El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase

Joël Briand

Resumen: En este artículo tratamos la observación de alumnos en una situación experimental en estadística, a fin de replantear el papel de la experiencia en los dominios más familiares, tales como la construcción de funciones, los primeros números, etc., y plantear interrogantes sobre tipos de razonamiento.

Vamos a intentar poner de manifiesto el estatus de la experiencia en matemáticas con la ayuda de algunos ejemplos que la teoría de situaciones didácticas (TSD)[1] permite estudiar, en los cuales una conjetura se somete habitualmente a un proceso de demostraciones. Pero hay formas de razonamiento que podrían utilizarse con más frecuencia que en la actualidad; en particular, las que consisten en relacionar unos cuantos hechos comprobados con una ley general, permitiendo ciertas formas de presunción que originen deducciones y, finalmente, demostraciones.

Palabras clave: situaciones, medios, experiencia, experimento, modelo, inferencia, retroacción.

La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe

Résumé: Dans cet article, nous reprenons l'observation d'élèves (16 ans) dans une situation expérimentale de statistiques afin de réinterroger le rôle de l'expérience dans des domaines plus familiers tels la construction des fonctions, des premiers nombres auprès d'enfants plus jeunes, etc. et de s'interroger sur des modes de raisonnements. Nous allons montrer, à l'aide de quelques exemples, que la théorie des situations didactiques (TDS) permet d'étudier le statut de l'expérience en mathématiques, où une conjecture est régulièrement soumise à un processus de démonstration. Mais il y a des modes de raisonnement qui pourraient être mis plus fréquemment en valeur, en particulier ceux qui consistent faire un lien entre quelques faits expérimentaux et qui permettent de pressentir une loi générale

Fecha de recepción: 19 de junio de 2010.

[1] G Brousseau, *Teoría de las situaciones,* Grenoble, Francia, La pensé sauvage, 1998.

permettant une certaine forme de présomption à partir de laquelle on pourra finalement construire une démonstration.

Mots-clés: situations, milieu, expérience, expérimentation, modèle, inférence, rétroaction.

INTRODUCCIÓN

Nuestra reflexión, que va a parecer bastante ingenua, se desprende de una constatación, realizada a lo largo de muchos años en la enseñanza de las matemáticas en Francia, de la idea que se hacen los actores principales (los profesores) y de lo que se dice en su formación.

En la organización de la enseñanza, cuando se trata de las ciencias, están por un lado las matemáticas y, por el otro, las ciencias experimentales. No nos extenderemos sobre los orígenes de esta separación,[2] pero recordemos que la reorganización del saber y su presentación escolar ligada a las "matemáticas modernas" de los años 1960 ha contribuido en gran medida a esta separación, la cual explica de manera más o menos consciente la imposibilidad de hacer aparecer las matemáticas como medio de intervenir sobre lo real. "En algunas décadas, la idea de que las matemáticas son un instrumento para reflexionar sobre lo real en estos tres grandes campos (el espacial, el numérico y la variable) ha sido erradicada de las matemáticas escolares" (Y. Chevallard, 2004). Además, el tipo de variable que generan la estadística y la probabilidad se trata "aparte". El estudio de la cuestión de la dimensión experimental en matemáticas, aunque no es nuevo,[3] no ha tenido

[2] Lo que justifica la especificidad de la didáctica no es el anclaje disciplinar actual. La cuestión de la especificidad es de orden epistemológico: ¿Qué es lo que se exporta de un dominio del saber hacia otro? ¿Cómo? La cuestión está abierta por razones históricas. Para comprobarlo, basta con consultar los índices de materias de las obras de matemáticas del siglo XIII.

[3] Anteriormente ha habido numerosas tentativas de acercamiento de las matemáticas con la "experiencia". En 1957 se produjo una introducción generalizada de trabajos prácticos en las clases de final de la escuela primaria y comienzo de la secundaria. Los extractos de las instrucciones oficiales de la época atestiguan una respuesta positiva a la cuestión de la dimensión experimental de las matemáticas: "Observación y experimentación: ¿se trata verdaderamente de alinear las matemáticas con las demás disciplinas? Es indudable que, en la fase inicial de la elaboración de todas las ciencias, los pasos dados son de naturaleza similar; posteriormente, cuando el matemático que ha creado entes elementales racionales se esfuerza en el estudio de sus propiedades, interviene una discriminación. Pero su trabajo sólo adquiere valor profundo si su construcción, por abstracta que sea, se apoya sólidamente en lo real o si es capaz de relacionarse con él y de adaptarse en gran medida." (Assude, 2002,) citada por T. Dias).

en cuenta suficientemente este hecho. Por eso, nos parece útil replantear esta cuestión, sirviéndonos de lo que hemos podido observar en el terreno particular de la variabilidad.

En la formación de profesores, tanto de maestros de educación primaria como de secundaria y bachillerato, el modelo espontáneo de enseñanza no es el de la puesta en funcionamiento de medios[4] propicios para que el alumno construya nuevos saberes. "Se mantiene un comercio puramente teórico y no experimental con las construcciones matemáticas más esenciales" (Y. Chevallard, 2004). Sin embargo, la ausencia de experiencia afecta al sentido de la teoría, obstaculizando la emergencia de "conceptos auténticos" (Descaves, 1992), es decir, los que han surgido de la experiencia.

Para relanzar el interés de la enseñanza de las matemáticas, se invita a los profesores a aproximarse a actividades como las de la propuesta "con las manos en la masa", sin mencionar ni aplicar los instrumentos teóricos de la didáctica de las matemáticas, como si se pudiera, sin más, retomar el principio de que "hacer matemáticas" es "experimentar" en el sentido más común del término; un poco a la manera de los ejercicios de "física recreativa" de antaño. Evidentemente, habría que explorar un poco más estas tendencias actuales y establecer distinciones según las actividades propuestas. Por ejemplo, T. Dias (Dias y Durand-Guerrier, 2004) afirma que: "se puede subrayar una diferencia notable entre la experiencia '*Math-en-Jeans*', que llega a concebir incluso que los saberes en juego no existían antes de la búsqueda, y la posición de los saberes científicos que 'están ya ahí', en las secuencias modulares de la propuesta 'con las manos en la masa'".

¿Cuál es pues el lugar que ocupa la experiencia en la actividad matemática?, o más bien, ¿qué es una experiencia en una actividad matemática? Para avivar el interés de las matemáticas, para "hacer matemáticas", recurrir a la experiencia es un camino motivador. Para poder tener en cuenta algunos modelos implícitos de los estudiantes, ocultos muchas veces tras los saberes demasiado elaborados o naturalizados de los profesores, empezaremos por un estudio realizado en bachillerato sobre estadística que es continuación de un trabajo llevado a cabo en la escuela primaria. Las conclusiones que obtengamos nos permitirán interpretar de distinta manera otras situaciones.

[4] Para una buena comprensión del concepto de medio (milieu), consúltese: http://www-leibniz.imag.fr/EEDDM11/Theme2/Texte3.html (L. Coulange y A. Bessot).

Matemáticas y campo de experiencias

Se suele afirmar que la experiencia es el encuentro del sujeto con la realidad, en el que éste recoge una información ("realiza una experiencia") y, al mismo tiempo, se forma ("adquiere una experiencia"). Pero en la "experiencia", el sujeto ¿es activo o pasivo? La etimología no da suficientes claves, porque el verbo latino "*experior*" significa a la vez "experimentar" (con un sentido pasivo: experimentar una sensación de frío) y "ensayar" (con un sentido activo: ensayar un nuevo material). Pero "experimentar" puede también tomar el sentido de "ensayar" o "probar" en: "experimentar un nuevo material". Aunque existan dos sentidos, las palabras para describirlos se mezclan por la influencia de distintas connotaciones.

Parece, por tanto, que la dimensión exploratoria y sensible de la experimentación precede y convive con la experiencia provocada para validar uno o varios resultados esperados o que se quieren refutar. Esta dimensión exploratoria de la experimentación nos parece inevitable. Habría, pues, experiencia sensible siempre, incluso en el caso de que el sujeto desarrolle algunos indicios de conjeturas que comiencen a adquirir consistencia, independientemente de la experiencia sensible.[5]

> Para saber si las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto, puedo proceder a una experiencia gráfica sobre un triángulo trazado en una hoja de papel. Si he construido una teoría del espacio en la que puedo deducir que las mediatrices de un triángulo siempre tienen un punto en común, ya no necesito verificarlo experimentalmente para todos los triángulos. Pero si no se lleva a cabo la prueba experimental, no se tiene una idea cabal de qué es una demostración teórica. En una matematización completa, se asegura que un hecho es cierto sobre una base experimental y después se asegura que, en la teoría de referencia, se puede deducir el hecho en cuestión. Ello moviliza toda una dialéctica (Chevallard, 2004).

