EL MODELO DE BLACK AND SCHOLES

Interpretación y aplicación práctica

Marcela González

Deseo aclarar que el presente trabajo fue realizado en mayo de 1998. La presentación del mismo tiene validez desde el punto de vista de la formulación teórica del modelo como así también la verificación de su aplicación práctica en aquel contexto económico financiero. Como todo modelo que parte de ciertos supuestos debería ser convalidado empíricamente en cada situación económica financiera vigente.

1. Opción

Una opción es un contrato de naturaleza financiera por el cual una de las partes, llamada 'tomador' o 'titular' adquiere, mediante el pago de una prima que se abona en el momento en que se celebra el contrato, el derecho a comprar (opción de compra o 'call') o a vender (opción de venta o 'put') a la otra, llamado 'vendedor' o 'lanzador', un cierto número de activos a un precio previamente fijado (precio de ejercicio) y dentro de un período de tiempo predeterminado. Así, el comprador adquiere 'derechos' mientras que el vendedor adquiere 'obligaciones'.

Este contrato puede implicar dos transferencias de dinero que se efectúan en forma sucesiva:

a) la primera de ellas, que se denomina prima, es el precio que el comprador debe abonar cuando adquiere la opción de compra (call),
b) la segunda, cuyo monto es equivalente al precio de ejercicio, es facultativa, puesto que el comprador solo lo abonará si decide adquirir el activo subyacente.

En el presente trabajo estudiaremos el modelo de Black and Scholes para la valuación de las opciones de compra.

Los factores que inciden en la prima de un call son, como mínimo, los siguientes:

a) precio del activo subyacente (precio del activo en el mercado),
b) precio de ejercicio (precio previamente convenido),
c) tasa de interés a utilizar para contemporizar los dos elementos precedentes,
d) plazo hasta la expiración del contrato y
e) volatilidad del activo subyacente (mide el comportamiento o variabilidad del mismo en el tiempo).

De estos factores, el precio de ejercicio y el plazo hasta la expiración se conocen con certeza una vez especificada la opción y el momento de valuación; la tasa de interés es la tasa de costo de capital vigente en el mercado en el período de vigencia de la opción y la volatilidad se determina de acuerdo con la evolución histórica de los precios del activo subyacente (ver Revista Invenio N° 1: Sistema de Garantía en los Mercados de Futuros. Administración de Riesgo de una Cartera). Por lo tanto, el precio del activo subyacente en el mercado será la única variable aleatoria cuyo comportamiento a través del tiempo es necesario estimar.

2. Interpretación del modelo de Black and Scholes para una opción de compra.

La prima que abona el titular en el momento en que se celebra el contrato es el precio que el call tiene en el mercado. Dado que la opción americana puede ser ejercida en cualquier momento (la opción europea sólo puede ser ejercida al vencimiento), el call debe ser igual a la diferencia entre el precio de cotización (S_0) y el precio de ejercicio (X). Evidentemente, el precio de ejercicio (X) es un valor futuro que debe ser actualizado al momento de valuación, para que se cumpla la ecuación financiera de equivalencia.

$$C = S_0 - \frac{X}{(1+i)^t} \quad \text{siendo:}$$

C: valor del call o prima.
S_0: valor actual de la acción o activo subyacente.
X: precio de ejercicio de la acción o del activo subyacente.
i: tasa de interés con capitalización periódica (campo discreto).
t: tiempo hasta la expiración o vencimiento del call.

$$\frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$$ el factor de actualización o descuento en el campo discreto (periódico)

Sin embargo, la actualización del precio de ejercicio se realiza aplicando actualización continua, debido a: 1) el precio del activo subyacente se compone continuamente en el tiempo; y 2) un inversor puede adquirir la opción en cualquier 'instante' dentro del tiempo de vigencia del contrato. Por estas razones, para actualizar el precio de ejercicio (X) se utilizará:

e^{-rt}: que representa el factor de descuento cuando se actualiza en el campo continuo, donde 'e' es la base de los logaritmos neperianos (2,71828....) y 'r' es la tasa instantánea de rendimiento. (Ver Apéndice).

