

La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos

Carlos A. Figueiredo¹

Luis C. Contreras²

Lorenzo J. Blanco³

Resumen: La forma como los profesores usan los ejemplos con sus alumnos viene asumiendo una importancia cada vez mayor en la investigación matemática. En particular, se ha sugerido que, a través de los ejemplos empleados en clase, podemos observar algunos aspectos del conocimiento del profesor. Comparar la forma de enseñar entre profesores noveles y profesores expertos no es un tema nuevo. Sin embargo, contrastar componentes del conocimiento matemático para la enseñanza entre unos y otros, sobre la base de la ejemplificación empleada en sus clases con sus alumnos, es una perspectiva nueva en el ámbito de la investigación matemática.

Palabras clave: Ejemplificación, conocimiento matemático para la enseñanza, profesores de secundaria noveles, profesores de secundaria con experiencia

The exemplification of the concept of function: differences between novice teachers and expert teachers

Abstract: The way teachers use the examples with their students has been assuming an increasing importance in mathematics' research. In particular, it has been suggested that through the examples used in class one can analyze some aspect of teachers' knowledge. Comparing the way experts and novice teachers teach is not a new issue to discuss. However, compare subdomains of the mathematical knowledge for teaching between ones and others, based in the exemplification used in class with their students, can be seen as an all new perspective in mathematics research field.

Key words: Exemplification, mathematical knowledge for teaching, secondary novice teachers, secondary experienced teachers

Fecha de recepción: 27 de septiembre de 2011. **Fecha de aceptación:** 07 de abril de 2012.

¹ Professor da Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, Portugal. carlosaafigueiredo@sapo.pt

² Professor do Departamento de Didáctica de las Ciencias y la Filosofía, Universidad de Huelva, España. lcarlos@uhues

³ Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, Badajoz, España. lblanco@unexes

INTRODUCCIÓN

En los últimos quince años, la investigación educativa ha pasado de estudios puramente cognitivos, que consideran que el aprendizaje se desarrolla solamente en la “cabeza” del alumno, hacia un reconocimiento de que los factores sociales influyen en los aprendizajes. En esta línea, la actual tendencia en la investigación de la práctica del profesor consiste en observarlo en su contexto social (Karaagaç, 2005); así, el rol del profesor se vuelve central en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es asumida por la comunidad educativa la dificultad que los alumnos tienen en aprender solamente sobre la base de las definiciones o la transmisión de procedimientos y las demostraciones de teoremas. Es aquí donde los ejemplos cumplen su papel esencial. Los alumnos aprenden, principalmente, a través de los ejemplos. Para Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky (2006), la principal razón para presentar ejemplos es que los alumnos los ven como genéricos e, incluso, los interiorizan como modelos que usarán en el futuro como herramienta para resolver problemas parecidos.

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas hace ya mucho tiempo⁴ que se reconoció el papel central de los ejemplos, y es imposible concebir esa enseñanza sin atender a ejemplos específicos (Zazkis y Chernoff, 2008). Los ejemplos nos proporcionan una visión sobre la naturaleza de las matemáticas a través de su uso en tareas complejas para demostrar métodos, en el desarrollo de conceptos por el establecimiento de relaciones, en explicaciones educativas y demostraciones de prueba (Bills *et al.*, 2006). Tanto es así que, recurrir a la expresión “es un ejemplo de” resulta fundamental para cualquier asignatura de matemáticas (Bills y Bills, 2005).

Sin embargo, la utilización de ejemplos no es una tarea trivial del profesor, no basta con presentar ejemplos de forma arbitraria de entre un abanico de posibilidades (Watson y Mason, 2005); los profesores necesitan saber que algunos ejemplos son “mejores” que otros (Huckstep, Rowland y Thwaites, 2002). Los estudios relacionados con el aprendizaje de conceptos sugieren que los ejemplos, los *contraejemplos* o los *no-ejemplos*, cuando son introducidos de forma cuidadosa y ponderada, ayudan a distinguir los aspectos esenciales de los accesorios y a construir imágenes variadas de conceptos diversos (Zaslavsky,

⁴ Como señalan Bills *et al.* (2006), los papiros egipcios, las tablas babilónicas o los manuscritos chinos contenían problemas resueltos con el fin de ilustrar procedimientos, reglas o algoritmos con una intencionalidad claramente formativa.

Harel y Manaster, 2006). Los resultados de las investigaciones indican también que no es lo mismo si los ejemplos son presentados antes o después de las definiciones, antes o después de la sistematización de los procesos, antes o después de la demostración formal de los teoremas. Es importante conocer en todo momento la naturaleza del ejemplo que trabajamos con los alumnos, así como qué función queremos que esos ejemplos asuman en la fase de enseñanza en la que nos encontramos. Quizás por ello, la ejemplificación está ocupando, en los últimos, años un papel muy relevante en los estudios relativos al conocimiento y desarrollo profesional de los profesores.

ALGUNOS ANTECEDENTES SOBRE LA EJEMPLIFICACIÓN

Watson y Mason (2002) usan el término “ejemplo” para cubrir una extensión amplia de usos en matemáticas: ejemplos para generalizar (incluyendo relaciones intuitivas y razonamiento deductivo), ejemplos que ilustran conceptos y principios, para indicar una clase o categoría superior, para motivar, para mostrar la variación y el cambio, como ejercicios resueltos que ilustran técnicas, ejemplos de problemas y de cuestiones que pueden ser resueltas, ejemplos de objetos apropiados que verifican ciertas condiciones, ejemplos de formas de responder a preguntas, o ejemplos para la construcción o refutación de pruebas. Zodik y Zaslavsky (2008) consideran los ejemplos como casos particulares sobre los que podemos pensar y generalizar hacia una clase más amplia. Zazkis y Leikin (2008) usan el término “ejemplo” para designar una circunstancia, ilustración, caso o elemento de una idea, objeto, proceso o clase matemática. Para Tsamir, Tirosh y Levenson (2008), en el ámbito de los principios generales de la formación de ejemplos, los casos de un concepto pueden ser llamados ejemplos. Tanto en el ámbito de la construcción de cualquier conocimiento, como en el de las matemáticas, en particular, los ejemplos tienen un doble papel en la conceptualización: sirven como bloques de construcción en la formación de los conceptos y, también, como resultados de la adquisición y construcción conceptual.

Usados como estrategia educativa para ayudar a encontrar significados en el aprendizaje de las matemáticas, los ejemplos pueden incluir ilustraciones de conceptos y principios, contextos que ilustran y motivan un tópico matemático en particular y una determinada solución cuando varias son posibles (Muir, 2007). Los ejemplos constituyen un esquema comunicativo fundamental para las explicaciones y el discurso matemático. El arte de explicar para enseñar

es una tarea altamente exigente, como describe Leinhardt (citado por Bills *et al.*, 2006: 134): "Las explicaciones consisten en las orquestaciones de demostraciones, analogías y ejemplos. [...] La principal característica de las explicaciones es la de usar ejemplos bien adaptados, ejemplos que establezcan, pero limiten las generalizaciones, ejemplos que sean equilibrados con otros no-ejemplos y contraejemplos." De este modo, el uso de ejemplos para ilustrar y clarificar conceptos matemáticos es parte integrante de una enseñanza eficaz de las matemáticas (Abdul-Rahman, 2006), y los ejemplos tienen un papel preponderante en el aprendizaje. Constituyen la base para las generalizaciones, para las abstracciones y para el razonamiento analógico (Zaslavsky *et al.*, 2006), de tal forma que nuestras elecciones tendrán una influencia crucial en la forma en que nuestros alumnos generalizarán, abstraerán y se involucrarán en su aprendizaje (Watson y Chick, 2011).⁵ Por ello, al tener un papel central tanto en el desarrollo como en la enseñanza de las matemáticas, los ejemplos tienen su lugar en muchas teorías del aprendizaje de esta disciplina (Bills y Watson, 2008).⁶

Algunos autores categorizan los ejemplos de acuerdo con el uso para el cual están orientados (Bills *et al.*, 2006). Los ejemplos difieren en su naturaleza y en su objetivo; un ejemplo de concepto (de número racional) es totalmente diferente de un ejemplo de aplicación de un procedimiento (de determinar el menor denominador común) (Zodik y Zaslavsky, 2008). Según Bills y Bills (2005) la referencia a los ejemplos puede ser ambigua, por eso se separan en ejemplos de concepto (triángulos, enteros divisibles por 3) y ejemplos de aplicación de procedimientos (determinar el área de un triángulo, encontrar las raíces de un polinomio); y Sowder (1980) trata de diferenciarlos aún más, distinguiendo entre *worked (out) examples* (cuando el procedimiento es aplicado por el profesor o aparece en un libro de texto) y *exercices* (como una tarea para completar por el alumno; véase también Atkinson, Derry, Renkl, y Wortham, 2000 y Renkl, 2002). Algunos ejemplos tienen como objetivo introducir un nuevo tema, o para proporcionar una perspectiva diferente sobre él; otros sirven para introducir un conflicto cognitivo (*pivotal examples*) o para resolver ese conflicto (*pivotal-bridging example*) (Zazkis y Chernoff, 2008).