Es incuestionable que el método científico aplicado hasta el fin exige el empleo de la experiencia para verificar las hipótesis anticipadas. Pero las matemáticas van a producir medios experimentales que no se limitarán a los medios

[5] Bachelard ha descrito ampliamente las dificultades de comprensión en física y los obstáculos consolidados, que se vuelven a encontrar siempre que se actúe en relación con la experiencia sensible.

materiales. ¿Se debe afirmar que "la experiencia es el juez de paz que establece el veredicto al que debe someterse una conjetura"? (Briand, 2005). La conjetura es un término propio de las matemáticas; en ciencias se diría hipótesis o teoría. Sin embargo, en matemáticas una conjetura se somete finalmente al proceso de demostración. "[Así pues,] la experiencia no juzga [la conjetura], a menos que considere la propia demostración como una experiencia" (F. Conne, 2007). La puesta a prueba es, sobre todo, una cuestión de razonamiento. La relación con el aspecto operatorio de la experimentación –y no el de la simple experiencia– consiste en que la puesta a prueba supone un razonamiento exploratorio teórico que se origina en lo experimental. En matemáticas, todo lo que requiere un razonamiento experimental no es necesariamente un trabajo de naturaleza experimental.

Cuando un sujeto situado en un entorno dado no encuentra inmediatamente la respuesta a un problema y percibe que ese problema se volverá a plantear, entonces pone en funcionamiento sus conocimientos e indaga en los datos que supone que tienen una relación directa con la cuestión. Esta etapa está, por tanto, sometida a sus supuestos previos, a sus métodos y a los medios de que dispone. Su evolución lo conducirá a distinguir los acontecimientos erráticos y las regularidades en ciernes. Es entonces cuando intervienen los instrumentos (signos, esquemas, organizaciones) que permiten esta distinción en la acción y una construcción con un mínimo de subjetividad en un mínimo de tiempo. Esta construcción semiótica puede interpretarse como un modelo en ciernes, pero nos parece que, a diferencia del ingeniero que trabaja en un campo familiar, un alumno, que trabaja sobre un problema para el que no tiene una solución experta, tendrá, la mayoría de las veces, que construir los instrumentos de un modelo por homomorfismo (relaciones reguladas entre los objetos y los signos) y, simultáneamente, el modelo en sí mismo, interactuando con el problema planteado. Lo que puede apreciar aquí el observador no es, entonces, más que unas estrategias bien orientadas. ¿Cuál es el sentido de un signo producido por un alumno sobre una hoja de papel? Los modelos no son entidades fijadas de una vez por todas. Se desarrollan o se revisan, conjuntamente con algunos estudios, en una relación dialéctica entre la realidad y su evocación. La sustitución repentina de la realidad por un modelo, con el pretexto de que los modelos son más accesibles y más estables que la realidad, es una visión del que sabe.[6]

[6] "Hemos reconocido que nada nos autoriza a establecer la regla de que un esquema y el horizonte de su significado exterior no puedan edificarse nunca simultáneamente en una interdependencia recíproca. Si queremos tener en cuenta objetivamente los pasos para los

Parece, pues, que aquello que acabamos de exponer necesita toda una elaboración teórica sobre el papel de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase.

Se trata aquí de construir un medio de aprendizaje al que los alumnos se enfrenten planteando acciones-observaciones que generan presunciones de las que surgirán poco a poco conjeturas, validadas o invalidadas por nuevas acciones intencionales: experimentaciones. Estas experiencias-observaciones engendran a su vez nuevas presunciones.

Consideraciones teóricas

En la teoría de las situaciones, el *medio* es el entorno constituido por los objetos (físicos, culturales, sociales, humanos) con los que el sujeto interactúa en una situación. Una *situación* es el conjunto de circunstancias en las que una persona se encuentra, así como las relaciones que la vinculan a su medio. Los *conocimientos* se manifiestan esencialmente como los instrumentos de control de las situaciones. El alumno aprende adaptándose a un medio (en el sentido conocido) que es factor de *contradicciones* y *desequilibrios*. La teoría de las situaciones toma como postulado que los comportamientos de los alumnos son reveladores del funcionamiento del medio, considerado éste como un sistema (sobre el cual el profesor podrá desempeñar diversos papeles). El saber, resultado de la adaptación del alumno al medio, se manifiesta mediante respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.

En una perspectiva constructivista, el medio debe ser factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, por tanto, de adaptaciones para el alumno. Aquí el profesor funge como organizador del medio. Esta función del medio es la que se denomina *antagonista* (del sujeto) en una situación.

La manera en que se adaptan los alumnos a este entorno se puede analizar con lo que Pierce llama "la presunción". Tomamos de Pierce el significado de "presunción":

> La presunción [...] proporciona al que razona la teoría problemática que la inducción verifica. Si, dadas las circunstancias, se encuentra frente a un fenó-

que la mente humana está capacitada, la prudencia aconseja admitir los contrarios –y no nos faltarán confirmaciones–" (Gonseth, 1974).

> meno distinto del que habría esperado encontrar, examina los rasgos sobresalientes y ve alguna característica o relación notable que reconoce enseguida como característica de algunas concepciones que ya estaban almacenadas en su mente, de manera que acaba presentándose una teoría que explicaría (es decir, que haría necesario) lo que ha encontrado de sorprendente en estos fenómenos.

Intentaremos demostrar que, en el seno de las matemáticas, tal como están constituidas actualmente, existen medios de aprendizaje que requieren la medida, en los campos de la estadística, la medida de masas y lo numérico y que producen relaciones con la experiencia que son distintas pero no del todo independientes.

Para precisar mejor nuestro propósito, estudiaremos primero la singularidad de la experiencia estadística, ya expuesta en otro trabajo (Briand, 2005), lo que nos obligará a volver a plantear la experimentación en otros campos.

EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS EN TRES CAMPOS

Una situación fundamental en estadística: la experiencia con una máquina de azar

Una actividad llevada a cabo con alumnos de bachillerato (penúltimo curso antes de la universidad, 16-17 años) consistía en proponerles una manera segura de conocer la composición de una botella opaca que contiene 5 bolas: rojas y verdes. Cada vez que se le daba vuelta a la botella, era posible ver una sola bola (se trata del principio de extracción con reposición). Las botellas no se podían abrir y se habían preparado sin que los alumnos viesen su contenido.

Análisis del dispositivo

La elección del número de bolas (5) permite diferenciar los fenómenos bastante rápidamente sin que las conjeturas que se elaboren sean triviales. Esto permite trabajar sobre *el riesgo que se toma al decidir tal o cual composición en el rango de tiradas aceptables experimentalmente*. Más allá de cien tiradas, el profesor aporta los resultados obtenidos por la computadora de manera que el desarrollo de las tiradas efectivas no tome todo el tiempo de la experiencia.

Podemos evaluar el riesgo en que se incurre al decidir la composición de una botella en función del número de tiradas efectuadas. Tomemos, por ejemplo, una botella en la que se han colocado 3 bolas rojas y 2 verdes. La probabilidad de sacar una bola roja es $\frac{3}{5}$. Conjeturamos precisamente durante una experimentación si la frecuencia de bolas rojas observada en las tiradas que se realizaron está comprendida entre 0.5 y 0.7 (intervalo de decisión). Si tenemos t tiradas, los casos favorables (que proporcionan un número n de bolas rojas) se designan de la manera siguiente: $0.5 < \frac{n}{t} < 0.7$, ya que $0.5t < n < 0.7t$.

