*, bien a modificar este *esquema*. En este punto resulta relevante destacar que es la organización de la actividad la que es invariante, no la actividad misma, pues el *esquema* no es un estereotipo. Por otra parte como el *esquema* se

dirige a una clase de situaciones, es un universal; incluso si esta clase de situaciones es pequeña, como es el caso en los primeros momentos de comprensión de un *campo conceptual* nuevo.

La tercera definición, superadora de las ideas de Piaget, Vygotsky, y Bruner; es analítica, y resulta ser fundamental para el análisis de la *actividad* en general, y de la *conceptualización* en particular. A continuación se describen cada uno de sus componentes.

METAS, SUB-METAS, Y ANTICIPACIONES

Aunque la *meta* no sea plenamente consciente, o si hay varias en la misma *actividad* (por ejemplo la elección de tres valores para evaluar en una función dentro de una actividad de representación gráfica en ejes cartesianos) siempre es posible identificar una intencionalidad en la organización de la *actividad*, con su cortejo de *sub-metas* y *anticipaciones*. Este primer componente representa en el *esquema* lo que se llama a veces la intención, el deseo, la necesidad, la motivación, la espera. Pero ninguno de estos conceptos es por sí sólo un *esquema*, por lo cual resulta esencial integrar la meta, la intención y el deseo en el mismo concepto de *esquema*. Por otra parte, y debido a que la *actividad* responde a una organización que es simultánea y secuencial a la vez, la *meta* se divide en *sub-metas* y *anticipaciones*. Un ejemplo que ilustra la organización simultánea y secuencial de la *actividad*, es la construcción gráfica en ejes cartesianos de la variación del dinero, a partir del cálculo de dos o tres valores:

- *Organización Secuencial*: elección de los valores, evaluación de la expresión analítica en los valores seleccionados, cálculos, trazado de la gráfica;
- *Organización Simultánea*: gestos y movimientos coordinados de las diferentes partes del cuerpo, en el momento del cálculo, la escritura y el trazado del gráfico, por ejemplo;

Las *metas*, las *sub-metas* y las *anticipaciones* preceden y acompañan el movimiento, y son objeto por parte del estudiante de un control casi permanente mientras se lleva a cabo la acción. La resolución de una ecuación puede también ser analizada de la misma manera, como una organización secuencial y simultánea de la *acción*, de la *toma de información* y del *control*.

REGLAS DE ACCIÓN, DE TOMA DE INFORMACIÓN Y DE CONTROL

Las *reglas*, tienen la función teórica de expresar el carácter generativo del *esquema*. Ya que son las *reglas* las que permiten asir la manera en que la *actividad* va siendo generada poco a poco. Las reglas de acción engendran no sólo las conductas observables, como por ejemplo la clase de escrituras dentro de la resolución de un sistema de ecuaciones; sino toda una *actividad* que no es directamente observable. La *selección de información* y los *controles* que permiten la modificación de la conducta en situación y comprenden el retroceso, si esta no es posible, también es generada por las reglas de acción. La relevancia de reconocer las diferentes funciones de las *reglas* y de los procesos de regulación permite diferenciar las *reglas de acción* que propone esta teoría, de la visión conductista. Aunque es el concepto de *invariante operatorio* el que permite ir más lejos en el análisis, justamente porque introduce la cuestión de la *conceptualización*.

Las reglas son el componente del *esquema* por la cual ingresan las condiciones y las variaciones. *SI* tal variable de situación tiene tal valor, y *SI* tal otra variable de situación tiene tal valor... *ENTONCES* la *acción X*, la *toma de información Y*, o el *control Z* deben ser efectuados. Es decir, a las reglas siempre se les puede dar la forma de reglas condicionales de tipo "si... entonces". Desde luego esta formalización corresponde a la teoría, no al sujeto mismo, ya que salvo alguna excepción, para él las *inferencias* y las reglas quedan casi siempre implícitas, y hasta a menudo inconscientes (Vergnaud, 2008). Un ejemplo de esto es cuando se les pide a los trabajadores talentosos, a los expertos, a los enseñantes o a los alumnos; que expliquen por qué y cómo han hecho esto o aquello. Su respuesta acerca de los razonamientos condicionales que realizan en el camino es generalmente evasiva. Ellos tienen tendencia a devolver un conjunto lineal de acciones. Se hace esto, después aquello, mas adelante esto, pero se olvidan que a cada momento una o muchas condiciones han precedido la elección realizada. Es decir, la *actividad* no se ha generado en forma lineal, sino secuencialmente, y con la participación secuencial y simultánea de la *selección de información* y el *control*. Así

, el concepto de *regla de acción* es insuficiente para analizar la *actividad*.