Así, el call (prima) será igual al valor actual del activo subyacente (S_0) menos el valor futuro o precio de ejercicio (X) actualizado en el campo continuo al momento de la valuación. A esta ecuación, podemos llamarla 'ecuación financiera básica':

$$C = S_0 - X\ e^{-rt}$$

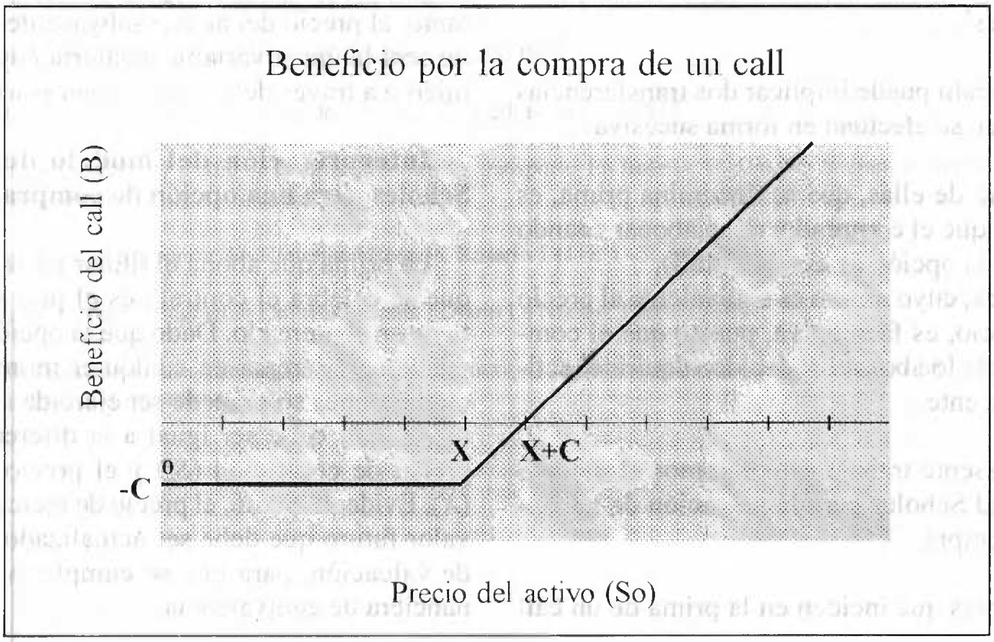
Teniendo en cuenta el valor del activo (S_0) y el precio de ejercicio (X) se dice que:

a) Si $S_0 > X$, el call está 'in the money' y se puede ejercer. En este caso, el precio del activo en el mercado es mayor que el precio de ejercicio, por lo tanto, el tomador del call lo ejercerá (comprará) al precio de ejercicio e inmediatamente lo venderá en el mercado a un precio mayor.

b) Si $S_0 = X$, el call está 'at the money' y no valdrá la pena ejercerlo ya que coincide el precio de mercado con el precio de ejercicio.

c) Si $S_0 < X$, el call está 'out of the money' y no será ejercido. En este caso, el precio del activo en el mercado es menor que el precio de ejercicio, por lo tanto el tomador del call no lo ejercerá (comprará) ya que puede conseguir el activo directamente en el mercado a un precio menor.

En el siguiente gráfico representamos el beneficio por la compra de un call teniendo en cuenta la prima abonada.