Llamemos a y b los valores límite que tomó n en este caso. La ley binominal nos permite calcular la probabilidad de que salga el número n de bolas rojas en el número de tiradas t.

$$P = \sum_{n=a}^{n=b} \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n} \text{(con } p = 0.6 \text{ en este caso).}$$

Hagamos el estudio para 15, 25, 50, 100 y 500 tiradas:

Cuadro 1 Estudio a partir de la composición 3R, 2V

Número de tiradas	15 tiradas	25 tiradas
Intervalo	$0.5 < \frac{n}{15} < 0.7$	$0.5 < \frac{n}{25} < 0.7$
Valores de a, n y b	$8 \leq n \leq 10$	$13 \leq n \leq 17$
P	0.569	0.692
Probabilidad de formular una conjetura falsa	0.431	0.308

50 tiradas	100 tiradas	500 tiradas
$0.5 < \frac{n}{50} < 0.7$	$0.5 < \frac{n}{100} < 0.7$	$0.5 < \frac{n}{500} < 0.7$
$26 \leq n \leq 34$	$51 \leq n \leq 69$	$251 \leq n \leq 351$
0.806	0.948	0.999
0.194	0.052	0.001

Con una botella que contiene 4 bolas rojas y 1 verde, la probabilidad de sacar una bola roja es de $\frac{4}{5}$. Se conjetura, precisamente, si la frecuencia observada de bolas rojas en las tiradas efectuadas está comprendida entre 0.7 y 1 (intervalo de decisión).

En t tiradas, los casos favorables se designan, por consiguiente, de la siguiente manera: $0.7 < \frac{n}{t} < 1$, ya que $0.7t < n < t$.

Hagamos el mismo estudio que se hizo anteriormente para 15, 25, 50, 100 y 500 tiradas:

Cuadro 2 Estudio a partir de la composición 4R, 1V

Número de tiradas	15 tiradas	25 tiradas
Intervalo	$0.7 < \frac{n}{15} < 1$	$0.7 < \frac{n}{25} < 1$
Valores de a, n y b	$11 \leq n \leq 14$	$18 \leq n \leq 24$
P	0.800	0.887
Probabilidad de formular una conjetura falsa	0.2	0.113

50 tiradas	100 tiradas	500 tiradas
$0.7 < \frac{n}{50} < 1$	$0.7 < \frac{n}{100} < 1$	$0.7< \frac{n}{500} < 1$
$36 \leq n \leq 49$	$71 \leq n \leq 99$	$351 \leq n \leq 499$
0.939	0.988	0.999
0.061	0.012	0.001

Estos resultados muestran que la composición "5 bolas" ayuda bastante bien en las experimentaciones que se pueden realizar en clase, permiten, además, asegurar que el riesgo puede ser estudiado en condiciones experimentales válidas. Dichos resultados confirman también que, en una situación igual (en el número de tiradas), es menos arriesgado conjeturar 4R, 1V (para la botella 4R, 1V) que conjeturar 3R, 2V (para la botella 3R, 2V).[7]

En este estudio, los alumnos se enfrentan al menos a dos problemas:

- En primer lugar, concebir los intervalos que designamos como intervalos de confianza y que se construyen en la clase, pero no a partir de la probabilidad, sino de los resultados estadísticos y de una comprensión, en acto, de la ley de grandes números: las frecuencias del evento (3R, 2V) se distribuyen por ambas partes de la frecuencia más probable.
- Luego, comenzar a evaluar el riesgo en que se incurre al hacer una previsión falsa después de n tiradas. Para eso, los alumnos son inducidos a enumerar las experiencias, para un número de tiradas dadas, produciendo una frecuencia situada fuera del intervalo de confianza en una serie de experiencias acordadas.

La imposibilidad de abrir la botella sitúa de golpe a los alumnos en una situación de observador que debe "registrar" fenómenos. Los objetos de la experiencia son, de hecho, objetos matemáticos: una extracción, una serie de extracciones, una suma en el interior de una serie de extracciones o una suma de series de extracciones. El medio[8] de aprendizaje está constituido por signos producidos por la experiencia.

Nos interesamos, entonces, en las retroacciones de esta situación. A diferencia de las situaciones adidácticas relativas a familias de saberes matemáticos de carácter determinista, las retroacciones no serán de la misma naturaleza, porque, en este caso, se trata de un modelo estocástico.

- Para que un alumno pueda pasar de una simple constatación a una previsión de lo que sucederá en una experiencia antes de realizarla, es necesario que construya el concepto de experiencia idéntica, experiencia reproducible. En particular, la definición de una muestra dependerá de la idea que se haga el alumno de lo que es una experiencia. Desde el principio de la práctica, una alumna manifiesta claramente que tiene en cuenta el orden

[7] Un estudio teórico detallado del modelo de ayuda en la decisión fue escrito en su tiempo por P. L. Hennequin (P.L. Hennequin, 1974), el cual permitía poner en evidencia que, para un número de tiradas iguales con un riesgo dado, ciertas composiciones podían ser conjeturadas y otras, no.

[8] *Milieu* en el original.

de aparición de las bolas: "encontraremos dos veces el mismo orden". Sin embargo, acaba considerando que los sucesos "RVVRVRRVVRRRVRV" y "VVRRVVVRRVRRVRR" son dos manifestaciones del suceso "8R y 7V"; es decir, que esos dos sucesos son dos resultados idénticos, desde el punto de vista de la probabilidad.

- La invalidación o validación de presunciones no se puede realizar sistemáticamente mientras el sujeto no disponga del modelo estadístico: un alumno que piensa que hay 3 bolas verdes y 2 rojas en la botella y que, para asegurarse, efectúa 5 extracciones y obtiene 2 verdes y 3 rojas, según el modelo implícito del que dispone, puede extraer conclusiones diferentes: "estaba equivocado" o "esto no lo demuestra".
- La experiencia no conduce sistemáticamente al contenido real de la botella, aunque los alumnos puedan pensarlo.
- Rápidamente empiezan a aparecer regularidades; he aquí una presunción: "cuantas más tiradas se hagan, con mayor certeza se podrá afirmar algo acerca de la composición de las botellas".
- Se estudian más fácilmente otras presunciones sobre los intervalos de decisión cuando se ha calculado una frecuencia: es sin duda más fácil decidir, con igual riesgo y menos tiradas, la composición 4R, 1V, porque el intervalo [0.7; 1[es mayor que el intervalo [0.5; 0.7], que permitiría arriesgarse a decidir que la composición es 3R, 2V. En efecto; los intervalos de decisión son los siguientes:

Intervalo de frecuencia de las bolas rojas	Decisión por tomar
0	0 rojas y 5 verdes
[0; 0.3]	1 roja y 4 verdes
[0.3; 0.5]	2 rojas y 3 verdes
[0.5; 0.7]	3 rojas y 2 verdes
[0.7; 1]	4 rojas y 1 verde
1	5 rojas

Con el fin de explicitar mejor estos nuevos saberes surgidos en las experiencias, el profesor puede organizar un medio de referencia enriquecido mediante la ayuda de un programa informático realizado sobre un "*applet*", que contenga tablas numéricas visibles, generadas al azar: el alumno introduce una composición de la botella y pide 15, 25, 100, 500 o 1 000 tiradas. El programa propone el resultado de esas extracciones con frecuencias absolutas y relativas.

Para someter mejor a prueba la hipótesis: "cuanto más tiradas se hagan, con mayor certeza se podrá afirmar la composición de las botellas", el profesor propone construir un gráfico cartesiano, poniendo en el eje de las abscisas el número de tiradas y, en el de las ordenadas, el resultado de una experiencia (estadística) y lo que, desde su punto de vista, constituye la mejor hipótesis que se puede proponer. De esta manera, los alumnos proponen materializar, mediante una recta paralela al "eje de las x", lo que para el observador constituye el comienzo de un trabajo probabilístico. La sensación de la probabilidad se basa en la seguridad de la convergencia.

En consecuencia, en este momento de la experiencia, los alumnos han comprendido la existencia de regularidades, a pesar de las variaciones que aparecen en toda experiencia estadística. Pero efectuar unas recopilaciones de datos estadísticos no constituye *a priori* la realización de una experiencia. Cuando mucho, podríamos hablar de ensayo. Para que la idea de experiencia se vaya instalando poco a poco, es preciso que los alumnos tomen como objeto de estudio las regularidades y la incertidumbre, que conciban nuevas experiencias y que, en definitiva, reconozcan una actividad matemática.

Esta manera de enfrentarse a la singularidad de la experiencia estadística nos permite replantear la experimentación en matemáticas, empezando a tomar las regularidades como objeto de estudio.

a) Análisis

Hemos encontrado al menos tres clases de presunciones:

La primera (descubrimiento de la relación entre frecuencia y composición de la botella) aparece muy rápidamente: "si hay más bolas rojas en la botella, hay más posibilidades de que aparezcan".

La segunda (previsiones con menos riesgo de equivocarse para las composiciones 1, 4 y 4, 1) aparece más tarde: una alumna afirma que *"si tenemos una botella de composición 4, 1, entonces es más fácil tomar una decisión"*.