⁵ Cabría citar, en relación con esto, los trabajos de Tall y Vinner (1981) o Vinner (1983, 1991) sobre imagen conceptual y definición conceptual, o los relativos a los espacios personales de ejemplos (Zaslavsky y Peled, 1996; Watson y Mason, 2005).

⁶ Los ejemplos han tenido su lugar en la Epistemología Genética de Piaget, como clave en el proceso de acomodación y en la construcción de esquemas, pero también lo han tenido en el conductismo, para provocar respuestas en el aprendiz.

Independientemente de la naturaleza u objetivo de los ejemplos, hay otra característica que los distingue: su grado de planificación. Para Zodik y Zaslavsky (2007) los ejemplos pueden ser espontáneos o planeados y, uno que haya sido planeado, se podría modificar según las necesidades que surgieran en el aula.

El uso de los ejemplos también tiene su espacio en la investigación en educación matemática. Algunos investigadores usan los ejemplos cuidadosamente seleccionados para analizar los esquemas mentales de los alumnos (Dreyfus y Tsamir, 2004; Peled y Awawdy-Shabary, 2003; citados en Bills *et al.*, 2006) y otros, como Rowland, Huckstep y Thwaites (2003, 2005) lo hacen en el ámbito del conocimiento y la práctica de los profesores, especialmente con profesores en formación. Es en este sentido en el que nos interesa el papel que se otorga a los ejemplos, cuando se programa una sesión de clase o cuando ese diseño se pone en práctica. Nos interesa conocer cómo se eligen los ejemplos, cómo se secuencian, cómo se transforman para dar respuesta a situaciones de contingencia. La selección de ejemplos y su secuenciación es crucial en la actividad lectiva, en la medida que pueden desvelar u oscurecer el papel de las variables que intervienen en el proceso de formación de un concepto.

Zaslavsky *et al.* (2006) mostraron que en la práctica docente, la selección y uso de ejemplos les permitieron analizar la relación que existe entre el conocimiento base que el profesor debe utilizar en sus clases para elaborar ejemplos educativos y el conocimiento que se refleja a través del uso de esos ejemplos. Más concretamente, Zaslavsky (2008) describe el conocimiento del profesor sobre la base de la selección y uso de ejemplos de enseñanza útiles. En su artículo, la autora considera que esta acción es un desafío cargado de responsabilidad y que requiere una profunda reflexión sobre todos los aspectos que compiten entre sí, dado que la selección y uso específico de los ejemplos puede promover o dificultar los aprendizajes, de tal forma que, en su opinión, desde la investigación, la selección de ejemplos potentes para la enseñanza es un aspecto que da cuenta del conocimiento matemático necesario para enseñar.

En otros trabajos (Hill, Rowan y Ball, 2005; Rowland y Zaslavsky, 2005) se ha llamado la atención sobre la importancia de la elección cuidadosa de ejemplos en la enseñanza, todo lo cual anima a investigar en el papel que la ejemplificación tiene en el conocimiento y el desarrollo profesional de los profesores

Pero, además, los trabajos de Rowland *et al.* (2003, 2005) han mostrado que los profesores noveles o en formación manifiestan especiales dificultades en la elección y secuenciación de ejemplos, y Bills y Bills (2005) han advertido sobre las diferencias en la selección y uso de ejemplos entre profesores noveles y expertos. Son justo estas diferencias las que pretendemos mostrar en este estudio.

MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de nuestro trabajo es contribuir al análisis de estas diferencias desde la perspectiva del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). Describiremos esta perspectiva para mostrar el papel que concedemos a la ejemplificación en el conocimiento del profesor antes de pasar a describir cómo abordaremos nuestro objetivo.

Inspirados en el marco teórico de Lee Shulman (1986, 1987) han emergido en los últimos años diversas reformulaciones que intentan determinar el conocimiento que un profesor necesita para realizar una enseñanza eficaz de las matemáticas. Específicamente nos referiremos a dos de ellos: el que está desarrollando un equipo de profesores de la Universidad de Michigan bajo los proyectos MTLT (*Mathematics Teaching and Learning to Teach*) y LMT (*Learning Mathematics for Teaching*) (Ball et al., 2008), y el que, también desde una tradición cognitiva, emerge el *Knowledge Quartet* (Rowland et al., 2003, 2005), cuyos logros pueden verse en el proyecto SKIMA⁷ desde el marco de la reforma inglesa de la formación inicial de profesores de primaria. En ambos casos se aportan al modelo de Shulman relaciones entre lo que este denominaba conocimiento del contenido (SMK, del inglés *Subject-Matter Knowledge*) y conocimiento de contenido pedagógico (PCK, del inglés *Pedagogical Content Knowledge*).

El modelo de Ball y sus colaboradores (*op. cit.*), elaborado específicamente desde la educación matemática, sugiere que el SMK puede dividirse en tres categorías o subdominios: el conocimiento matemático común (CCK), el conocimiento matemático especializado (SCK) y el conocimiento en el horizonte matemático (HCK). El CCK se refiere al conocimiento y técnicas (estrategias) matemáticas usadas en cualquier contexto, no necesariamente en la enseñanza, e incluye la habilidad de las personas para calcular respuestas y resolver problemas matemáticos correctamente. El SCK es la idea central del modelo y consiste en un conocimiento matemático que solo el profesor moviliza y que se necesita para una enseñanza eficaz de esta disciplina. Es ese conocimiento que permite a un profesor interpretar las afirmaciones y producciones de los estudiantes, el que le permite conocer las relaciones entre diferentes representaciones de un concepto o los diversos algoritmos de un procedimiento. El HCK nos permite ver la matemática desde una perspectiva amplia de relaciones verticales (relaciones

⁷ Véase: <http://www.maths-ed.org.uk/skima/>

interconceptuales) y horizontales (relaciones intraconceptuales) entre los conceptos a lo largo de los distintos niveles de enseñanza.

De la misma forma, sugiere la subdivisión del PCK de Shulman en tres subdominios: conocimiento de las matemáticas y los estudiantes (KCS), conocimiento de las matemáticas y la enseñanza (KCT) y conocimiento del currículo.

El KCS combina el conocimiento sobre los estudiantes y conocimiento sobre matemáticas, permite anticiparse a las dificultades y obstáculos de los estudiantes y responder de forma apropiada a sus preguntas, la elección apropiada de ejemplos y representaciones para la enseñanza de determinados conceptos y es de utilidad para planificar y para ejecutar la enseñanza.

El KCT combina conocimiento sobre matemáticas y conocimiento sobre la enseñanza y tiene relación con la toma de decisiones que el profesor efectúa durante el proceso. Así, si en el KCS hemos ubicado el conocimiento sobre la adecuación de ejemplos y su escalonamiento en un proceso de enseñanza; la capacidad de elegir el ejemplo adecuado en cada momento desde ese almacén de posibilidades estaría en el KCT, que permite al profesor adaptarse a las contingencias del aula.

En el *Knowledge Quartet*, los autores exponen desde sus primeras ideas hasta el desarrollo actual de 18 códigos en cuatro categorías (*Foundation, Transformation, Connection y Contingency*) usando la *Grounded Theory*.

En *Foundation* incluyen fundamentos teóricos (incluidas las propias matemáticas y la didáctica de las matemáticas, así como las creencias), en *Transformation* está incluida la idea de Shulman (formas pedagógicamente potentes) sobre analogías, ilustraciones ejemplos y explicaciones y pruebas, en *Connection* se encuentra la coherencia interna del contenido y de este con otros, así como el conocimiento que permite su organización y secuenciación y en *Contingency* todo aquello que permite al profesor afrontar de forma exitosa los imprevistos, en parte relacionado con conocimiento sintáctico de las matemáticas.

Ambas pueden verse como formas complementarias de entender el papel de la ejemplificación en el conocimiento del profesor para enseñar matemáticas, pues ambas conceden un papel central a ese conocimiento del profesor, como puede verse, que le permite realizar una adecuada selección y uso de ejemplos en la enseñanza de las matemáticas. Desde el modelo de Ball y colaboradores, por un lado, podría ubicarse en el Conocimiento Matemático Especializado, en el Conocimiento en el Horizonte Matemático y, más específicamente, en el Conocimiento de las Matemáticas y los Estudiantes y de las Matemáticas y la Enseñanza; por otro lado, desde el modelo de Rowland y colaboradores, en *Transformation y Contingency*.

MARCO METODOLÓGICO

Hemos establecido el papel de la ejemplificación en el ámbito del conocimiento del profesor desde dos perspectivas teóricas que consideramos complementarias y hemos señalado las categorías o subdominios de ese conocimiento en el que hemos ubicado los procesos de selección y uso de ejemplos. También hemos mostrado cómo algunos estudios ponen de manifiesto la dificultad de profesores noveles para elegir y secuenciar ejemplos y nos advierten de diferencias, en este aspecto, entre noveles y expertos. Mostraremos ahora cómo hemos tratado de alcanzar nuestro objetivo de evidenciar esas diferencias. Para ello, describiremos dos estudios realizados en dos momentos diferentes (2005 y 2010) y con informantes diferentes: cuatro estudiantes para profesores en 2005 (Figueiredo, 2005) y una profesora con quince años de experiencia en 2010 (Figueiredo, 2010).⁸

Los informantes del primer estudio fueron cuatro estudiantes para profesor destinados en la Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, Portugal. Eran alumnos del quinto curso de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Évora, Portugal, que ese año hicieron sus prácticas en aquella escuela. Fueron elegidos por haber sido seleccionados por la universidad para integrar el núcleo de prácticas de la citada escuela secundaria. Los designaremos como María, Sara, Paula y Julio, todos ellos con edades comprendidas entre 23 y 25 años y, en ese año, tuvieron sus primeras experiencias docentes. Los cuatro enseñaron a alumnos del décimo y décimo primer año del sistema de enseñanza portugués, que corresponde a alumnos de 15 a 17 años, y el contenido matemático enseñado en el periodo analizado fue, en ambos cursos, el de las funciones.