Si ahora se trata de comprender qué tipo de relación existe entre las condiciones de la *actividad* y las formas que ella toma, se encuentra inevitablemente la pregunta por la *conceptualización*. Aún si existieran regularidades entre las condiciones introducidas por el SI...y la conducta introducida por el ENTONCES (*acciones, selección de información y controles*), no es el concepto de sucesión regular el que puede permitir por sí mismo, conocer las razones que relacionan las diferentes condiciones posibles, con las diferentes actividades que les están asociadas. Si esto fuera así se estaría todavía dentro asociacionismo behaviorista, cuyos efectos devastadores sobre la psicología y la didáctica no pueden terminar de medirse. La existencia de relaciones conceptuales entre condiciones y actividades es el argumento esencial para introducir dentro del concepto de *esquema* esta componente epistémica que son los *conceptos y teoremas en acto*. El *esquema* es *conceptualización* o no es.

INVARIANTES OPERATORIOS: CONCEPTO EN ACTO Y TEOREMA EN ACTO

Los *invariantes operatorios* forman la parte más epistémica del *esquema*, la que tiene la función de identificar y reconocer los objetos, sus propiedades, sus relaciones, y sus transformaciones. La función principal de los *invariantes operatorios* es tomar y seleccionar la información pertinente, e inferir luego, las consecuencias útiles para la acción, el control y la toma de información. Es entonces una función de *conceptualización* y de *inferencia*. En este aspecto, la teoría de los campos conceptuales se aparta totalmente de un modelo de tipo: "*información luego acción*", ya que propone que los *esquemas* administran en forma entremezclada la continuación de las acciones, las tomas de información y de los controles. La eficacia del *esquema* se construye gradualmente y a medida.

Por definición, un *concepto en acto* es una categoría pertinente, y como tal no es susceptible de verdad o falsedad, sino solamente de la pertinencia o de la no pertinencia. En cambio, un *teorema en acto* es una proposición tenida por verdadera en la *actividad*. La relación entre *teoremas* y *conceptos* es dialéctica, en el sentido que no hay *teorema* sin *conceptos* y no hay

concepto sin *teorema*. Metafóricamente se puede decir que los *conceptos en acto* son los ladrillos con los cuales los *teoremas en acto* son fabricados, y que la sola razón de existencia de los *conceptos en acto* es justamente permitir la formación de *teoremas en acto*, a partir de los cuales se hace posible la organización de la *actividad* y las *inferencias*. Recíprocamente, los *teoremas en acto* son constitutivos de los *conceptos* ya que, sin proposiciones tenidas por verdaderas, los *conceptos* estarían vacíos de contenido. Pero es importante reconocer que un *concepto en acto* siempre está constituido por varios *teoremas en acto*, cuya formación puede espaciarse en un largo período del tiempo, en el curso de la experiencia y del desarrollo. El estudio del desarrollo de las competencias durante el aprendizaje muestra que el mismo *concepto* puede, según el estado de su elaboración, ser asociado con *teoremas* más o menos numerosos, más o menos ricos, y hasta eventualmente falsos. La comitiva de *teoremas en acto* susceptible de ser asociada con un mismo *concepto*, es en general muy grande, y también lo es en particular, en las disciplinas científicas y técnicas. De este modo declarar que un alumno comprendió tal concepto no tiene mucho sentido. Pues para saber si un alumno comprendió tal concepto, es necesario precisar cuál *teorema en acto* fue capaz de utilizar en la acción (Vergnaud, 2008).