La tercera aparece, al principio, de manera más difusa: *"Qué cosa más rara, esto sale distinto cada vez; no se puede prever nada, a menos que lo hagamos 1 000 veces..."*. Después se enuncia de manera más precisa, lo que, de hecho, constituye la ley de los grandes números: *"me parece que cuantas más tiradas se hacen, más se tendrá una cifra media, cada vez más centrada, que estará por tanto más cerca de la realidad..., cuantas más tiradas se hacen, más nos acercamos a la realidad"*.

La comprobación de estas tres presunciones se efectúa en bachillerato (clase de 17-18 años) con ayuda de experiencias realizadas en medios de referencia distintos.

- La primera experiencia la constituyen experiencias repetidas de manera bastante espontánea en el medio constituido por la recogida del resultado de las tiradas.
- La segunda puede tratarse con ayuda de representaciones gráficas. El intervalo de decisión para la composición 4, 1 es [0.7; 1], o sea, una amplitud de 0.3, mientras que el intervalo para la composición 3, 2 es [0.5; 0.7], o sea, una amplitud de 0.2.
- La tercera sigue una presunción que va a permitir la organización de un dispositivo estructurado o, al menos, considerar su organización, como si la certidumbre estuviese ya instalada. Pero en ninguno de estos casos podemos demostrar la consistencia de las conjeturas emergentes.

b) La variabilidad en la experiencia

Admitir que un suceso no se reproduce sistemáticamente, aunque la experiencia se repita en las mismas condiciones, constituye en esta parte del contrato una ruptura fundamental determinada por la relación dada con el medio de aprendizaje. La situación debe, pues, permitir esbozar un modelo que tome como objeto de estudio esta nueva incertidumbre: la de la variabilidad. La experiencia cambia de estatus: una experiencia se convertirá en una clase de experimentos elementales en los que aparecen teoremas en acto:

- ¿Tiene importancia el orden de aparición de las bolas?
- ¿Se tienen que hacer series de 5 tiradas?
- ¿Se pueden añadir los resultados de m y n tiradas efectuadas con una misma botella para poder extraer mejores conclusiones, como si se hubieran hecho $m + n$ tiradas?

De aquí se obtiene, por ejemplo, un trabajo (efectivo y no probabilista) de medida del "riesgo", cuando hay que tomar una decisión en función del número de tiradas.

Efectuando un "número adecuado" de experiencias, los alumnos van a disponer de un instrumento que les permitirá empezar a formular hipótesis, teniendo en cuenta el riesgo de una toma de decisión en función del número de tiradas.

Tabla Trabajo de un alumno sobre la composición 3R, 2V: series de 20 experiencias para15, 25, 100 y 500 tiradas.

En este trabajo, un grupo de alumnos toma como objeto de estudio el intervalo de confianza [0.5; 0.7]. El dispositivo experimental permite cuantificar estadísticamente la evolución del riesgo en función del número de tiradas: aquí, de 20 series de 15 tiradas, 9 conducen a una hipótesis falsa sobre el contenido de la botella; si las series son de 25 tiradas, de 20 series, 8 conducen a una hipótesis falsa. Para series de 100 tiradas, sólo una serie sobre 20 conduce a hipótesis falsa y ninguna si las series son de 500 tiradas.

Así pues, la incertidumbre es también un objeto de estudio. Por supuesto, la modelización es todavía relativamente primitiva, pero las primeras observaciones mostraron que hubo que franquear muchos obstáculos antes de que el alumno estuviese en condiciones de considerar el medio que se le proponía como un medio matemático. Es decir, un medio en el que, si construye una organización matemática adecuada, podrá dominar mejor los sucesos que se producirán. Y todo esto, por supuesto, sin abrir la botella. Las retroacciones esperadas se producen sobre clases de tiradas.

c) Conclusión

La construcción de la noción de experiencia ha planteado varias cuestiones. ¿Qué es un sondeo en un conjunto que todavía no se conoce? ¿Qué es repetir una experiencia? ¿Cuál es el significado de un experimento? ¿Cómo aparece la idea de sumar los resultados de experiencias sucesivas? En esta situación ha habido que conjugar esta construcción

- con la experiencia en estadística; ¿qué sería, de hecho, la elaboración de una clase de experiencias?;
- con el pensamiento determinista que atribuye lo imprevisible al azar. Planteamos la hipótesis de que la racionalidad, confundida con el determinismo matemático, puede constituir un obstáculo epistemológico –e incluso didáctico– para la construcción del pensamiento estocástico.

Es precisamente esta confrontación con la experiencia estadística lo que nos obliga a replantear seriamente la experimentación en matemáticas, que es lo que vamos a desarrollar a continuación.

Una situación fundamental de la función afín: la experimentación a través de la medida provisional y medida efectiva de masas

Hemos vuelto a tomar, adaptándola, la situación denominada inicialmente del "peso del vaso de agua" (N. Brousseau y G. Brousseau, 1986). El origen de esta situación es el siguiente: el profesor comprueba que, cada vez que un problema escenifica la medida de una magnitud que no puede tratarse independientemente de otra magnitud (como en el caso de un recipiente y su contenido, por ejemplo), los alumnos cometen errores, a pesar de que aparentemente disponen de los conocimientos precisos para evitarlos.

El objetivo de la situación construida a partir de esta comprobación es permitir que los alumnos se enfrenten varias veces a este problema, aprovechando las retroacciones de la situación. Describiremos rápidamente esta situación, deteniéndonos en algunos resultados.

1. Primera etapa: el profesor coloca en una mesa una balanza digital, un recipiente de plástico con capacidad aproximada de un litro y un vaso. Junto a la mesa hay un cubo lleno de agua. El profesor toma el recipiente y vierte en él un vaso de agua. Pide entonces a los alumnos que estimen el peso que dará la balanza cuando ponga el recipiente encima. Cada estudiante hace su estimación y la escribe en una hoja; después, el profesor representa en una recta numérica, dibujada en la pizarra, los valores

dados y cuántos alumnos han previsto cada valor. Pide entonces a un alumno que ponga el recipiente en la balanza y lea el peso indicado. En seguida se analizan las estimaciones dadas; el profesor no hace ningún comentario ni en señal de aprobación ni en señal de rechazo.

2. Segunda etapa: "Vierto otro vaso de agua en el recipiente. ¿Cuánto pesará ahora? Escríbanlo en el cuaderno". El desarrollo posterior es el mismo que el de la primera etapa: previsiones de los alumnos, registro de éstas por el profesor en la recta numérica y, por último, verificación del peso.
3. Tercera etapa: se desarrolla como las dos precedentes: el profesor vierte un tercer vaso de agua en el recipiente, los alumnos hacen sus previsiones, las cuales el profesor anota en la recta numérica y, finalmente, se verifica el peso en la balanza.

   Nota: A lo largo de estas tres etapas el profesor no hace ningún comentario, aunque los alumnos lo presionen para ello.
4. Cuarta etapa: el profesor vierte en el recipiente un cuarto vaso de agua.
   a) La consigna es la misma que en las etapas precedentes.
   b) Registro de *2 o 3 previsiones orales solamente*.
   c) Antes de anotar las demás previsiones, el profesor propone a los alumnos un debate. Les pregunta quiénes están seguros de su previsión y por qué. Propone a continuación una discusión para intentar saber quién tiene razón y que exponga su método antes de pesar, pero en ningún caso da su opinión. Tras el debate, les dice que pueden cambiar su previsión si lo desean.
   d) Rectificación de las previsiones: el profesor interrumpe la discusión cuando le parece oportuno. Los alumnos que así lo deseen corrigen el peso que habían anotado en su cuaderno.
   e) Verificación: como en las etapas anteriores.
5. Quinta etapa:
   a) Consigna: "Vierto un quinto vaso para los que deseen utilizar el método que los haya convencido de entre los ofrecidos por los compañeros. Hagan sus previsiones".
   b) El mismo desarrollo que en las etapas precedentes: previsión, su anotación y verificación del peso.

Fin de la sesión. Se prevé una segunda sesión para el día siguiente, que servirá para institucionalizar los saberes descubiertos en la primera.

a) Análisis a priori

En el marco de esta experiencia del "vaso de agua", el paso hacia lo que será la función afín de R^+ en R^+ viene de la modelización que permite dar cuenta de lo hecho, generalizando.

En el cuadro que sigue, indicamos el contenido de este análisis en la segunda columna. En el momento de la estimación, luego de vaciar el segundo vaso de agua, se plantea la hipótesis de que los alumnos van a utilizar el modelo de la proporcionalidad como medio de previsión.