María era una profesora de 23 años y su principal característica era su equilibrio personal, que se traducía en sus actuaciones y, en particular, la forma con la que trataba a las personas, característica que era muy bien aceptada por sus alumnos. María mostró capacidad de integrar sus múltiples iniciativas con las ideas de sus compañeros de prácticas y de sus tutores (del Instituto y de la Universidad).

Sara tenía 24 años y era una profesora muy intuitiva y espontánea, rasgos que reflejaba en sus prácticas docentes. Presentaba características propias de un

⁸ Ambos estudios se realizaron con la intención fundamental de elaborar, primero, y depurar, después, un sistema de categorías para analizar los procesos de selección y usos de ejemplos en el ámbito del concepto de función. Sin embargo, tras la conclusión del segundo, la investigación mostró, además, diferencias de uso entre un grupo y otro que nos ha parecido relevante poner de manifiesto ahora.

líder, y lideraba, de hecho, el grupo de los cuatro estudiantes para profesores. Su necesidad de reflexionar era evidente, pero después de las clases y no antes.

Paula también tenía 24 años y, en oposición a Sara en lo referente a la preparación de sus clases, era muy meticulosa; no solía aventurarse, prefiriendo controlar lo que entendía que eran las variables de sus clases, que estaban preparadas pormenorizadamente. Toda su actividad se desarrollaba de una forma muy pensada, pero, aun así, se adaptaba ante contingencias, aunque procuraba volver al camino previamente trazado.

Julio tenía 25 años. Como todavía se sentía más estudiante que profesor, su relación con sus alumnos era muy informal, consiguiendo comunicarse con ellos de una forma muy fácil. En lo que concierne a sus capacidades académicas, Julio no presentaba el mismo dominio de los contenidos que sus compañeras de prácticas, pero eso no le impidió enseñar con un rendimiento difícil de observar en profesores sin experiencia. Su facilidad de comunicación y la alegría y afabilidad con la que contribuyó al ambiente de la clase fueron propicias para el aprendizaje.

Las sesiones analizadas transcurrieron entre los meses de enero y abril de 2005 (2º periodo lectivo, en Portugal). El material de análisis constó de las notas de campo recogidas durante las sesiones observadas, los registros videograbados de esas clases, todos los ejemplos seleccionados y usados en ellas por los cuatro informantes y todos los ejemplos sobre funciones propuestos por los estudiantes para el trabajo de casa. En las notas de campo se incluyeron también todas las reflexiones que se hicieron con el tutor del Instituto después de cada clase de los estudiantes para profesores, donde estos explicaron todos los detalles del aula y, particularmente, las razones por las cuales se había utilizado cada ejemplo. El número de clases en que cada estudiante fue observado ha variado entre cinco y siete, y el número de fichas de trabajo propuesto para casa fue idéntico, así como el número de sesiones de reflexión.

Con todo el material recogido, se hizo una separación entre los ejemplos utilizados en las clases y los propuestos como trabajo de casa, así como de las razones y justificaciones de su uso recogidas en las sesiones de reflexión después de las clases. Los ejemplos usados se estudiaron según el objetivo con que fueron utilizados en clase, además de su papel en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función (si introducía un tema, si integraba una rutina de cálculo, si clarificaba una duda, si aplicaba un teorema). Se contabilizó el número de veces que hacía aparición un determinado tipo de ejemplo en el aula, con la intención de tener un perfil de frecuencias de la forma de

ejemplificar del profesor, lo que permitió la creación de un sistema de categorías emergente, que se describirá más abajo, con el que formalizar el análisis.

La profesora que participó en el segundo estudio, Eva, impartía clases en la misma Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, Portugal. Las clases observadas y grabadas son del 10º año de la enseñanza secundaria, que en Portugal corresponde a los alumnos que lo inician con 15 años. Eva es profesora de matemáticas y, cuando se realizó este estudio, tenía poco más de 10 años de experiencia. Su formación académica y profesional fue obtenida con la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Évora (Portugal) y, normalmente, enseñaba los tres niveles del secundario (alumnos con edades entre los 15 y los 18 años).

Eva mostró ser una persona simpática, afable, muy franca y preocupada con el progreso escolar de sus alumnos, que la trataban con respecto y alguna complicidad; se notaba en la relación que todos establecían que existía una verdadera comunicación y el ambiente de clase era propicio para la enseñanza de las matemáticas. Era enérgica y decidida, transportando hacia la clase estos dos aspectos de su personalidad. Una de sus características más evidentes era la exigencia hacia sus alumnos y hacia ella misma, unida al rigor que utilizaba en su discurso matemático y que le gustaba ver reflejado en el discurso matemático de los alumnos.

También en el caso de Eva, los ejemplos recogidos sobre las funciones se refieren al periodo comprendido entre enero y abril, pero solamente consideramos los ejemplos que fueron presentados durante las clases a las que asistimos, dado que, en este caso, no se utilizaron los espacios de reflexión antes citados.

Para el primer estudio, como se ha dicho, fue necesario elaborar un sistema de categorías utilizando la teoría emergente de los datos (basada en la alternancia entre las interrogaciones y las comparaciones apuntadas por la *Grounded Theory* de Strauss y Corbin, 1990). Este sistema de categorías pretendió enmarcar el concepto de ejemplificación; por eso, se desarrollaron entrevistas donde se plantearon cuestiones como “¿Qué es la ejemplificación?”, “¿Qué son los ejemplos?”, “¿Para qué sirven los ejemplos?” o “¿Qué objetivos persiguen los ejemplos?”. Estas preguntas permitieron encontrar relaciones de semejanza (al compararse los ejemplos unos con otros) que determinaron los grupos a considerar y la respectiva construcción de las categorías en abstracto. Este proceso de preguntar y responder, preguntar y comparar, permitió encontrar las similitudes que posibilitaron la obtención de las categorías comunes. La identificación de cada categoría exigió su especificación, esto es, exigió que fuesen definidas sus

características en el contexto del estudio de la ejemplificación del concepto de función. En efecto, fue importante precisar el significado que cada categoría asume en este trabajo y, principalmente, diferenciarlo de los significados que usualmente están asociados al nombre de cada una de las categorías (Strauss y Corbin, 1990). Este sistema de categorías, obtenido en el primer estudio, fue aplicado directamente en el segundo.

El sistema de categorías utilizado para diferenciar las características de los ejemplos utilizados por todos los profesores para enseñar el concepto de función quedó definido (tras el primer estudio) como sigue:

DEFINICIÓN/PRESENTACIÓN

Los ejemplos considerados en esta categoría son aquellos que se presentan a los alumnos inmediatamente después de definir un concepto, presentar un procedimiento o enunciar un teorema,⁹ pasando de una situación general, que es la definición, presentación o enunciado, a situaciones concretas de ese concepto, procedimiento o teorema. Son, pues, los primeros ejemplos (Rissland-Michener, 1978, los denomina ejemplos de comienzo). Esta alternativa configura una transición de lo particular a lo general, de situaciones concretas del concepto –los primeros ejemplos–, a situaciones más genéricas, definiendo el concepto.

De acuerdo con la planificación y estrategia referidas, los ejemplos del concepto de función pueden presentarse en cualquiera de sus representaciones; gráfica, numérica y algebraica, que suelen ser las principales, pero no las únicas. La representación escogida será aquella que mejor sirva a las intenciones del profesor y los objetivos asumidos, por eso puede ser un ejemplo puramente matemático, configurar una situación de la vida real o de otra ciencia. En suma, estos ejemplos inicialmente propuestos, suponen un primer contacto con el concepto para mostrar o sugerir aspectos generales y fundamentales del concepto de función básicos para su construcción.

En esta fase, es aconsejable que los alumnos se enfrenten a situaciones falsamente comprendidas por la definición. Por eso, esta categoría también incluye los no-ejemplos y los contraejemplos básicos, necesarios para la exclusión de aquellos casos que, por ser muy semejantes o por la existencia de conceptos previos, puedan inducir falsas generalizaciones o conducir a errores en la conceptualización.

⁹ Véase el trabajo de Zodik y Zaslavsky (2007) en la distinción de los ejemplos por la naturaleza del ejemplo: Ejemplos de Concepto, de Proceso o de Teorema.

Como ilustración, siguen dos ejemplos muy sencillos y en representaciones diferentes, presentados por dos de los participantes en el estudio después de definir el concepto de función compuesta.