Por otra parte, resulta relevante explicar que un *concepto en acto* no es un concepto, ni un *teorema en acto* un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad. Este no es necesariamente el caso para los *invariantes operatorios*. Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la *conceptualización*; pero sin la parte escondida formada por los *invariantes operatorios*, esta parte visible no sería nada. Estos *invariantes operatorios* (*conceptos en acto* y *teoremas en acto*), son en particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los *esquemas* debido a que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una *situación* (Vergnaud, 1990). En consecuencia, las decisiones que tome un alumno ante una determinada *situación* van a depender del *esquema* activado, pero más

específicamente de los *conceptos en acto* y *teoremas en acto* de los que disponga el sujeto para enfrentar la situación.

Cuando los *conceptos y teoremas en acto* se hacen explícitos, se convierten en objetos de reflexión acerca de los cuales se puede discutir su validez, pues se los aproxima a los conocimientos científicos. Por otra parte, todos los conocimientos científicos tienen sus raíces en *teoremas y conceptos en acto*, que son la base de toda la *conceptualización*. Y como el carácter del conocimiento cambia si éste es comunicable, debatido y compartido, estos *conceptos*, son en cierta medida, descontextualizados de las *situaciones* en las que se generaron. Por ejemplo, las *funciones* son conceptos, pero para que estos sean explicitados como objetos matemáticos ha tomado muchos siglos de la actividad matemática. Sin embargo, las *funciones* han estado trabajando como conceptos en acción desde la Antigüedad, ya que no se puede abordar sin ellos ni la aritmética ordinaria, ni la geometría. Las transformaciones son, evidentemente, *funciones*. Pero es recién con Descartes y Leibniz que las *funciones* son realmente estudiadas como *funciones* (Vergnaud, 2008).

LAS INFERENCIAS son relaciones entre propuestas, y están encadenadas por metateoremas (o teoremas de orden superior) como los silogismos aristotélicos, o el carácter transitivo de las relaciones de orden: $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$ (Vergnaud, 2008). Este último componente del *esquema* es indispensable para la teoría, justamente porque la *actividad* en situación jamás es automática, sino que al contrario, está regulada por las adaptaciones locales, los controles, los ajustes progresivos, etc. Las *inferencias* están presentes en todas las *actividades* en situación, porque jamás pasa que una acción sea puesta en marcha por una situación-estímulo, y proceda luego de manera totalmente automática, es decir sin control y sin toma de nueva información. Es posible en teoría, pero las observaciones muestran que esto puede concernir sólo a segmentos muy pequeños de la *actividad*, donde la funcionalidad no viene de otros lugares sino de los *esquemas* y son su parte integral. Las posibilidades de *inferencia* inmediata resultan entonces, necesarias, pues ellas permiten la

adaptación de la *actividad* a la situación presente.

La función de una inferencia es la de generar una sentencia tenida como verdadera, formada por antiguas sentencias tenidas por verdaderas. La transitividad, de las relaciones de orden mencionadas más arriba, ofrece uno de los ejemplos más simples de inferencias. Pero los cálculos numéricos y no numéricos son inferencias. En realidad, las reglas de acción son por lo general generadas por inferencias, y pueden ser expresadas por sentencias; pero mientras la función de las reglas de acción es pragmática, la de las inferencias puede separarse de las acciones, como es el caso de las deducciones.

A continuación se analiza mediante estos cuatro elementos constitutivos del *esquema*, la respuesta que formula el alumno A2 a una situación de estudio relativa a las funciones exponenciales. Se trata de entender cómo varía el monto cuando dinero cuando es puesto a interés compuesto, y se les dio a los alumnos luego de conversar con ellos cómo se calculaba el dinero puesto a interés compuesto.

Un grupo de chicos tiene \$12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del Banco 1 es de 0,011 y les permite tener \$12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del Banco 2 es de 0,012 y les permite tener \$12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del Banco 3 es de 0,013 y les permite tener \$12156 cumplido el primer mes.

Las tres tareas que se les solicitaban, decían así:

- ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?
- Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.
- ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?

La respuesta que el alumno A2 escribe para la segunda tarea, y a la que es posible denominar *Meta 2*, es la siguiente: Realizar un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.