La mayoría de los alumnos obtiene el resultado después de que se ha vaciado un tercer y un cuarto vaso. Un vaso de agua pesa 140 gramos (argumento estadístico ligado a las aproximaciones de medidas). En seguida empiezan a razonar de esta manera: si se añade *n,* entonces la masa aumenta $n \times 140$. Esta proporcionalidad implícita corresponde a las experiencias de los estudiantes y puede volver a ser introducida explícitamente por el profesor. Por último, el peso del vaso de agua se obtiene fácilmente efectuando la operación 201 g − 140 g.

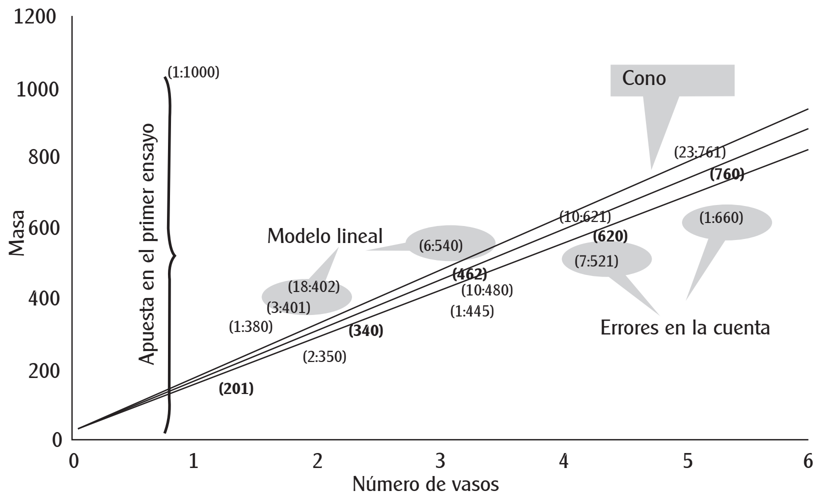
En un proceso experimental, se puede pues llegar a (en la educación secundaria) mediante una función afín de R^+ en R^+ $x \longrightarrow 61 + x \times 140$.

b) Extracto de una observación en una clase de 4º de educación primaria (9 a 10 años)

En el cuadro siguiente, la primera columna indica una estrategia ganadora, cuando es posible llevarla a cabo, lo que no sucede en los dos primeros casos. La segunda columna expresa un análisis *a priori* de las estrategias esperadas. La tercera es el resultado de una observación realizada en 5º curso de educación primaria (10 años)[9] al final del curso escolar. La cuarta columna, que se volverá a tener en cuenta en el cuadro siguiente, resume los análisis que siguieron a la observación.

[9] École Flornoy en Burdeos, clase de D. Géron.

	Estrategia ganadora	Análisis a priori (S_i: estrategias esperadas)	Previsiones de los alumnos, interpretación posible y resultados experimentales.	Observaciones
1	? adivinanza	Previsión basada en la experiencia de los objetos pesados.	Los alumnos han previsto de 30 g a 1 000 g. Resultado experimental: $m_1 = 201$ g	Azar
2	? adivinanza	S_1: $2m_1$ S_2: $m_1 + m$ tal que $m < m_1$.	18 alumnos han previsto 402 g. 3 alumnos han previsto 401 g. Un alumno ha previsto 400 g. Dos alumnos han previsto 350 g. Un alumno ha previsto 380 g. Resultado experimental : $m_2 = 340$ g.	1– Rechazo del azar 2– Proporcionalidad. 3– Aproximación, teniendo en cuenta la primera experiencia.
3	$m_2+(m_2-m_1)$	S_1: $m_2 + (m_2 - m_1)$ S_2: $m_1 + m_2$ S_3: $2m_2$	6 alumnos han previsto 540 g ($m_1 + m_2$) Un alumno ha previsto 445 g. 10 han previsto 480 g. Uno ha previsto 471 g. Sin duda: (m_1+m_2/2) con error de cálculo (4 en vez de 3). Resultado experimental: $m_3 = 482$ g	1– Rechazo de la proporcionalidad. 2– Conservación de la diferencia.
4	$m_3 + m_2 - m_1$ $m_3 + m_3 - m_2$	S_1: $m_3 + m_2 - m_1$ S_2 : $m_3 + m_3 - m_2$ S_3: $2m_3$ S_4: $m_3 + m_2$	Fase 1: El profesor pide a tres alumnos: 622, 520, 580. Después, tras discusión: Fase 2: 14 alumnos 621 g aprox. 7 alumnos 521–540 g. 4 alumnos 630 g aprox. Resultado experimental : $m_4 = 620$ g	Control de los errores con las decenas del orden anterior que hay que retener al sumar.
5	$m_4+(m_2-m_1)$ o cualquier otra similar.	S_1: $m_4 + (m_2 - m_1)$ o cualquier otra estrategia similar.	Todos los alumnos alrededor de 759 – 770 g, salvo una niña que da 660. Resultado experimental: $m_5 = 760$ g	Persisten los errores en la retención de las decenas del orden anterior.



c) Análisis gráfico

Leyenda:

(*n*): resultado de la experiencia.

(*a*:*n*): número de alumnos que han previsto el valor *n*.

(errores en la cuenta): origen de los errores cometidos (que provocan la salida de las previsiones del cono de incertidumbre ligado a la experiencia en sí misma.)

d) Conclusión

A partir de la sexta etapa, todos los alumnos logran un resultado reconocido como plausible. Pero, aunque la mayoría ha sabido formular un razonamiento por inducción[10] (justificando los primeros errores porque no han tenido en cuen-

[10] "La inducción se da cuando el que razona mantiene ya una teoría de manera más o menos problemática (yendo de una asunción interrogativa a una inclinación muy fuerte de la que apenas se duda) y, al mismo tiempo, piensa que, si esta teoría es verdadera, entonces, en ciertas condiciones, deberían producirse algunos fenómenos (preferentemente fenómenos inesperados e imprevistos); el que razona experimenta, es decir, asegura estas condiciones y busca que se produzcan los fenómenos predichos" (C. S. Peirce).

ta el peso del vaso), otros han seguido trabajando por presunción, lo que los ha llevado a enmascarar errores; no se ha puesto de manifiesto la contradicción de un alumno que, tras la primera experiencia dice: "normalmente esto tiene que dar 200", para afirmar a continuación: "yo siempre he añadido 150". Otro alumno que afirma que siempre ha añadido 140 y que, por tanto, ha acertado, ¿ha rechazado verdaderamente el modelo de la proporcionalidad?

El medio de aprendizaje está constituido por pesadas con balanza digital que producen números.[11] En este caso, los alumnos construyen un modelo mecanicista[12] (J. M. Legay, 1997) de previsión que se desestabiliza continuamente por los resultados de la medición efectiva. Deben, por tanto, aprender a convivir con errores inevitables, causados por la acción de medir. Prevén, basándose inicialmente en una presunción de linealidad. Más tarde, cuando la experiencia contradice el modelo que predicen basado en esta presunción, construyen otro modelo que tendrá que resistir los avatares de la medición efectiva durante la experiencia. Para el observador, se trata sin duda de un tipo de incertidumbre distinto del de una experiencia estadística, pero ¿qué piensa el alumno? El alumno que declara contrariado: "era 201, después 340 y entonces he añadido 139 ¡y me ha dado 482! Nunca da lo mismo", ¿distingue entre las retroacciones que se producen en un sistema estadístico y las que aquí se dan? Por otra parte, no todos los alumnos abandonan el modelo lineal desde la primera retroacción.

Una situación fundamental de la adición

a) La experiencia con la hucha y su contabilidad

Estudiemos ahora, mediante un ejemplo, desarrollado esta vez en primer grado de educación primaria (6 años), de qué manera nuevas condiciones van a generar un trabajo de modelización que puede aproximarse desde otros dos. Para ello, comparemos dos momentos de una clase.

Primero, el profesor muestra varios cubos en una caja: los alumnos cuentan a coro 3 cubos. El profesor escribe entonces 3 en la pizarra. El profesor enseña en otra caja otros cubos: los niños cuentan 5 cubos. El profesor escribe 5 en el

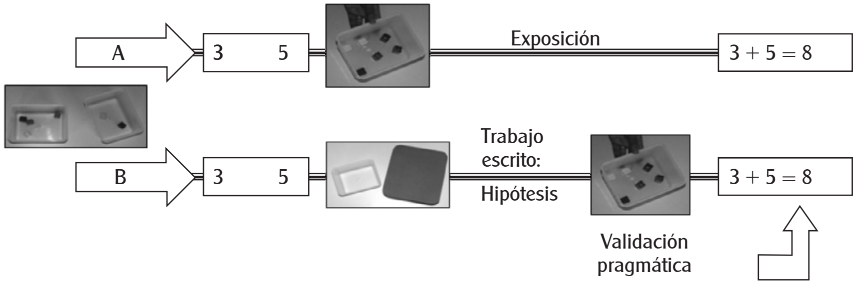
[11] La primera experiencia, realizada por Nadine Brousseau y Guy Brousseau, utilizaba balanzas de brazos iguales de tipo Roberval, lo que daba lugar a un medio distinto.