El ejemplo 1 se refiere a la función compuesta, utilizando la representación analítica:

Ejemplo 1. Utilizado por María en una de sus clases

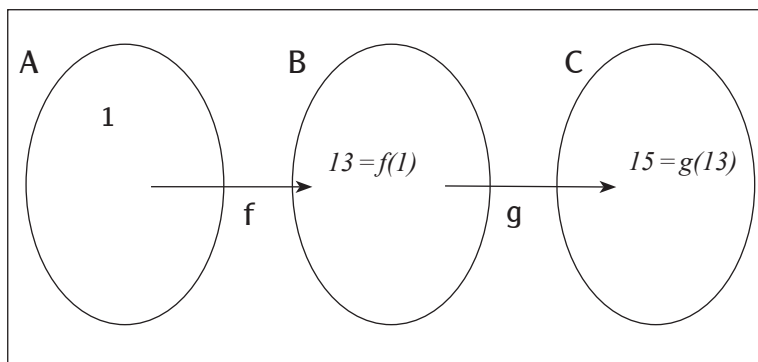
Considere las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \frac{3x}{2} - 1$

Determine la imagen compuesta $(g \circ f)(-2)$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(-3) = \frac{11}{2}$$

Y el otro, semejante, pero en la representación gráfica:

Ejemplo 2. Utilizado por Sara en una de sus clases



ABORDAJE INICIAL AUTÓNOMO

Después del primer contacto y de haber percibido las características fundamentales, surgen los primeros ejercicios típicos de aplicación del procedimiento o las primeras situaciones problemáticas que incluyan el concepto o el teorema. Una de las diferencias entre estos ejemplos y los de la primera categoría reside en el hecho de que la autonomía del alumno en relación con el ejemplo deberá ser mayor, el papel del profesor deberá ser menos activo, a fin de promover una mayor participación del alumno.

En esta fase se pretende ampliar las formas posibles de abordar el concepto, utilizar procedimientos o aplicar teoremas. Con una colección/secuencia adecuada de estos ejemplos, el profesor pretende trabajar de una manera específica los diversos aspectos del concepto en estudio; en el caso del concepto de función, los ejemplos deben permitir a los alumnos tomar conciencia de las distintas perspectivas desde las que puede establecerse relación entre dos cantidades; es decir, darse cuenta de la característica fundamental del concepto de función. En el caso de la utilización de procedimientos o teoremas se pretende que los alumnos aprendan las rutinas, para que el procedimiento o el teorema no sea en sí una dificultad y pueda ser utilizado como una herramienta en un ámbito más amplio. Disponer de un elenco rico de ejemplos y ser capaz de seleccionarlos y secuenciarlos para esa finalidad muestra un nivel más elaborado de conocimiento matemático especializado y de las matemáticas y la enseñanza.

Con estos ejemplos, con las primeras dificultades que surgen del aumento de la autonomía del alumno y con el inicio de la construcción de su espacio personal de ejemplos (Zaslavsky y Peled, 1996; Watson y Mason, 2005), se pretende que el alumno, en situaciones específicas, afronte las primeras preguntas, las primeras dudas sobre los procedimientos y solicite aclaraciones. Estos ejemplos ya promueven una actitud más inquisitiva por parte del alumno, fomentan su curiosidad, con la ventaja de que son situaciones fáciles de tratar.

Véase el ejemplo 3, de esta categoría, presentado por Paula a sus alumnos:

Ejemplo 3. Utilizado por Paula en una de sus clases

Calcule las raíces de las funciones:

a) $0.2 x - 8 = a(x)$

CLARIFICACIÓN Y PROFUNDIZACIÓN

Ejemplos de este tipo surgen después de la fase exploratoria del concepto de función, cuando el alumno emprende la tarea de profundizar en él, en sus diversas representaciones y descubrir sus peculiaridades. La construcción de un concepto es un proceso compuesto de numerosas etapas consecutivas, cada una con sus dificultades inherentes. En este proceso, las dificultades requieren ejemplos útiles para superar las dificultades, es decir, como explicación a las dudas de los alumnos o como una forma de resolver las situaciones de confusión.

Los ejemplos de esta categoría son la respuesta a aquellas situaciones de dificultad que deberían ser esperadas por los profesores, aunque su localización temporal sea indeterminada y sus contornos imprecisos. Los profesores con experiencia deberían preverlas con más facilidad y salir airoso de estas situaciones de contingencia. Los ejemplos dedicados a las situaciones de duda de los alumnos pueden presentarse antes que la dificultad surja, pero la presentación, calidad del ejemplo o número de ejemplos empleados dependen de la capacidad de previsión, experiencia y originalidad del profesor y a veces suponen una transformación de ejemplos previstos para adaptarlos a la circunstancia sobrevenida. El conocimiento necesario para la anticipación pertenece al subdominio del conocimiento de las matemáticas y los estudiantes, y el necesario para su adaptación al de las matemáticas y la enseñanza.

Dependiendo del concepto, los ejemplos relativos a las características de una función son presentados tanto de forma oral como escrita pero se basan, fundamentalmente, en una interacción imprevisible entre alumno y profesor y, por eso, son ejemplos menos planeados y más espontáneos o, si son planeados, están sujetos a alguna modificación que se muestre necesaria.¹⁰ Así, los ejemplos pueden presentar un aspecto formal o presentarse en forma de no-ejemplo, contraejemplo, analogía, metáfora, colección de ejemplos, cadena lógica de implicaciones, etcétera.

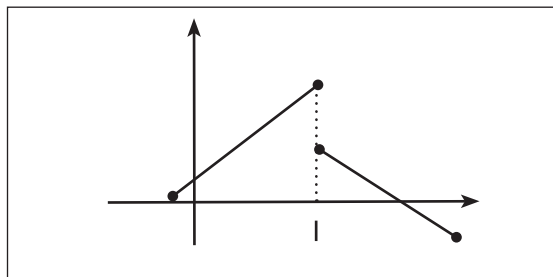
Como se puede ver, son ejemplos que, aunque elegidos, pretenden, por un lado, clarificar y ampliar las características cognoscibles del concepto y, por otro, eliminar las dudas y obviar situaciones de confusión. Los ejemplos de esta categoría se destacan por la importancia que asumen en el proceso de construcción, en el aprendizaje, de la imagen conceptual (Tall y Vinner, 1981). Estos ejemplos

¹⁰ Véase el trabajo de Zodik y Zaslavsky (2007) en la distinción de los ejemplos por su espontaneidad: Ejemplos Planeados, Modificados o Espontáneos.

enfatan pormenores y se fundamentan en las características específicas del concepto de la función en estudio, fomentando la construcción correcta y rigurosa de su estructura, persiguen generalizar y sistematizar al final de cada etapa.

El no-ejemplo (ejemplo 4) que sigue, fue presentado por Julio para ilustrar un caso de una correspondencia que no verifica la definición de función:

Ejemplo 4. Utilizado por Julio en una de sus clases



APLICACIONES INTERNAS

Las aplicaciones internas son una forma de ejemplificar que aparece en las fases de mayor profundización en el concepto y del tipo de función en estudio. Estas aplicaciones pueden incluir contenidos o conceptos enseñados anteriormente o relacionarse con otros que serán enseñados posteriormente.¹¹ El tratamiento de las situaciones que envuelvan este tipo de ejemplos requiere un mayor grado de profundización en el concepto, de refinamiento de sus características esenciales (Skemp, 1979) por parte del alumno, permitiendo la interpretación e interacción con la situación o, en el caso de ser un problema, su resolución.

Surgen al final de un proceso que deberá integrar todas las herramientas necesarias para la aplicación del concepto en una situación matemática cualquiera en la cual figure el concepto de función. Su propósito es dinamizar la profundización del concepto y las diversas formas con que pueda ser representado y obligan al alumno a utilizar todos los recursos disponibles sobre el concepto y sus articulaciones con otros conceptos. Son ejemplos que promueven el

¹¹ Este aspecto invita a reflexionar sobre el papel de la ejemplificación en el conocimiento en el horizonte matemático (Ball *et al.*, 2008) o en *Conexions* (Rowland *et al.*, 2003, 2005).

uso del concepto dentro de una red formada por todos aquellos otros con los que mantiene una relación semántica.

Los momentos idóneos para su presentación son aquellos que contemplan situaciones nuevas para los alumnos o la resolución de problemas estrictamente matemáticos. Son ejemplos que, por su complejidad, no pueden ser presentados oralmente; son presentados de forma escrita para que su interpretación y análisis se pueda hacer repetidamente, si es necesario.

El uso de este tipo de ejemplos es muestra de conocimiento en el horizonte matemático y de un conocimiento de las matemáticas y la enseñanza de mayor nivel.

El ejemplo 5 fue uno de los que pudimos observar durante el estudio y que se infirió en esta categoría:

Ejemplo 5. Utilizado por María y Sara en una ficha de trabajo común

Considere la función . $h(x) = x^3 - 12x$

a) Determine la función derivada de h. Represente gráficamente la función derivada.
 b) De acuerdo con lo que observa en el gráfico, complete la tabla, y retire sus conclusiones.

- ∞ + ∞

x					
Signo de $h'(x)$					
Variación y Extremos de $h(x)$					

c) Esboce el gráfico de h y verifique sus conclusiones.