A2N

b) Banco 1: $12000 + [(12000 \cdot 0,011) \cdot 2] = 12264$
 $= 12000 + [(12000 \cdot 0,011) \cdot 3] = 12396$
 $= 12000 + [(12000 \cdot 0,011) \cdot 12] = 13584$
 Banco 2: $12000 + [(12000 \cdot 0,012) \cdot 2] = 12288$
 $= 12000 + [(12000 \cdot 0,012) \cdot 3] = 12432$
 $= 12000 + [(12000 \cdot 0,012) \cdot 12] = 13728$
 Banco 3: $12000 + [(12000 \cdot 0,013) \cdot 2] = 12312$
 $= 12000 + [(12000 \cdot 0,013) \cdot 3] = 12468$
 $= 12000 + [(12000 \cdot 0,013) \cdot 12] = 13872$

No se advierte una elección representativa de los valores a graficar. Ya que si el dinero ha sido puesto a treinta meses, una elección más espaciada de los valores derivaría en un gráfico más aproximado.

En esta resolución es posible advertir en principio tres sub-metas para cada banco:

Sub-meta 1: elegir el valor que se va a graficar.

Sub-meta 2: calcular el monto para el mes elegido.

Sub-meta 3: graficar aproximadamente el punto en los ejes cartesianos dados.

Estas tres sub-metas parecen funcionar secuencialmente para cada uno de los valores que se van eligiendo; ya que la elección de calcular el mes 12, cuando se han calculado los valores de dinero para los meses 1, 2, y 3; parece haber sido tomada a posteriori y como consecuencia de un control en la gráfica. Una vez graficados los puntos, éstos son unidos mediante una recta. Finalmente, cuando se le pregunta al alumno ¿a qué gráfica corresponde la representación gráfica que dibujó? Él responde que corresponde a una *función lineal*.

El análisis conjunto de todas las respuestas permite concluir que los invariantes operatorios que guían toda la resolución de éste alumno, son los relativos al interés simple y a la función lineal. En consecuencia, la información que el profesor ofreció sobre el interés compuesto y su forma de calcularlo antes de la situación, no resultó

relevante para el alumno, pues el utiliza un esquema lineal, como si la situación hubiera sido conocida y no nueva.

Un análisis más profundo del *esquema* utilizado por el sujeto en esta *situación*, implicaría analizar el resto de los componentes del *esquema*; pero como los componentes del *esquema* no funcionan sólo en forma secuencial, sino también en forma simultánea y sin un orden establecido; la descripción de qué selecciones de información, inferencias o controles han sido efectuados por el sujeto en *situación* (dentro del vasto repertorio que puede tener disponible), puede ser sólo parcial y limitada.

Aun así, la siguiente tabla pretende ser, a modo de ejemplo, una reconstrucción limitada y parcial del resto de los componentes del *esquema* para dos de las *sub-metas*.

La selección de la *sub-meta 2*, relativa al cálculo del dinero para el segundo mes se debe a la inferencia que el alumno hace entre lo conocido por él, que es la expresión que le permitió calcular el dinero para el primer mes; y lo desconocido que es la expresión que le permitirá calcular el dinero para el segundo mes.

La selección de la *sub-meta 3* relativa a la construcción gráfica del tercer punto en la gráfica se debe al cambio de estrategia que hace el alumno, para tratar de asegurarse una gráfica aproximada de la variación del dinero.

Sub Meta	Selección de la Información	Invariantes Operatorios	Herramienta de Control	Regla de Acción	Inferencia
SM2	Mes 2 Monto inicial: 12000 Tasa de interés: 0,011	Teorema en acto: El modelo es lineal.	La expresión: $12000 + [(12000 \cdot 0,011)]$ permite calcular efectivamente el dinero para el mes 1.	Si la expresión $12000 + [(12000 \cdot 0,011)]$ permite calcular efectivamente el dinero para el mes 1 entonces tiene que servir para calcular los meses restantes.	Mes 1 $12000 + [(12000 \cdot 0,011)]$, \Rightarrow Mes 2 $12000 + [(12000 \cdot 0,011) \cdot 2]$,
SM3	Mes 3 Valor del dinero para el mes 3: 12396	Teorema en acto: El modelo es lineal.	Los primeros tres valores no alcanzan para hacer una gráfica aproximada	Si los primeros tres valores no alcanzan para hacer una gráfica aproximada de la	La gráfica es una recta.

			de la variación del dinero en 30 meses.	variación del dinero en 30 meses, entonces hay que calcular algunos valores más grandes.	
--	--	--	---	---	--