Beneficio por la compra de un call

En el eje horizontal (variable independiente) graficamos el precio del activo subyacente (S_0) y en el eje vertical (variable dependiente) el beneficio al vencimiento (B) que se obtiene por la compra de un call. Vemos que mientras el precio del activo es menor que el precio de ejercicio ($S_0 < X$) el beneficio resulta ser negativo e igual al costo del call. La recta que lo representa es paralela al eje horizontal en el valor $B = -C$. Si el precio del activo (S_0) está entre el precio de ejercicio (X) y el precio de ejercicio más la prima ($X + C$) el beneficio será negativo. En estos dos casos, el call no será ejercido ya que está 'out of the money' y el tomador del call perderá la prima abonada. Cuando el precio del activo es igual al precio de ejercicio más la prima ($S_0 = X + C$) el beneficio resulta ser igual a cero y estamos en el punto de indiferencia (el call está 'at the money'). Cuando el precio del activo supera al precio de ejercicio más la prima ($S_0 > X + C$) el beneficio crece ($B = S_0 - X - C$) y el call será ejercido, está 'in the money'. La recta que lo representa es de 45º (tangente = 1) ya que por cada \$1.- de incremento del precio del activo subyacente (variable independiente), el beneficio (variable dependiente) aumentará \$1.-.

De lo anterior podemos decir que el tomador o comprador de un call tiene beneficios ilimitados mientras las pérdidas (beneficios negativos) están acotadas por el valor de la prima abonada.

La fórmula de Black and Scholes para valuar opciones financieras es:

$$C = S_0 \; N(d_1) - X \; e^{-rt} \; N(d_2) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

siendo σ: volatilidad o variabilidad o desviación standard esperada de la acción.

La opción de compra (C) tendrá valor (será ejercida) siempre que el precio del activo subyacente sea mayor que el precio de ejercicio, es decir, $S_0 > X$.

Vemos que la fórmula de B&S no es más que la 'ecuación financiera básica' en la cual aparecen dos factores: $N(d_1)$ y $N(d_2)$.

$N(d_1)$ y $N(d_2)$ son los valores de la función de distribución Normal Standard (área bajo la curva de densidad Normal (0,1) desde $-\infty$ hasta d_1 y d_2 respectivamente) y representan las probabilidades de que podamos ejercer la opción.

Analicemos distintos valores que tomará el call de acuerdo con distintos valores de S_0 y X.

a) Si el precio del activo (S_0) es mucho mayor que el precio de ejercicio (X), $\ln(S_0/X)$ tenderá a infinito ($+\infty$) con lo cual d_1 y d_2 también lo harán; en este caso, $N(d_1)$ y $N(d_2)$ tenderán a 1 y la fórmula de B&S nos quedará $C = S_0 - X e^{-rt} > 0$ y tendremos la certeza absoluta de ejercer la opción.

b) Si el precio del activo (S_0) es menor que el precio de ejercicio (X), $\ln(S_0/X)$ tenderá a menos infinito ($-\infty$) con lo cual d_1 y d_2 también lo harán; en este caso, $N(d_1)$ y $N(d_2)$ tenderán a 0 y tendremos la certeza absoluta de no ejercer la opción ya que $C = 0$.

Entre a) y b) existe un abanico de posibilidades que la fórmula de B&S nos permite valorar.

Si observamos el numerador de d_1 y d_2, en ambos aparece la expresión $\ln(S_0/X)$ que es la 'tasa de rendimiento instantánea' (en el campo continuo), donde S_0 es el valor de la variable aleatoria 'precio del activo' (S_t) en el momento actual.

Por lo tanto, $\ln(S_t / X)$ es función de la variable aleatoria S_t y representa la tasa de rendimiento diario del activo. Una de las hipótesis de este modelo es que dicha función ($\ln(S_t / X)$) tiene una distribución Normal con parámetros $E\{\ln(S_t / X)\} = \mu t$ y varianza $Var\{\ln(S_t / X)\} = \sigma^2 t$. Bajo esta hipótesis, la variable aleatoria 'precio del activo' (S_t) sigue una distribución Logarítmica Normal (Log-normal), es decir, Normal en el logaritmo de la variable.

Tanto $N(d_1)$ y $N(d_2)$ como d_1 y d_2 quedan determinados al calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria 'precio del activo' S_t (con distribución Log-normal) condicionada a que dicho precio sea mayor que el precio de ejercicio (condición necesaria para que se ejerza la opción).[1]

Podemos decir que el primer término de la fórmula de B&S representa el valor actual del activo subyacente (S_0) ponderado por la probabilidad de que dicho precio sea mayor que el precio de ejercicio (X) y el segundo término representa el valor presente del precio de ejercicio (X) ponderado de la misma forma.