APLICACIONES EXTERNAS

Estos ejemplos son de aplicación a la vida real y a otras ciencias. El tipo de ejemplos de esta categoría es similar a los de la categoría anterior, solo difieren en su ámbito de aplicación. Son ejemplos que pueden configurar ejercicios o problemas, pero pertenecen a esta categoría porque implican un mayor grado de dificultad. Surgen como aplicación efectiva y global del concepto en relación con una situación determinada que obliga al alumno a poner en perspectiva sus conocimientos desde diversos ángulos y mostrar su capacidad para encuadrarlo

en una representación de las funciones. Como son ejemplos que involucran el concepto de función, o un cierto tipo de función, asociados a nociones de otras disciplinas o situaciones de la vida real, obligan a una elección adecuada de alguna de las representaciones del concepto de función.

De igual modo que en los ejemplos de la 4ª categoría, el objetivo de estos es permitir profundizar en el concepto y en las diversas representaciones que presenta; sin embargo, por ser de aplicación a otras disciplinas y a la vida real, eso solamente acontece cuando el grado de refinamiento del concepto incluye la flexibilidad en su utilización.

Uno de los ejemplos, representativo de esta categoría, fue el número 6, utilizado por María y Sara en una ficha de trabajo común.

Ejemplo 6. Utilizado por María y Sara en una ficha de trabajo común

Durante varias semanas Tráfico viene pesquisando la velocidad del tráfico en una autovía.

Se verificó que en un día normal de la semana, entre las 13 horas y las 18 horas, la velocidad del tráfico es de, aproximadamente $v(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40$ km/h, donde t es el número de horas transcurridas después del mediodía.

¿A que horas, dentro del intervalo de tiempo mencionado, el tráfico se mueve más rápidamente? ¿Y a que horas se mueve más lentamente?

RESULTADOS

Describimos a continuación los resultados de cada uno de los estudios en los que aplicamos el sistema de categorías anterior, con cuatro estudiantes para profesores noveles, en 2005, y con una profesora con diez años de experiencia, en 2010, como ya se indicó anteriormente, con objeto de mostrar las semejanzas y diferencias en la selección y uso de los ejemplos entre los profesores noveles y la profesora con más experiencia.

EL ESTUDIO DE 2005

La información relativa al número de ejemplos, y respectiva frecuencia relativa, de cada categoría usados por cada uno de los informantes (María, Sara, Paula y Julio), en clase y en la fichas de trabajo, viene expresada en el cuadro 1:

Cuadro 1. Información sobre frecuencia relativa de cada categoría e informante

<i>Estudiante para Profesor</i>	<i>1ª Categoría: Definición</i>	<i>2ª Categoría: Abordaje Inicial Autónoma</i>	<i>3ª Categoría: Esclarecimiento y profundización</i>	<i>4ª Categoría: Aplicaciones Internas</i>	<i>5ª Categoría: Aplicaciones Externas</i>
Total de María: (91)	20 (22%)	43 (47%)	7 (8%)	14 (15%)	7 (8%)
Total de Sara: (86)	23 (27%)	33 (38%)	6 (7%)	16 (19%)	8 (9%)
Total de Paula: (81)	15 (19%)	35 (43%)	9 (11%)	13 (16%)	9 (11%)
Total de Julio: (68)	13 (19%)	35 (51%)	4 (6%)	10 (15%)	6 (9%)

Es fácilmente apreciable que, en los cuatro estudiantes para profesores, los porcentajes relativos al uso de los ejemplos de cada categoría son muy semejantes. Esto demuestra que la forma de ejemplificar de los cuatro informantes presenta grandes semejanzas, en lo que respecta a la importancia relativa de cada tipo de ejemplo. No obstante, nos parece más relevante mostrar una descripción detallada del uso de ejemplos de cada categoría.

Categoría Definición

Un análisis conjunto de los porcentajes relativos a esta categoría revela dos semejanzas entre los cuatro estudiantes en prácticas. Los cuatro distinguían las dos formas diferentes de introducir un concepto, ya fuera induciéndolo por intermedio de ejemplos o definiéndolo primero e ilustrándolo después. La segunda semejanza se relaciona con la representación utilizada por los cuatro para introducir las funciones. Todos ellos utilizaron sistemáticamente la representación gráfica, lo que demuestra que todos consideran esta representación la más indicada para presentar las funciones a los alumnos.

Sin embargo, existieron discrepancias significativas. Aunque Sara y María utilizaron los ejemplos de esta categoría para ilustrar conceptos después de su introducción, para conceder algún significado a la definición dada en primer lugar, durante la reflexión afirmaron que estos ejemplos tienen un papel inductivo. Por su parte, Paula y Julio consideraban de forma clara e inequívoca que el objetivo de los ejemplos de esta categoría era el de inducir el concepto. No solamente introducir, sino también llevar al alumno a percibir la generalidad de

la definición por intermedio de las particularidades comunes de los ejemplos presentados. No obstante, la realidad del aula fue diferente en estos dos estudiantes, mientras Julio aplicó un proceso inductivo, Paula hizo exactamente el contrario, definió primero e ilustró después.

Categoría Representación

En general, los cuatro informantes comparten la forma de trabajar las distintas representaciones del concepto de función: presentar muchos ejemplos de cada representación de una manera aislada o, como mucho, relacionando dos. La gran mayoría de los ejemplos involucraron a la representación gráfica o la analítica; alguna vez ambas, cuando utilizaron la calculadora gráfica. Las únicas excepciones son los ejemplos propuestos por Julio a sus alumnos con el objetivo de trabajar la tasa de variación media, donde utilizó la representación numérica y consiguió que los alumnos la relacionaran con la algebraica utilizando la calculadora gráfica.

En las reflexiones posteriores se reflejó una idea común a los cuatro estudiantes para profesores orientada hacia el fraccionamiento de los procesos o de las situaciones e, incluso, del concepto mismo. Con el acuerdo de todos los estudiantes para profesores, Julio afirma que “lo más importante para ellos es no complicar en el inicio”, y la utilidad de este fraccionamiento, con la simplificación que conlleva, lo justificaron sobre la base de mantener la motivación de sus estudiantes. El éxito que los alumnos consiguen con ejemplos fáciles les motiva a continuar con otros más complicados. Los términos que emplearon son diferentes, como refirió Paula en una ocasión: ir del fácil hacia el complicado, fraccionar las cosas y sumar al final, o las piezas del puzzle que encajan al final; pero el sentido es el mismo, la utilización de estos ejemplos siempre se destina a proporcionar los primeros contactos autónomos del alumno con las diferentes representaciones del concepto y, si es posible, con éxito.

Categoría Características

En las sesiones de reflexión, quedó claro que uno de los principales objetivos de los ejemplos es esclarecer dudas de los alumnos: ante una dificultad presentada por el estudiante, cabe al profesor presentar un nuevo ejemplo que sea clarificador. Sin embargo, la actuación a lo largo de las clases no fue coherente con este hecho, estos ejemplos tuvieron un papel muy tenue en su actuación y no

utilizaron los ejemplos en esta vertiente ya que, cuando era necesario explicar, no recurrieron a otros ejemplos, usaron la misma situación que generó la duda, aclarando la situación y no la razón generadora de la duda.

Coincidente es el hecho de que todos ellos, en las pocas situaciones en que generaron nuevos ejemplos de forma espontánea, cuando por vía de la duda de un alumno tuvieron que introducir algún ejemplo no preparado, utilizaron coeficientes o números que siempre fueron enteros entre -7 y 7 , nunca fraccionarios o irracionales.

Categoría Aplicaciones Internas

Los ejemplos de esta categoría presentan un porcentaje significativo en la ejemplificación de los cuatro estudiantes para profesores. Efectivamente, el cuidado en utilizar ejemplos que incluyeran varios contenidos del mismo curso o de cursos diferentes fue común a los cuatro, mostrando a los alumnos que los temas matemáticos no son herméticos. No obstante, también coincidieron en no utilizar situaciones con características de resolución de problemas. Todos los ejemplos considerados configuraron siempre ejercicios de rutinas, tradicionales, variando solamente el grado de dificultad. Cabe referir que la mayor parte de estos ejemplos constaban de las fichas de trabajo para casa y no fueron trabajados a fondo en clase con los alumnos.

Categoría Aplicaciones Externas

Los ejemplos de modelación matemática tuvieron su lugar en la ejemplificación de los cuatro estudiantes. Es cierto que su importancia, referida en las sesiones de reflexión, no tuvo reflejo en la cantidad de ejemplos efectivamente presentados o tratados con los alumnos en sus clases.

María utilizó dos ejemplos en clase y seis en fichas de trabajo para casa, todos ellos sobre aplicación de las derivadas. Los ocho ejemplos incluidos en esta categoría son parecidos al ejemplo que sigue:

Ejemplo 7. Utilizado por María

Un cohete es lanzado en la vertical con una velocidad de 80 m/s. La distancia al suelo, en metros, t segundos después del lanzamiento es dada por: $d(t) = 80t - 8t^2$
¿Cuántos segundos tardó el cohete para llegar otra vez al suelo?
Determine la velocidad del cohete cuando llegó al suelo.