Sin los cuatro componentes del *esquema* mencionados, no es posible comprender plenamente la estructura de la *actividad*, y su doble característica de ser a la vez *sistemática* y *contingente*:

- *Sistemática* porque, en muchas situaciones, la *actividad* es sometida a reglas unívocas. Por ejemplo, los algoritmos que se utilizan para calcular los valores del dinero para cada mes, o para resolver ecuaciones, o buscar el máximo común múltiplo; son ejemplos del carácter sistemático de los *esquemas*. También los procedimientos impuestos a los operadores en ciertos puestos de trabajo como el pilotaje de aviones, o de sistemas peligrosos como las centrales nucleares corresponden a este tipo de *esquemas*.

- *Contingente* porque las reglas engendran actividades y conductas diferentes según las situaciones que se pueden presentar. Esta contingencia de la *actividad*, es todavía más brillante para las situaciones nuevas, cuando el sujeto no dispone de un *esquema* en su repertorio, y debe improvisar los medios para hacerle frente. La contingencia da lugar entonces al *oportunismo*, y el sujeto deberá utilizar todos sus recursos cognitivos, es decir de los *esquemas* anteriormente formados susceptibles de abrir un camino en busca de la solución.

Así, gracias a la articulación estrecha de sus cuatro componentes, el concepto de *esquema* aporta una respuesta a la adaptación de los sujetos a las situaciones nuevas (y a la resolución de problemas), pero son los *invariantes operatorios* quienes aseguran su función esencial de *conceptualización* y adaptación a la novedad. De hecho, en el ejemplo anterior, son los *invariantes operatorios* ligados al modelo lineal los que guían toda la acción del sujeto en situación.

La cuarta y última definición permite aproximarse a la idea de algoritmo y de programa informático; a la vez que expresa bien la idea que el *esquema* es una función compleja (Vergnaud, 1990). Es decir, si se piensa en *esquemas* como formas de pasar de ciertos valores de las variables de situación a determinados valores de las acciones

(en el sentido amplio de percepción, razonamiento activo y actividad), entonces los *esquemas* son *funciones* y puede ser estudiado como tal, como es el caso en ciencias de la computación. Esta cuarta definición se refiere explícitamente al concepto de *función* (cartografía) (Vergnaud, 2008).

Un aspecto de los *esquemas* que resulta relevante puntualizar tiene que ver con la diferencia en la adaptación de los *esquemas* a las situaciones según éstas sean reconocidas por el sujeto como nuevas o conocidas:

Situaciones conocidas: Cuando el sujeto se enfrenta a una clase de *situaciones* para las cuales él dispone en su repertorio de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de esa situación, como es el caso presentado más arriba (en el cual, aun cuando la situación era nueva, no fue considerada como tal por el sujeto), es posible observar que para esa misma clase de situaciones, las conductas son muy automatizadas, y organizadas por un *esquema* único.

Situaciones nuevas: Pero cuando el sujeto se enfrenta a una clase de situaciones nuevas (o considerada por él como nueva), como es el ejemplo que sigue del alumno A2 en situación de resolución de un problema de contagio, la observación y el análisis de sus dudas y de sus errores; muestra que las conductas en situación abierta son igualmente estructuradas por los *esquemas*. Estos son tomados del vasto repertorio de *esquemas* disponibles, y especialmente de los que están asociados a las clases de situaciones que parecen tener una semejanza con la *situación* tratada actualmente. Pero como la semejanza no es sino parcial y eventualmente ilusoria, los *esquemas* son solamente esbozados, y las tentativas se interrumpen antes de haber sido concluidas; se pueden evocar sucesivamente varios *esquemas*, e incluso simultáneamente. Así, en este segundo caso, es posible observar el esbozo sucesivo de dos *esquemas*, que pueden entrar en competición y que para llegar a la solución buscada, deberán ser acomodados, separados y recombinados. Este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos.

A2N

a) 1.5^t
 5^t

1 word = 5 P.: $5^1 = 5$
 2 words = 25 P.: $5^2 = 25$
 3 words = 125 P.: $5^3 = 125$

No!