[12] En la p. 41, el autor distingue tres tipos de modelos: los de hipótesis, los de mecanismos y los de decisión y previsión.

tablero. Junta los dos contenidos en una sola caja y los alumnos cuentan todos juntos 8.

Posteriormente, el profesor vuelve a mostrar varios cubos en una caja: los niños cuentan a coro 3 cubos. El profesor escribe 3 en la pizarra. El profesor muestra cubos en otra caja: los niños cuentan 5. El profesor escribe 5 en la pizarra. Entonces, reúne los dos contenidos en una sola caja, tapándola. Los alumnos deben prever, sobre el cuaderno, cuántos son los cubos escondidos en esta caja. Para tener éxito en esta actividad, los alumnos se servirán de 3 y 5 y desarrollarán distintas estrategias escritas, que les permitirán (o no) obtener 8 de una manera u otra: regletas dibujadas, cubos dibujados, la serie 1, 2, 3, etcétera. En resumen, utilizarán signos. Las hipótesis hechas se validarán o invalidarán después, cuando se abra la caja.

Las dos fases (A y B) parecen similares, pero, aunque el medio material es el mismo, el medio de aprendizaje es distinto. Los escritos que se hayan podido realizar en el primer caso no harían más que repetir lo que ya se había puesto de manifiesto, mientras que los escritos realizados en el segundo caso permiten interrogantes, presunciones y conjeturas.



Pero esta conclusión sería un tanto simplista. Para que se logre la anticipación de la acción en el segundo caso, es decir, para que los niños "entren" en la segunda situación,[13] tienen que haber hecho suyo el medio.

Así pues, el profesor instaura el primer medio de referencia para que los niños sepan qué es lo que está en juego cuando se cubra la caja. Algunos anticiparán (es decir, entrarán en dialécticas de acción, de formulación y validación)

[13] Se trata de las condiciones que en su día estudió J. Peres en la actividad llamada el "juego del tesoro" (J. Peres, 1984), en ocasión de la fase de constitución de la colección de referencia.

y construirán los primeros teoremas y repertorios aditivos, mientras que otros, quizás, no logren nada.

Por tanto, aclarar la diferencia entre las dos secuencias más bien debería consistir, en cierto modo, en probar la necesidad de la primera en un proceso de aprendizaje por adaptación o asimilación y su insuficiencia para asegurarse de que haya habido una actividad matemática. En definitiva, la primera situación comunica la regla de un juego, mientras que la segunda permite jugar y comprender en qué consiste ganar o perder y extraer de ello el conocimiento correspondiente.

Dicho de otra manera, si todo está a la vista, el niño puede dar una respuesta acertada, sin ninguna intención. El ritual de contar bastará para mantener un contrato aceptable en la clase. Sin embargo, cuando el medio de aprendizaje se convierte en el de los signos, la experiencia se desplaza de un medio material a un medio simbólico, hecho de símbolos (que es más una estructura homomorfa que un modelo). Entonces, la respuesta a "¿cuántos hay en la caja?" no se construye en un medio material, sino que se genera en un medio formal de signos. Los conocimientos así construidos (que pasan a poderse formular como saberes) permitirán la previsión.

b) Confrontar la realidad

Vayamos más allá: ¿lo que hemos visto es suficiente para que podamos hablar de un medio instaurado? Imaginemos que en el dispositivo de la segunda secuencia hemos hecho una pequeña trampa: en el momento de abrir la caja hay 9 cubos (el profesor ha añadido uno, sin que lo vieran los niños). Había 3 y 5 y de repente hay 9. Los niños que no saben, no protestarán; pero los que habían empezado a elaborar un modelo de predicción, ¿se sorprenderán? Si nos situamos del lado del observador, no hay duda de que estos niños deberían asombrarse, lo que querría decir que hay un modelo bien instalado que resiste las contradicciones: esto no es posible, porque "3 y 5 da 8 y no 9". Pero la comprensión de la adición exige un principio de no contradicción (el resultado de 3 y 5 no puede ser más que uno solo) que forma parte de la construcción del modelo. Entonces, el profesor asigna al medio y a la experiencia, en el sentido clásico del término, un papel distinto: el de confrontar la realidad, porque el modelo se hace consistente, y afirma "8".

Reconocemos que esta manera de actuar no es frecuente en clase y que quizás choque a los maestros, pero provoca una doble problemática:

- la de los modelos, su gestación y su vida autónoma;
- la del lugar que ocupa en la enseñanza esta otra función del saber: ser un instrumento de interrogación, de discusión y no sólo de previsión.

Sin duda, nuestras concepciones deterministas de los modelos enseñados nos llevan a descuidar aspectos de su construcción. Se encuentran efectos parecidos en otros campos. Después de todo, desde el punto de vista del sujeto, el alumno, la sorpresa ante un suceso inesperado en un fenómeno determinista es de la misma naturaleza que la que se experimenta ante un suceso aleatorio. ¿Quién podría extraer conclusiones en el lugar del alumno?

Ocurre que, en la escuela primaria, los teoremas no se prueban con demostraciones. La validación pragmática y posteriormente sintáctica se suele referir a la contingencia material o aritmética. Se ha visto que, en fase de aprendizaje, el profesor pretende que los alumnos tengan la suficiente confianza en sus teoremas como para que se vayan emancipando progresivamente del medio material, al mismo tiempo que vuelven a él para estudiarlo con nuevos instrumentos matemáticos.

El paso al bachillerato (16 a 18 años) marca el paso a la demostración. ¿Qué tipos de experiencias pueden suscitar progresivamente la necesidad de demostrar? Vamos a plantear simplemente algunos puntos para una reflexión.

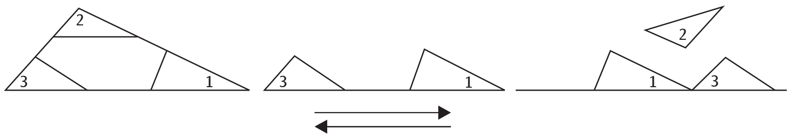
SITUACIONES EN SECUNDARIA (12 A 16 AÑOS): RAZONAMIENTOS Y DEMOSTRACIONES

La inferencia probable

Según Pierce (J. M. Baldwin, 2007), la "inferencia probable" es "toda inferencia que no considera su propia conclusión como necesariamente verdadera (aunque los hechos sean tales que las premisas los afirmen)".

He aquí una actividad propuesta para la organización de una secuencia de clase en secundaria (12 a 16 años): 25 alumnos han dibujado 25 triángulos (muy probablemente estos triángulos no se puedan superponer). El profesor propone recortar los ángulos[14]

[14] Más habitualmente esta situación consiste en hacer una conjetura sobre lo que podría ser la suma de la medida de estos tres ángulos. La conjetura consiste en pensar que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano y se extrae aquí por inducción, suponiendo



y pregunta si es posible construir una figura de modo que los ángulos de la base, deslizándolos, encajen el ángulo del vértice opuesto (Conne, 2007, *Rdm*).

Los 25 triángulos recortados van a hacer que 25 veces no se pueda refutar la alineación. La actividad no hace, por tanto, más que evaluar una probabilidad objetiva. Su validez no depende de una uniformidad de la naturaleza ni nada parecido. La uniformidad constatada tenderá a dar a esta probabilidad un valor muy grande, lo que convertirá esta inferencia en una inferencia probable. Se trata de un razonamiento por inducción seguido colectivamente: reunir un cierto número de hechos comprobados en una ley general. La veracidad de las conclusiones está siempre a expensas de un contraejemplo, pero la inducción garantiza claramente la veracidad de sus conclusiones en todos los casos que haya considerado con anterioridad. "En consecuencia, el razonamiento por inducción es un razonamiento válido y relativamente pertinente que no garantiza el alcance de sus conclusiones". Por último, C. S. Pierce añade: "Es mediante la inducción como la experiencia contribuye a aumentar nuestros conocimientos."