Sara utilizó tres ejemplos de esta categoría en clase y propuso seis en una ficha de trabajo para que sus alumnos la resolviesen en casa. Como Sara impartía clases al mismo tiempo que María, siendo los alumnos de la misma edad, los seis ejemplos de las dos fichas de trabajo eran los mismos. Los ejemplos trabajados en clase también fueron parecidos, y semejantes al que sigue

Ejemplo 8. Utilizado por Sara y María

En un bosque, el modelo matemático que permite calcular el total de una población de conejos, t años después de 1990, es dada por: $N(t) = 6000 + 200t - 10t^2$
Determine la tasa de crecimiento de la población en el año 2000
Determine el número máximo de conejos que la población puede alcanzar y refiera el año en que ese número es alcanzado.

Paula utilizó tres ejemplos en clase y cinco en fichas de trabajo para casa, todos ellos sobre funciones polinomiales. Los ejemplos tratados en el aula y la mayoría de los utilizados en la ficha de trabajo eran semejantes al ejemplo 9, que mostramos

Ejemplo 9. Utilizado por Paula

Un depósito de gasolina está formado por un cilindro horizontal y dos semiesferas, cada una en las bases del depósito. El depósito tiene un volumen de 33 m^3 y la altura del cilindro es de $2,5 \text{ m}$. Muestre que, en función del radio de r (radio de la base del cilindro), el volumen del depósito es dado por:

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 + 2,5 \pi r^2$$

Los ejemplos de Julio son parecidos a los de Paula, porque también él estaba tratando el tema de las funciones polinomiales. Julio utilizó tres ejemplos en el aula y pidió a sus alumnos que resolvieran en casa otros cuatro, todos ellos semejantes al ejemplo 10.

Ejemplo 10. Utilizado por Julio

Una fábrica de chocolate produce conos de chocolate con un volumen de $12,25 \text{ cm}^3$. La altura del cono tiene 4 cm más que el radio de la base.
Determine la medida de la altura y de la generatriz del cono. Presente el resultado con tres cifras decimales.

EL ESTUDIO DE 2010

La información referente al número de ejemplos, y respectiva frecuencia relativa, de cada categoría usados por la Eva, viene expresada en el cuadro 2.

Cuadro 2. Frecuencia relativa de tipología de ejemplos usados por Eva

<i>Profesora con más Experiencia</i>	<i>1ª Categoría: Definición</i>	<i>2ª Categoría: Abordaje Inicial Autónoma</i>	<i>3ª Categoría: Esclarecimiento y Profundización</i>	<i>4ª Categoría: Aplicaciones Internas</i>	<i>5ª Categoría: Aplicaciones Externas</i>
Total: 65	5 (8%)	21 (32%)	27 (42%)	4 (6%)	8 (12%)

De la misma manera que se procedió con los cuatro estudiantes para profesores, también analizaremos la ejemplificación de Eva describiendo lo que se observó desde cada una de las categorías.

Categoría Definición

Eva usa, en términos relativos, pocos ejemplos de esta categoría, que son presentados y trabajados, mayoritariamente, por la profesora, sin detenerse mucho en ellos, prefiriendo que los alumnos lo hagan a través de ejemplos de las categorías posteriores.

Categoría Representación

La frecuencia relativa con que Eva utiliza ejemplos de esta categoría refleja la importancia que les atribuye. Desde el punto de vista cronológico, también este tipo de ejemplos fue más utilizado en el inicio del tema y, conjuntamente con los ejemplos de la categoría anterior, promovieron la construcción de la base de aprendizaje y construcción del concepto de función en los alumnos.

Categoría Características

La frecuencia relativa con que Eva emplea los ejemplos incluidos en esta categoría muestra su fuerte participación en la profundización que los alumnos hacen en el concepto de función, previendo las dudas que puedan surgir, o

aclarándolas cuando, efectivamente, surgen del trabajo de los alumnos con ejemplos de la 2ª, 4ª y 5ª categorías.

Es en la utilización de estos ejemplos, sean planeados o espontáneos, como mejor se observa la interacción entre la profesora y sus alumnos: la profesora propone los ejemplos que considera adecuados para realzar los aspectos importantes de los contenidos y, también, los que propician el surgimiento de dudas y confusiones de sus alumnos, con vistas a su clarificación.

Categorías Aplicaciones Internas y Aplicaciones Externas

Las aplicaciones de los contenidos y de las distintas nociones del tema de funciones a situaciones estrictamente matemáticas, a situaciones de la vida real y a la modelación en el ámbito de las otras ciencias, no se presentó como una etapa aislada, con trazos específicos y bien definidos, sino conectada a los ejemplos de la 3ª categoría. Esto es, cuando durante el trabajo con un ejemplo de aplicación interna/externa surgieron dudas o confusiones en los alumnos, Eva utilizó, de forma preferencial, ejemplos de 3ª categoría para resolverlas. Es interesante referir que fue en estas situaciones, en concreto, cuando se pudieron identificar la mayor parte de los ejemplos de 3ª categoría creados de forma espontánea.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

EL ESTUDIO DE 2005

Una característica común es que el papel de la ejemplificación que menos evidenciaron los estudiantes para profesores es el de interconectar conceptos matemáticos a nivel interno. En los espacios de reflexión siempre sobresalió la aplicación de la matemática a nivel externo, los nexos internos eran tan obvios para ellos, que no sentían la necesidad de trabajarlos de forma aislada con sus alumnos. Obviar estas conexiones se relaciona con un escaso conocimiento de las matemáticas y la enseñanza y del conocimiento en el horizonte matemático.

En las pocas situaciones de ejemplificación espontánea, vinculadas a la clarificación de dudas, que pudieron ser observadas, los coeficientes, raíces y otros valores numéricos que presentaron fueron números enteros, dando la idea que el universo con que trabajan es siempre \mathbb{Z} ; nunca utilizaron \mathbb{Q} o \mathbb{R} . Las

razones aducidas para este hecho radican en el cuidado que los estudiantes para profesor tuvieron en no introducir elementos que pudiesen crear ruido en su ejemplificación. Su argumento es que la utilización de elementos de Q o R podría introducir un grado de dificultad artificial e innecesario, aunque el efecto es precisamente el contrario.

En situación de duda por parte de algún alumno, para clarificar, los cuatro estudiantes para profesores utilizaron mayoritariamente las propias situaciones que indujeron la duda, sin crear nuevos ejemplos. Las frecuentes situaciones de dificultad con las cuales se encuentra cualquier profesor forman parte del trabajo cotidiano y, en el caso de los estudiantes, no hubo excepción. Es más, como dijimos, la creación espontánea de situaciones alternativas, o la modificación de los ejemplos que causaron las dudas, para la superación de las dificultades de los alumnos, no fueron la regla sino la excepción. Ello muestra dificultades ante *contingencias* y escasa capacidad *transformadora*.

La tendencia en el fraccionamiento de los conceptos y su forma de atomizar el esquema conceptual tratado es común a Sara y Julio. María y Paula no huyen a esta forma de ejemplificar; solamente no es tan evidente y tan explícito. El elevado número de ejemplos utilizados que se enmarcan en la 2ª categoría es indicadora de eso mismo. Pensar que los alumnos serán capaces de hacer después, por sí mismos, la integración correspondiente, denota un escaso conocimiento de las matemáticas y los estudiantes.

Las características más marcadas evidenciadas en el estudio de 2005 se sintetizan en los siguientes puntos:

1. No esperan y no antevén las dudas y dificultades de los alumnos en los diversos contenidos relativos a las funciones, lo que indica que su conocimiento de las matemáticas y de los estudiantes y su conocimiento de las matemáticas y la enseñanza se encuentra en un nivel de desarrollo muy incipiente.
2. Consideran que los alumnos profundizan en los diferentes conceptos de función sobre la base de muchos ejemplos sencillos que envuelvan una representación a la vez.
3. No toman conciencia de los errores y dificultades futuras que pueden inducir en sus alumnos a través de su ejemplificación, lo que de nuevo evidencia escaso conocimiento de las matemáticas y los estudiantes y de las matemáticas y la enseñanza.
4. No conciben el concepto de función como un todo abarcador, sino como la suma de distintas partes, esperando que el alumno sobreponga la

información y que la aprehenda solamente por el hecho de que el profesor le transmitió la información. Esto es indicador de insuficientes conocimiento matemático especializado y conocimiento en el horizonte matemático.¹²

5. En situación de confusión del alumno, mantienen el ejemplo que la provocó, no diversifican la explicación con otros ejemplos, lo que es sintomático en quien no posee un espacio de ejemplos¹³ suficientemente amplio donde escoger aquellos más apropiados a una determinada situación, propio de un conocimiento matemático especializado más desarrollado.

EL ESTUDIO DE 2010

El análisis de la forma de ejemplificar de Eva muestra que, cronológicamente, a lo largo del tema funciones, los ejemplos utilizados de 1^ª y 2^ª categorías son más numerosos en el inicio del 2^º periodo lectivo. Esta selección se explica, y se muestra adecuada, por ser en el inicio del capítulo; el momento en que se introducen las varias nociones integrantes del tema de las funciones –ejemplos de 1^ª categoría– y donde los alumnos toman sus primeros contactos autónomos con esas nociones –ejemplos de 2^ª categoría–. Los ejemplos de 3^ª categoría, esclarecimiento y profundización, son más numerosos a mitad del capítulo, donde Eva profundiza en el concepto de función a través de las aclaraciones de las dudas que van surgiendo en los alumnos, mientras se abordan las diversas nociones y contenidos del tema. Los ejemplos que configuran las aplicaciones del concepto de función a problemas estrictamente matemáticos y a situaciones de modelación, ejemplos de 4^ª y 5^ª categorías, aparecen al final del trimestre.