Pizarra

$E(t) = 3 \cdot 5^{t^2} = 75$ → cant. de palabras imp. x ≠ words

$E(t) = 3(1+0,8)^{t^2} = 19,72$

$F(t) = 3 + (5 \cdot t) = 13$

$e(t) = 3 \cdot 5^t + 3$

1 word: 15 p.
 2 words: 75 p.
 3 words: 375 p.

Es lo que sigue al cuento en el pizarrón.

$3 \cdot 5^1 + 3$
$3 \cdot 5^2 + 3$
$3 \cdot 5^3 + 3$

El análisis de los *esquemas* pasa inevitablemente por el análisis de las conductas, pero el *esquema* no es una conducta, sino un constituyente de la representación, cuya función es generar la actividad y la conducta en situación. Se debe pues analizar los componentes que permiten el funcionamiento del *esquema*. Sin embargo, aun cuando el análisis de la *conceptualización* descansa en el análisis de los *esquemas*, y más específicamente en el de los *invariantes operatorios*; se sabe que los otros registros de la *actividad*, como los gestos, los conocimientos y competencias científicas y técnicas, la interacción con los otros, las competencias lingüísticas, la afectividad, etc.; pueden jugar un gran rol. Algunas personas, por ejemplo, se sorprenden cuando se vincula la conceptualización con la afectividad; sin embargo, diversas investigaciones muestran, no solamente su importancia en las relaciones entre personas, sino también sus efectos sobre la eficacia de la *actividad* (Vergnaud, 2007b:288). Por ejemplo, mientras McLeod (1989) señala que los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas, son particularmente susceptibles al influjo del ámbito afectivo; Richardson y Woolfolk (1980) aluden a la relación entre la ansiedad y el rendimiento académico en matemáticas; y Callejo (1994), le otorga a la

afectividad un papel muy importante en la resolución de problemas.

6. Forma Predicativa y Operatoria del Conocimiento

Dado que la parte más importante del conocimiento de una persona consiste en competencias que no se pueden poner fácilmente en palabras, pero que permiten la acción del sujeto en situación; Vergnaud describe al conocimiento como formado por dos partes: la *forma operatoria* y la *forma predicativa*. La *forma operatoria del conocimiento*, es la que permite actuar en situación (y eventualmente tener éxito), mientras que la *forma predicativa del conocimiento*, es la que enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones.

Por ejemplo, en la siguiente resolución presentada por el alumno A13 relativa al cálculo de la cantidad de dinero que se tendrá en el banco al cabo de un mes, cuando son puestos a interés compuesto \$ 12000 a una tasa del 1,1%; es posible inferir la existencia de conocimientos y relaciones (no explícitas) que le permiten a este alumno actuar en situación (forma operatoria del conocimiento).

BANCO A. $12000 \times 0,011 = 132$
 $132 + 12000 = 12132 \rightarrow$ PRIMER MES

Mientras que en la siguiente resolución, del mismo alumno, se describe el procedimiento del cálculo que se presenta arriba (forma predicativa)

a) 12132. Total del primer mes
Se calcularon haciendo el monto inicial por la tasa de
interés y el resultado sumado al monto inicial

Este cuestionamiento teórico de la relación entre la *forma operatoria* y la *forma predicativa* del conocimiento, se debe a que la complejidad no está sólo en el hacer, sino también en el decir. La enunciación es esencial en el proceso de *conceptualización*. Pero dadas las dificultades encontradas por los alumnos en el aprendizaje de la matemática, es posible colocar casi al mismo nivel, por un lado la complejidad de las *situaciones* y de las operaciones de pensamiento necesarias para tratarlas, y por otro, la complejidad de ciertos enunciados y simbolismos matemáticos. A tal punto que algunos investigadores colocan las dificultades de las matemáticas en el lenguaje. Sin embargo, las matemáticas no son un lenguaje sino un conocimiento. Y el *conocimiento* como tal, es adaptación: asimilación y acomodación. Asimilación del nuevo conocimiento al antiguo, y acomodación a lo que no ha sido previsto antes, es decir, a la contingencia. El carácter implícito de una gran parte del conocimiento de las personas no significa que el conocimiento explícito no sea operacional. Pero las rupturas que existen entre las *formas operatorias* y las *formas predicativas* de los conocimientos matemáticos, engendran dificultades para los alumnos. Rupturas de las cuales todavía, se tiene escaso conocimiento.