En este caso, la aproximación a la verdad es, al principio, de naturaleza estadística: "es muy poco probable que el ángulo no sea llano"; "es muy probable que, al alinear, se vuelva a encontrar el mismo ángulo en medio". En este instante el profesor sabe que tiene a su disposición una demostración que permitirá que el hecho "la suma de los ángulos de un triángulo es de 180°" tenga probabilidad 1.

Ciertamente, experiencias parecidas de recorte permiten demostrar[15] que $64 = 65$. Pero si 25 alumnos que dibujan 25 triángulos distintos llegan a 25 "ángulos llanos" o a 25 "terceros ángulos", ¿se puede considerar esto como una simple coincidencia?[16] Trabajar sobre la inferencia podría consistir en pedir a los alumnos que intenten construir un triángulo de tal modo que el resultado, reconocido ya desde la primera experiencia, resulte invalidado. De esta manera

que el ángulo llano se haya identificado previamente como un objeto que existe en cuanto ángulo.

[15] Para 64 = 65, nos referimos a la célebre paradoja de Lewis Carroll. Véase anexo. Hay muchas otras paradojas asociadas a recortes, como por ejemplo los triángulos de Gardner.

[16] El medio de aprendizaje instaurado por el profesor es evidentemente distinto del que se habría construido a partir de fotocopias, reproduciendo 25 veces el mismo triángulo.

los alumnos se habrían aproximado a lo que ellos estimarían con "verdadero siempre". Adquirir la firme convicción de una verdad esperada mediante una experiencia, pero puesta en duda desacreditando el procedimiento experimental (la paradoja de L. Carroll), es un motivo muy fuerte para desear "verlo claro". La demostración será, más tarde, el juez de paz del que hablábamos antes.

La inferencia probable puesta en escena en un libro de texto escolar

1. Construye un triángulo cualquiera ABC. Señala el punto medio I del segmento [AB] y el punto medio J del segmento [AC]. Traza la recta (IJ). ¿Qué sucede?
2. Vuelve a hacer la misma construcción con otros dos triángulos muy distintos.
3. Formula una conjetura.
4. Sobre una de tus figuras, sitúa el punto K simétrico del punto I con relación al punto J.
   a) ¿Qué se puede decir del cuadrilátero AICK?
   b) ¿Qué se puede deducir para los segmentos [AI] y [CK]?
   c) ¿Qué se puede deducir para los segmentos [BI] y [CK]?
   d) ¿Qué se puede decir del cuadrilátero IBCK?
   e) ¿Qué se puede concluir para las rectas (IJ) y (BC)?

Completa la frase siguiente:
En un triángulo, la recta que pasa por los puntos medios de dos lados es

____

Este ejercicio propone comprobar algo en la cuestión 1. La cuestión 2 va a permitir –al menos eso se pretende– pasar de la comprobación a una experiencia y después a una conjetura. El cambio de nivel del medio, necesario para pasar a la cuestión 4, es grande. Los alumnos no pueden construir ellos solos esta demostración.

Consideremos el encargo paradójico del profesor que pide a sus alumnos que construyan un triángulo pequeño cuyos vértices sean los puntos de corte entre sí de las mediatrices de otro triángulo grande (que es lo que se obtiene cuando no se sabe que necesariamente se cortan en un solo punto), eligiendo el triángulo de partida de manera que el triángulo pequeño sea lo más grande posible. El profesor sabe que este encargo no es aceptable y espera que los alumnos formulen la hipótesis correcta: "quizás se corten las mediatrices en un solo punto", que es, de hecho, la inferencia probable: "no se puede afirmar que no se corten en un mismo punto", invertida.

Para volver al ejercicio anterior, bastaría una ligera modificación del texto del manual[17] para que el medio de aprendizaje fuera más eficaz (al hacerse más claramente antagonista) y permitiese la formulación de una inferencia probable: bastaría con proponer: "Construye un triángulo ABC. Señala el punto medio I del segmento [AB] y el punto medio J del segmento [AC]. ¿La recta (IJ) corta a la recta (BC)?"; continuar después: "Construye otro triángulo ABC, de manera que la recta (IJ) corte a la recta (BC)". Aquí también se trata de una petición paradójica que no pretende otra cosa que situar a los alumnos frente a un medio que resiste y que les lleva a decir:"tienen que ser paralelas", otra manera de decir: "no se puede refutar el hecho de que no se corten". El cambio de medio de la cuestión 4 sería entonces una respuesta a un cuestionamiento colectivo y no sólo a una conjetura vaga como "parece que son paralelas". Los alumnos habrían tenido que definirse. Sin embargo, la demostración no hubiera sido tan sencilla, aunque quizás se hubiera aceptado mejor. La función de una demostración es la validación, pero la mera demostración no contribuye en nada a la invención ni al descubrimiento.

Volvemos a encontrar aquí algo que ya habíamos abordado antes: también es formativo rechazar una hipótesis con una probabilidad bastante alta de tener razón en el rechazo. En este ejercicio, por supuesto, el rechazo de la hipótesis viene acompañado de un riesgo que se anulará mediante una demostración.

La inferencia probable y la demostración

Tomemos esta vez un ejemplo numérico: *"se tienen tres números naturales consecutivos y al cuadrado del de en medio se le resta el producto de los otros dos. ¿Qué resultado se obtiene?"*

Los alumnos constatan, mediante dos o tres ensayos, que el resultado es 1. Experimentan entonces con otros ejemplos numéricos y comprueban que el resultado es siempre 1. ¿Se podrían encontrar tres naturales consecutivos para

[17] Sugerido en formación de profesores de secundaria (PLC2, 2007) por J. M. Digneau, IUFM Bordeaux.

los que el resultado no fuese 1? Ante la resistencia a no encontrar un ejemplo, los alumnos pueden avanzar la hipótesis de que no se puede rechazar el hecho de que eso dé siempre 1. El "siempre" supone un cambio de medio para la experiencia, a fin de permitir plantear otro problema en una forma general:[18] la manera en que se manejen las escrituras literales influirá sin duda en la resolución, pero el cambio de medio experimental (el de las escrituras literales) habrá construido la demostración. Hemos partido de una experiencia numérica. Si se dispone del álgebra con la que se puede probar que $n^2 - (n - 1)(n + 1)$ es igual a 1, no se necesita verificar la igualdad para todos los naturales,[19] pero la ida y vuelta entre el medio numérico y el de las escrituras literales permite asegurarse de en qué consiste una prueba teórica. ¿Cuántos alumnos aseguran ellos mismos esa relación estrecha entre los resultados teóricos obtenidos y los hechos experimentales numéricos que esos resultados permiten prever?

CONCLUSIÓN GENERAL

En las tres situaciones evocadas en el apartado "Experiencias matemáticas en tres campos", el medio encierra una "maquinaria" que tiene una autonomía en la experiencia. La autonomía es, por un lado, inherente a las propiedades de la máquina –o sea, se pone en marcha a través de la máquina– (medio de referencia) y, por otro lado, es relativa a una regla de juego que el profesor impone, por convención, a las prohibiciones[20] que se establecen, etcétera (medio de aprendizaje).

En las tres situaciones, lo que modifica la propia naturaleza de la experiencia es la frecuencia de las confrontaciones de las presunciones con las comprobaciones experimentales (porque las expectativas van evolucionando), incluso en la tercera situación en la que el medio objetivo es más simple desde el punto de vista del observador. Tenemos al menos tres tipos de confrontación empírica: la estadística, la de la medida de magnitudes continuas (masas de agua) y la de la medida de magnitudes discretas (los primeros números).

[18] Para otros ejemplos, se puede consultar la obra de A. Pressiat y col. (1996), *Les débuts de l'algèbre au collège*, INRP.

[19] El paso a las escrituras literales permite además "evadirse" del contexto del problema: la demostración permite prescindir de la hipótesis "número natural" (sustituyendo el término "consecutivo" por "distantes una unidad". El modelo surgido de la experiencia ha permitido ir más allá del ejercicio inicial.

[20] Para un estudio cercano y más detallado, véase Conne, 2007.