El número de observaciones en cada categoría es, también, merecedor de atención. Las clases impartidas por Eva que incluyen ejemplos de 1^ª categoría corresponden a la que ha sido introducida alguna noción, definición o procedimiento dentro del tema de las funciones. El número de clases impartidas que incluyen ejemplos de 2^ª categoría es muy semejante al de las que incluyen ejemplos de 3^ª categoría, lo que ilustra, en términos relativos, el equilibrio entre el tiempo y el trabajo empleados en la profundización del concepto. Finalmente,

¹² En la línea de “falta de habilidad de desglosar ideas y procedimientos” referida por Mochón y Morales (2010: 109).

¹³ Zaslavsky y Peled (1996), en un trabajo en que pretendían explicar las dificultades sentidas por los profesores para generar contra-ejemplos, se referían al *espacio de ejemplos* como la colección de ejemplos matemáticos a que alguien accede en determinadas situaciones.

para la aplicación del concepto, tenemos los ejemplos cuyo tratamiento está descrito en aproximadamente la mitad de las clases empleadas para trabajar con ejemplos de 2^a categoría. Luego, en términos de proporcionalidad, la utilización de los ejemplos de las diversas categorías parece equilibrada.

Eva usa casi exclusivamente ejemplos planeados en sus clases. Sus ejemplos son, en su gran mayoría, seleccionados del manual adoptado por el grupo de profesores de matemáticas de la escuela y es con esos ejemplos con los que desarrolla su trabajo con los alumnos; algunas veces presenta ejemplos preparados en casa o seleccionados de otros manuales. De los 65 ejemplos contabilizados en las clases a las que asistimos, se pudieron contar solo tres modificados y ocho espontáneos; esto es, un claro indicador de que prefiere la seguridad de un planeamiento cuidadoso que la incertidumbre de una actividad espontánea e instintiva. Sin embargo, Eva supo presentar a sus alumnos ejemplos espontáneos cuando las circunstancias así lo exigieron y estos, o la modificación de los que había presentado, se destinaron a resolver situaciones que no habían sido previstas. Los ejemplos espontáneos fueron observados en la primera mitad del trimestre, al introducir los contenidos iniciales del capítulo, cuando el concepto de función está siendo estructurado, y son ejemplos que la profesora utiliza para matizar algún aspecto del concepto de función o elucidar alguna duda en particular. Es esperable que, al final del tema de las funciones, el surgimiento de ejemplos espontáneos sea más improbable, ya que es la fase en la que surgen las situaciones de aplicación del concepto a la modelación y a la resolución de problemas matemáticos, en este ámbito los ejemplos difícilmente surgen de forma espontánea.

En los ejemplos espontáneos que propuso a sus alumnos, la ejemplificación de Eva se mostró diversificada en cuanto al uso de los números. Se pudo observar la utilización de números fraccionarios e irracionales en las funciones polinomiales, en la presentación de contraejemplos y en diagramas de Venn. Por otro lado, la menor utilización relativa de ejemplos de 2^a categoría no evidenció la separación de las funciones en varios subtemas independientes. Por el contrario, la utilización significativa de ejemplos de 3^a categoría sirvió, efectivamente, para integrar esos mismos aspectos del concepto de función. Esta diversificación y riqueza de relaciones evidencia capacidad de responder ante *contingencias* a la vez que capacidad *transformadora* del contenido matemático; en otras palabras, conocimiento matemático especializado de las matemáticas y la enseñanza y en el horizonte matemático.

En sus clases pudimos observar esta forma de utilizar los ejemplos para enseñar el concepto de función: introducir el concepto y respectiva definición; dar la oportunidad

a los alumnos de trabajar en él utilizando los primeros ejemplos para que perciban los contornos del concepto y puedan surgir las primeras dudas; uso de los ejemplos para esclarecer las dudas; aplicar el concepto a otras situaciones (de las matemáticas, de las otras ciencias o de la vida real) donde pueden surgir nuevas dudas; lo que provoca un regreso a los ejemplos que deben esclarecerlas. Con este proceso Eva ayudó a sus alumnos a construir y conceptualizar la noción de función.

Sintetizando las principales características de la forma de ejemplificar de Eva:

1. Usa mayoritariamente ejemplos planeados. Aunque, si es necesario, usa ejemplos espontáneos o, algunas veces, modifica un ejemplo planeado que presentó.
2. Los ejemplos de 1^a y 2^a categorías son más utilizados en el inicio del tema, los de 3^a categoría son más utilizados a mitad del trimestre y los de 4^a y 5^a categorías son utilizados solamente al final del tema.
3. Selecciona los ejemplos, mayoritariamente, del manual adoptado. Esa selección no es aleatoria: elige unos, rechaza otros y modifica el orden de los ejemplos presentados en el manual, de acuerdo con lo que pretende. Existe un equilibrio entre las representaciones del concepto de función en los ejemplos que presenta a sus alumnos.

Todo ello pone de relieve un conocimiento matemático para la enseñanza de mayor nivel.

CONCLUSIONES

La ejemplificación presentada por los cuatro estudiantes para profesores y la ejemplificación presentada por la profesora con más experiencia exhibe semejanzas y diferencias, siendo las diferencias más acentuadas que las semejanzas. La semejanza de las dos formas de ejemplificar tan solo se manifiesta en la utilización de las cinco categorías y el grado de planificación de los ejemplos presentados.

En cuanto a las diferencias que pudimos observar, la forma de ejemplificar el concepto de función, entre los cuatro estudiantes y la profesora Eva, reveló diferencias puntuales, pero, sobre todo, fue en el desarrollo del tema cuando estas fueron más apreciables.

Puntualmente, las diferencias más evidentes se pautan por el número de ejemplos en cada categoría. En términos relativos, los estudiantes para profe-

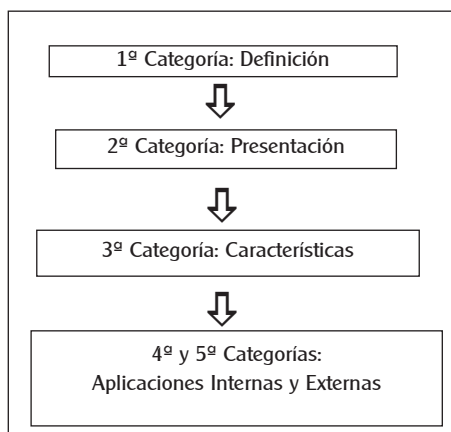
sores utilizaron más ejemplos de 2ª categoría, mientras que la profesora con más experiencia usó más ejemplos de 3ª categoría, donde las capacidades de transformación y respuesta ante contingencias se muestran más evidentes gracias a un conocimiento más sólido de las matemáticas y los estudiantes y de las matemáticas y la enseñanza.

En los casos observados de ejemplificación espontánea, el número de casos presentado de estos ejemplos es diferente, mayor en el caso de la profesora con más experiencia. En este ámbito, también se verificó que la utilización de los números es más variada en el caso de Eva; fueron utilizados, indiferentemente, naturales, enteros, racionales, e irracionales. Los estudiantes prefirieron usar, mayoritariamente, naturales y enteros entre -7 y 7.

En lo que respecta a la ejemplificación a lo largo del tema de las funciones, pudo ser apreciada una diferencia significativa en la forma de recorrer las diversas categorías a través de los ejemplos.

Cada uno de los estudiantes para profesores recorrió las cinco categorías de forma lineal. Esto es, comenzaron con aspectos básicos del concepto y con ejemplos de 1ª categoría, los alumnos resolvieron bastantes situaciones simples a través de ejemplos de 2ª categoría, algunas dudas fueron aclaradas con ejemplos de 3ª categoría y pasaron a la aplicación del concepto en ejemplos de 4ª y 5ª categorías, terminando el tema. Esquemáticamente, correspondió a una ejemplificación sintetizada en la figura 1.