7. Algunas Vinculaciones con la Didáctica

Como se describió a lo largo de este trabajo, la *teoría de los campos conceptuales* reposa sobre un principio de elaboración pragmática de los conocimientos, que considera tanto la importancia del sentido de las situaciones como el de los símbolos en el aprendizaje de las matemáticas. Para esta teoría, no existe una biyección entre los *significantes* [Γ] y los *significados* [I], ni entre los *significados* [I] y las *situaciones* [S]; sino que el *significado* de un concepto viene dado por ambos. La relevancia de la construcción pragmática del concepto, reside en que ésta pone en juego tanto el conjunto de *situaciones* que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, como el conjunto de los *esquemas* puestos en juego por los sujetos en estas *situaciones*. Por eso, más allá de que la enseñanza es irremplazable, ésta no puede limitarse a poner en palabras el contenido conceptual de los conocimientos, pues al igual

que los textos, las palabras sólo dan cuenta imperfectamente del conocimiento operatorio que se pone en acto en situación. La acción operatoria del sujeto en *situación* es tan indispensable para la *conceptualización* como lo es el uso de significantes explícitos, debido a que es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver como un concepto adquiere sentido para el niño. De aquí que el primer acto de mediación del profesor sea para la *teoría de los campos conceptuales*, la elección de la *situación* a proponer a los alumnos (Vergnaud, 2007:187).

La *situación*, dice Vergnaud (1999:8), tiene el carácter de *tarea*. Así, la noción de *situación* parece ajustarse a las ideas de tarea, meta u objetivo. En este contexto, como una meta, objetivo o tarea es factible de desglosarse en sub tareas o sub metas es posible conocer en parte, su naturaleza y dificultad. La dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes subtareas, pero el fracaso en una sub tarea implicará el fracaso global. Así, tendrán carácter de *situación* (tarea): saltar una valla; podar de una viña; resolver una ecuación; calcular una integral; resolver un problema de interés compuesto, analizar la variación de parámetros de la familia de funciones exponenciales, etc. En este contexto, pareciera que la idea que Vergnaud propone de *situación* está muy cerca de la noción de *tipo de tarea* que propone Chevallard (1990) en la *teoría antropológica de lo didáctico* cuando dice:

“[...] la noción de *tarea* o, mejor, de *tipo de tareas*, supone un objeto relativamente preciso. Subir una escalera es un *tipo de tarea*, pero subir, simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un *tipo de tareas*, pero calcular, simplemente, es lo que se llamará un *género de tareas*, que pide un determinativo”. (Chevallard, 1990:2).

Luego, Chevallard (1990:3) agrega:

“Sea pues *T* un tipo de tareas *dado*. Una praxeología relativa a *T* requiere (en principio) una *manera* de realizar las tareas $t \in T$: a una determinada *manera de hacer*, \hat{o} ,

se le da aquí el nombre de *técnica* (del griego *tekhnê*, saber hacer)”.

Nótese que en este punto, *la teoría antropológica de lo didáctico* liga la noción de técnica a la de *saber hacer*; que en principio parecería muy cercano a la de *acción operatoria* del sujeto en situación, pero sin la connotación cognitiva que le da la *teoría de los campos conceptuales*. Sin embargo este *saber hacer* refiere únicamente a la resolución explícita de la tarea, mientras que en la *teoría de los campos conceptuales* la resolución explícita que el sujeto formula, es apenas una parte de la acción operatoria del sujeto, durante el proceso de resolución. El análisis de las *técnicas* (saber hacer) puestas en juego por los alumnos para resolver un tipo de tareas dado, resulta sin embargo fundamental, para el análisis de la *conceptualización*. Así, es posible analizar las *técnicas* utilizadas para realizar las tareas $t \in T$ como consecuencias de un cierto sub conjunto de *esquemas*, y en particular de *invariantes operatorios*, relativas a los conceptos y teoremas necesarios para resolver la tarea.