En una primera aproximación a esta cuestión, afirmábamos (Briand, 2005) que:

a) En la situación de adición, el medio de los signos genera un modelo de previsión bastante cercano a la realidad. El trabajo sobre pequeñas cantidades discretas hace que la incertidumbre sea débil.
b) En la situación llamada del "peso del vaso de agua", los niños construyen un modelo de previsión, como hemos visto, continuamente desestabilizado por los resultados de las pesadas. De entrada, el modelo en gestación debe "tomar distancia" de la experiencia. Ni el profesor ni los alumnos deben ignorar esta incertidumbre que forma parte del objeto de estudio.
c) En la situación que pone en juego fenómenos aleatorios, el alumno se enfrenta a un nuevo tipo de incertidumbre: aunque la experiencia se ha construido a propósito, no se puede reproducir con el mismo resultado de las extracciones. El modelo en gestación se debe emancipar mucho más de los campos que hemos explorado en este artículo.

Esta vez, volviendo a la variabilidad de una experiencia estadística, hemos intentado estudiar si los efectos de otras experiencias realizadas en campos *a priori* más deterministas eran percibidos por el alumno tan diferentes como se lo parecen al profesor.

El estudio que acabamos de llevar a cabo nos permite plantear la hipótesis de que las experiencias matemáticas en clase en estos tres campos, aun cuando producen retroacciones de distinta naturaleza desde el punto de vista del observador, producen en el sujeto efectos similares. Podríamos decir que no habría una razón objetiva para que estas retroacciones fueran de naturaleza diferente en el momento del aprendizaje.

Hay, pues, saberes que no se pueden abordar en una edad determinada más que, cuando mucho, experimentalmente, mientras que otros saberes pueden construirse con la ayuda de una situación de aprendizaje. Pero en las experiencias se encuentran "grados de validez de las inferencias" y formas de razonamiento que no son muy distintas de los tipos de razonamiento esperados en el campo de la variabilidad. Es el caso de refutar la hipótesis nula (no ser un ángulo llano, no ser paralelas, no ser igual a 1) con una fuerte probabilidad, basada en experiencias, que supone volver a un modo de razonamiento más clásico que consiste en probar demostrando, esta vez en otro medio.

Al inicio del artículo nos planteábamos algunas cuestiones: ¿qué lugar ocupa la experiencia en la actividad matemática? O, más bien, ¿qué es una experiencia en una actividad matemática? Hemos utilizado una situación de aprendizaje de la estadística, en la medida en que nos ha parecido que revela lo que es más difícil de observar en otras situaciones más habituales. En efecto, en la situación de estadística, el profesor sabe que los eventos son aleatorios. Sabe también que en las situaciones deterministas los eventos no son aleatorios, pero no se puede estar seguro de si se hace esa distinción.

En suma, hemos querido observar formas de razonamiento que podrían, sin duda, tener más presencia de la que actualmente tienen y mostrar que la aproximación estadística no está tan alejada de ciertas formas de presunción, inducción, que están en el origen de deducciones y, finalmente, demostraciones.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Eduardo Lacasta, Universidad de Pamplona (España), por su trabajo de traducción.

Agradezco profundamente a F. Conne que, con sus notas de lectura precisas y ricas y sus importantes comentarios, ha hecho posible que este artículo se haya modificado en gran medida.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Assude, T. (2002), "Travaux pratiques au collège? Conditions et contraintes d'émergence et de vie d'un dispositif", en M. Bridenne (eds.), *Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées*, Dijon, IREM.

Baldwin, J. M. (2007), Extractos de diccionario: *Les textes logiques de C.S. Peirce*, traduccion: M. Balat, G. Deledalle y J. Deledalle-Rhodes, Nimes, Champ social.

Bloch, I. (2002), "Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations didactiques: recherche d'une dialectique scientifique entre analyse théorique et contingence", en *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de DDM*, Corps 2001, pp. 125-140, Grenoble, La pensée sauvage.

Boorstin (1983), *Les découvreurs* (Collection bouquins), R. Laffont ed.

Briand, J. (2005), "Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple", *RDM*, vol. 25, núm. 2, pp. 247-282.

Brousseau, G. (1975), "Une expérience de premier enseignement des statistiques et probabilités", *26ème congrès* CIAEM.

——— *(1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 7, núm. 2, Grenoble, La pensée sauvage, pp. 33-115.

——— (1988), "Le contrat didactique: le milieu", *RDM,* vol. 9, núm. 3.

Brousseau, N. y G. Brousseau (1992), "Le poids d'un verre d'eau: problèmes de mesurage en CM1", *Grand N,* núm. 50.

Brun, J. y F. Conne, "La notion de compétence, révélateur de phénomènes transpositifs dans l'enseignement des mathématiques", en Dolz y Ollagnier (eds.), *L'énigme de la compétence en éducation,* Raisons Educatives núm. 2, De Boeck Université, pp. 95-114.

Chevallard, Y. (1989), *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège,* petit x IREM núm. 19, Grenoble, pp. 43-72.

——— (2004), "Pour une nouvelle épistémologie scolaire", *Cahiers pédagogiques,* núm. 427.

Chevallard, Y., F. Conne y J. Guiet (1991), *Jalons à propos d'algèbre.* Cahier Interactions Didactiques núm. 3, 2a. ed. corr. (1a. ed., 1984), Équipe de didactique des mathématiques de la F.P.S.E. et Séminaire de psychologie de l'Université de Neuchâtel.

Conne, F. (1999), "Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne", en *Le cognitif en didactique des mathématiques,* Les Presses de l'Université de Montréal.

——— (2004), *Problèmes de transposition didactique,* petit x núm. 64, pp. 64-65.

——— (2007), *Une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire en Suisse Romande,* Petit x núm. 73.

Descaves, A. (1992), *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes,* Hachette.

Dias, T. y V. Durand-Guerrier (2003), "Expérimenter pour apprendre en mathématiques", *Repère IREM,* núm. 60.

Gonseth, F. (1974), *Les mathématiques et la réalité,* Albert Blanchard.

Hacking, I. (1989), *Concevoir et expérimenter,* Christian Bourgeois.

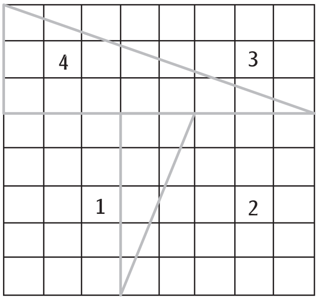
Houdement, C. y S. Coppe (2002), "Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire", *Grand N,* núm. 69, pp. 53-62.

Mercier, A. y G. Sensevy (1999), "Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école?", *Le Télémaque,* núm. 15, Enseigner les sciences.

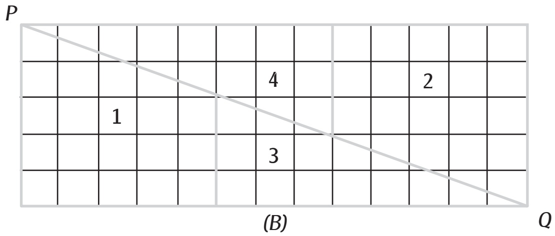
Grenier, D. y Ch. Payan (2002), “Situations de recherches en classe: essai de caractérisation et proposition de modélisation”, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2002,* París, Université Paris 7.
Legay, J.-M. (1997), *L’expérience et le modèle: un discours sur la méthode,* París, INRA Éditions.
Peres, J. (1984), *Construction et utilisation d’un code de désignation d’objets à l’école maternelle,* Tesis, Bordeaux 2.
Pressiat, A. y col. (1996), *Les débuts de l’algèbre au collège,* INRP.
Salin, *M. H. (2005),* “Repères sur l’évolution du concept de milieu en théorie des situations”, *en Actes école d’été de didactique,* 2005.
Vergnaud, *G. (1991), “La théorie des champs conceptuels”,* Recherches en didactique des mathématiques, *vol. 10, núms. 2-3, Grenoble, La pensée sauvage,* pp. 133-170.

ANEXO

Paradoja de Lewis Carroll o cómo 64 = 65



(A)



(B)

Recorte las piezas 1, 2, 3 y 4 de la primera figura y vuelva a colocarlas como en la figura 2. Se tiene 8×8, o sea 64 cuadrados arriba y 13×5, o sea 65 abajo. Busque el error...

El error, prácticamente imposible de descubrir, procede de que, en realidad, hay un ligero hueco a lo largo de lo que parece ser la diagonal [PQ]. Este hueco tiene la forma de un paralelogramo muy afilado y tiene aproximadamente 1 mm de anchura en su parte media, su área total es de 1 cm^2, es decir, la diferencia entre 65 y 64.

DATOS DEL AUTOR

Joël Briand
IUFM d'Aquitaine
Laboratoire DAESL (Équipe de Didactique et Anthropologie des Enseignement Scientifiques et Langagiers), Université Bordeaux 2, Francia
briandjoel@free.fr