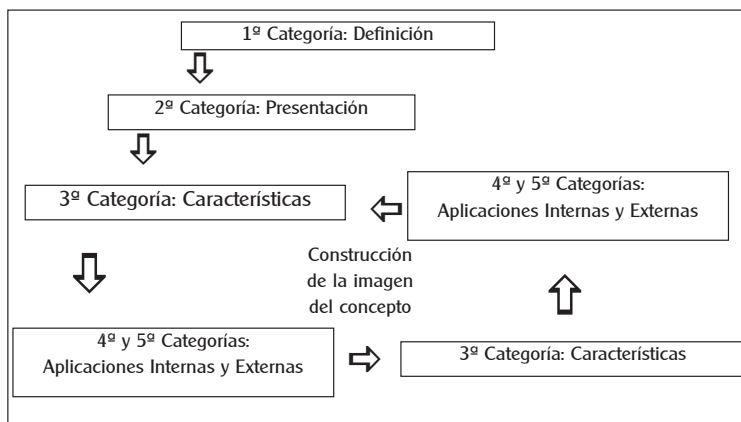
Figura 1. Esquema de la ejemplificación de los estudiantes para profesores



La profesora con más experiencia, por su parte, presentó un esquema de ejemplificación no lineal, no empieza los temas con ejemplos de 1ª categoría para terminarlos con ejemplos de 5ª categoría. El esquema tomó, a partir de los ejemplos de 2ª categoría, un aspecto circular; los ejemplos de aplicación, para promover la profundización conceptual, provocan situaciones de duda que Eva esclarece modificando el ejemplo o creando otros. De este modo, observamos en su ejemplificación un número apreciable de ejemplos de 3ª categoría creados espontáneamente con el objetivo de superar situaciones de duda que fueron surgiendo al tratar ejemplos de 4ª y 5ª categorías. Por el contrario, en el caso de los cuatro estudiantes, este tipo de ejemplos apenas fueron observados. Esta capacidad para encontrar ejemplos más precisos y adecuados y para ayudar a los alumnos a establecer relaciones y profundizar en el concepto se explica desde un nivel superior en cuanto a su conocimiento matemático especializado y su conocimiento en el horizonte matemático.

La ejemplificación de Eva puede sintetizarse en el esquema de la figura 2.

Figura 2. Esquema de la ejemplificación usada por Eva



En síntesis, en lo que respecta a la selección, presentación y utilización de los ejemplos, la diferencia más marcada entre la profesora con más experiencia y los cuatro estudiantes para profesores radica en la estructura de la ejemplificación: lineal en los cuatro estudiantes para profesores y circular,¹⁴ con ejemplos

¹⁴ Circular en el sentido que se utilizan ejemplos de 4ª/5ª categoría y se vuelve atrás con los de 3ª para aclarar dudas, retomando las de 4/5ª y volviendo a las de 3ª. Repitiendo el proceso las veces necesarias. La estructura lineal es mucho más rígida e independiente del aprendizaje de los alumnos.

espontáneos, en la profesora con más experiencia. El esquema circular, o retroalimentado, entre ejemplos de la 3ª categoría y ejemplos de 4ª y 5ª categorías es más versátil y, a través de los ejemplos espontáneos, se adapta mucho mejor a las dificultades de los alumnos, centrando su actuación en sus dudas específicas, mostrando una mayor capacidad de respuesta ante contingencias.

En los profesores sin experiencia, su ejemplificación del concepto de función se basó en la selección de ejemplos que, con mucha facilidad, se pudieron obtener de las cinco categorías identificadas. Además, la secuenciación de los ejemplos y de las categorías estuvo perfectamente delineada, cuando se presentaron ejemplos de una categoría, ya no se volvieron a presentar ejemplos de categorías anteriores, siendo la mayoría de los ejemplos de 1ª y 2ª categorías.

Por su parte, la profesora Eva, con más experiencia, usó relativamente pocos ejemplos de 1ª y 2ª categorías, solamente los necesarios para introducir los conceptos. A partir de ese punto, los ejemplos de 3ª categoría toman el protagonismo de su ejemplificación. Los ejemplos donde se aplican las funciones –a situaciones matemáticas, a situaciones de la vida real y a situaciones de modelación en otras ciencias– constituyen buenos ejemplos de cómo el concepto de función puede ser aplicado y trabajado siendo, conjuntamente, fuente de dudas y complicaciones que promueven la profundización conceptual después de recurrir, otra vez, a ejemplos de 3ª categoría. Es por eso que el número de ejemplos de 3ª categoría asume una frecuencia relativa tan grande en la ejemplificación de Eva.

Eva mostró mejor respuesta ante contingencias y una mayor capacidad de transformar el contenido, propio de un conocimiento matemático especializado de mayor nivel. También mostró una mayor capacidad de establecer relaciones y de ver el concepto de función como un todo favoreciendo la integración de sus partes (conocimiento en el horizonte matemático) y eligiendo los ejemplos más adecuados a cada situación de un banco más rico de posibilidades (conocimiento de las matemáticas y los estudiantes y de las matemáticas y la enseñanza).

Lo anterior muestra no solo las diferencias en la selección y uso de ejemplos de nuestros dos tipos de informantes (experta y noveles), sino también permite avanzar en las relaciones existentes entre el papel de la ejemplificación y algunas componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, en la línea de lo establecido por Zodik y Zaslavsky (2008).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdul-Rahman, S. (2006). "Probing Understanding Through Example Construction: The case of Integration". En D. Hewitt (ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 26(2), 1-6. Londres: BSRLM.
- Atkinson, R., Derry, S., Renkl, A. y Wortham, D. (2000). "Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research". En *Review of Educational Research*, 70(2), 181-214.
- Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). "Content knowledge for teaching: What Makes it Special?". En *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bills, C. y Bills, L. (2005). "Experienced and Novice Teachers' Choice of Examples", en P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce y A. Roche (Eds.), *Proceedings of Twenty eight annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (1), 146-153. Melbourne, Australia: MERGA.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. y Zaslavsky, O. (2006). "Exemplification in Mathematics Education", en J. Novona, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (1), 126-154. Prague, Czech Republic: PME.
- Bills, L. y Watson, A. (2008). "Editorial introduction". En *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 77-79.
- Figueiredo, C. A. (2005). "Os exemplos utilizados por professores estagiários quando ensinam o conceito de Função", Memoria de Proyecto de Investigación de Doctorado, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, España.
- Figueiredo, C. A. (2010). "Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional." Tesis Doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, España.
- Hill, H.C., Rowan, B., y Ball, D. (2005). "Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement", *American Educational Research Journal*, 42(2), 371- 406
- Huckstep, P., Rowland, T. y Thwaites, A. (2002). "Primary Teachers' Mathematics Content Knowledge: What does it look like in the Classroom?". Proceedings of BERA Conference. Exeter, BERA.

- Karaagaç, M. K. (2005). "Differences in teachers' selection and use of examples in classrooms: an institutional perspective on teacher practice". En D. Hewitt (ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 25(2), 43-48. Milton Keynes, UK: BSRLM.
- Mochón, S. y Morales, M. (2010). "En qué consiste el 'conocimiento matemático para la enseñanza' de un profesor". En *Educación Matemática*, 22(1), 87-113.
- Muir, T. (2007). "Setting a good example: Teachers' choice of examples and their contribution to effective teaching of numeracy", en J. Watson & K. Beswick (eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice*. Proceedings of Twenty eight annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 2, 513-522. Melbourne, Australia: MERGA
- Renkl, A. (2002) "Worked-out examples: Instructional explanations support learning by selfexplanations". En *Learning and Instruction*, 12, 529-556.
- Rissland-Michener, E. (1978). "Understanding understanding mathematics", en *Cognitive Science*, 2, 361-383.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2003). "The Knowledge Quartet", en J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(3), 97-102. Birmingham, BSRLM.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). "Elementary teachers' mathematics subject matter knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi". En *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Rowland, T. y Zaslavsky, O. (2005). "Pedagogical Example-Spaces", Notes for the mini-conference on Exemplification in Mathematics, Oxford University, Oxford, England.
- Shulman, L.S. (1986). "Those who understand, knowledge growth in teaching". En *Educational Researcher* 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). "Knowledge and teaching: Foundations of a new reform". En *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, learning and action*, Chichester, Wiley.
- Sowder, L. (1980). "Concept and principle learning". En R. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*, 244-285. Reston, VA, USA, NCTM.
- Strauss, A. y Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*, London, Sage.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981) "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity". En *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008). "Intuitive nonexamples: the case of triangles". En *Educational Studies in Mathematics*, 69, 81-95.

- Vinner, S. (1983). "Concept image, concept definition and the notion of function". En *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 14(3), 293- 305.
- Vinner, S. (1991). "The role of definitions in the teaching and learning of mathematics". En D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- Watson, A. y Mason, J. H. (2002). "Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics". En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 377. University of East Anglia, Norwich, UK, PME.
- Watson, A. y Mason, J. H. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*, Mahwah, NJ, USA, Lawrence Erlbaum Associates.
- Watson, A. y Chick, H. (2011). "Qualities of examples in learning and teaching", *ZDM Mathematics Education*, 43, 283- 294.
- Zaslavsky, O. (2008). "What knowledge is involved in choosing and generating useful instructional examples?", Paper submitted to WG2 of the Symposium for celebration of the centennial of ICMI. Rome, Italy, ICMI.
- Zaslavsky, O. y Peled, I. (1996). "Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation". En *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 67-78.
- Zaslavsky, O., Harel, G. y Manaster, A. (2006). "A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base". En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 457-46. Prague, Czech Republic, PME.
- Zazkis, R. y Chernoff, E. (2008). "What makes a counterexample exemplary?". En *Educational Studies in Mathematics*, 68,195-208.
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). "Exemplifying definitions: a case of squares", en *Educational Studies in Mathematics*, 69, 131-148.
- Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2007). "Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply?", Paper presented at the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5) Larnaka, Cyprus, ERME.
- Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2008). "Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom", en *Educational Studies in Mathematics*, 69(2),165-182.