La *situación didáctica* por su parte, es definida como una puesta en escena interesante y rica que involucra además de la *situación* (tarea), el análisis de la dificultad relativa de las tareas cognitivas involucradas en la resolución de la *situación*, el reconocimiento de los obstáculos que habitualmente se encuentran, el repertorio de procedimientos disponibles por el sujeto para abordar la *situación*, la significación social de los dominios de experiencia a los cuales hace referencia, y la puesta en escena. De esta última, destaca la importancia de considerar los juegos de roles entre los actores de la *situación didáctica*, resortes del juego, del contrato y de la transposición (Vergnaud, 1990: 14). Sin embargo aunque *la teoría de los campos conceptuales* no profundiza en estos aspectos más “didácticos”, es totalmente compatible con una enseñanza de la matemática basada en la construcción de respuestas a situaciones que plantean preguntas (Vergnaud, 1990:1).

En particular, *la teoría antropológica de lo didáctico* propone dos dispositivos: AEI (*actividades de estudio e investigación*) y REI (*Recorridos de Estudio e Investigación*) (Chevallard, 2004), para enfrentar el proceso de *monumentalización* del saber, y para hacer vivir lo que Chevallard denomina la pedagogía de la Investigación en la clase de Matemática. Ambos

dispositivos se preocupan por la reconstrucción funcional de los conocimientos matemáticos como respuesta a ciertos tipos de situaciones problemáticas.

En este contexto, tanto la psicología cognitiva como la didáctica resultan esenciales para el diseño de cualquier dispositivo de enseñanza. Pues, mientras el marco teórico didáctico brinda sustento a las decisiones relativas a la AEI en los procesos de topogénesis, cronogénesis y mesogénesis; el marco cognitivo permite el análisis de la conceptualización y el papel de la afectividad en el aprendizaje. En consecuencia, abogamos por la integración de estos referenciales en una cooperación teórica posible y necesaria.

8. Referencias Bibliográficas

BARQUERO, B. (2009) *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*, Tesis Doctoral, UAB.

BROUSSEAU, G. (1986) *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 33-115.

CALLEJO, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid, Narcea.

CHEVALLARD, Y. (2008-2009) « *Didactique Et Activités Éducatives* » Introduction a la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) [À paraître] http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=143 téléchargée le 21-05-2010.

CHEVALLARD, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, pp. 221-266.

DOUADY, R. (1986): *Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5-31.

M CLEOD, D. B. (1989): « *The role of affect in mathematical problem solving.*», en D. B. MCLEOD y V.M. ADAMS (eds.): *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York: Springer-Verlang, pp.20-36.

OTERO, R. (2010): « *La Notion de Situation: analyse depuis la Théorie des Champs Conceptuels, la Théorie des Situations, la Dialectique Outil-Object et la Théorie Anthropologique du Didactique* ». 5 (1) pp. 42-53.

pp. 124-138

Disponible en:
<http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/nro-5-volumen-1>.

RICHARDSON, F.; WOOLFOLK, R. (1980): «*Mathematics anxiety*», en I. G. SARASON (ed.): *Test Anxiety: Theory, Research and Application*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp.271-288.

VERGNAUD G, (2010): Comunicación personal Maria Rita Otero en el seminario «*Sujet capable et pouvoir d'agir*» Prof. Pierre Rabardel. Université Paris 8, 5 du janvier. Le tableau serait publié par Vergnaud dans le livre *Principes de psychologie pour l'étude des compétences complexes*.

VERGNAUD, G. (2008): Comunicación personal a la Dra. Rita Otero. *Functions, concepts and schemes*. A reply to Rita Otero. February 29.

VERGNAUD (2007a). *Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento*. Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática. ISBN 978-950-658-183-1. Tandil.

VERGNAUD, G (2007b): *¿En qué sentido la Teoría de los Campos Conceptuales puede*

ayudarnos para facilitar Aprendizaje Significativo? (In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning?). Investigações em Ensino de Ciências. V12(2), pp.285-302.

VERGNAUD, G (2005): en *Sur la théorie des situations didactiques*. Hommage a Guy Brousseau. La Pensée Sauvage, Édition.

VERGNAUD, G. (2000): Apprentissage et didactique en formation professionnelle. In J.C. Ruano-Borbalan et M. Fournier (Eds) *Savoirs et compétences*. Les Editions Demos.

VERGNAUD, G. (1996): *Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica*. En Revista Perspectivas, Vol. XXVI, N° 1.

VERGNAUD, G. (1994): (Coord.), *Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo?* Editorial, Buenos Aires.

VERGNAUD, G. (1990): *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.