3. Variables

Una vez presentado el modelo de B&S analicemos como influyen las distintas variables sobre precio del call. Ver fórmula (1).

Variable en aumento	Call	Fórmula (1)
1. Precio del activo subyacente	===> aumenta	crece el minuendo
2. Tasa de interés	===> aumenta	disminuye el sustraendo
3. Tiempo hasta la expiración	===> aumenta	disminuye el sustraendo
4. Volatilidad esperada	===> aumenta	crece el minuendo y disminuye el sustraendo
5. Precio de ejercicio	===> disminuye	crece el sustraendo

Vemos que el precio del call aumenta si: 1) aumenta el precio del activo subyacente (porque al aumentar el precio de la acción hoy, aumenta la probabilidad de que el call sea ejercido), 2) aumenta la tasa de interés (mayor tasa de financiación, con lo cual el valor actual del precio de ejercicio será menor y aumentará el precio de la opción), 3) aumenta el tiempo hasta la expiración (mayor tiempo hasta el vencimiento de la opción y, por consiguiente, es menor el valor actual del precio de ejercicio) y 4) aumenta la volatilidad esperada (indica que el comportamiento del activo subyacente es bastante errático y esto se traduce en un aumento del precio de la opción).

También observamos que el precio del call disminuye cuando aumenta el precio de ejercicio (cuando mayor sea el importe que tengamos que pagar a la fecha de vencimiento de la opción menor será la prima que pagaremos hoy).

4. Ejemplo

Cálculo de la volatilidad
Acción: Perez Companc (del 27/02 al 13/04/98)

Día	N°	Precio de cierre P_j	Variación P_j / P_{j-1}	Tasa instantánea $\ln (P_j/P_{j-1})$ rj	Tasa instantánea promedio $\bar{r}$	Diferencia $rj - \bar{r}$	Diferencia^2 $(rj - \bar{r})^2$
26-feb-98		6,53					
27-feb-98	1	6,58	1,0077	0,0076	-0,0028	0,0104	0,0001
2-mar-98	2	6,59	1,0015	0,0015	-0,0028	0,0043	0,0000
3-mar-98	3	6,61	1,0030	0,0030	-0,0028	0,0059	0,0000
4-mar-98	4	6,69	1,0121	0,0120	-0,0028	0,0149	0,0002
5-mar-98	5	6,63	0,9910	-0,0090	-0,0028	-0,0062	0,0000
6-mar-98	6	6,75	1,0181	0,0179	-0,0028	0,0208	0,0004
9-mar-98	7	6,71	0,9941	-0,0059	-0,0028	-0,0031	0,0000
10-mar-98	8	6,80	1,0134	0,0133	-0,0028	0,0161	0,0003
11-mar-98	9	6,85	1,0074	0,0073	-0,0028	0,0101	0,0001
12-mar-98	10	6,82	0,9956	-0,0044	-0,0028	-0,0016	0,0000
13-mar-98	11	6,82	1,0000	0,0000	-0,0028	0,0028	0,0000
16-mar-98	12	6,77	0,9927	-0,0074	-0,0028	-0,0045	0,0000

continuación

Día	Nº	Precio de cierre P_j	Variación P_j / P_{j-1}	Tasa instantánea $\ln (P_j/P_{j-1})$ rj	Tasa instantánea promedio $\bar{r}$	Diferencia $r_j - \bar{r}$	Diferencia^2 $(r_j - \bar{r})^2$
17-mar-98	13	6,63	0,9793	-0,0209	-0,0028	-0,0181	0,0003
18-mar-98	14	6,65	1,0030	0,0030	-0,0028	0,0058	0,0000
19-mar-98	15	6,58	0,9895	-0,0106	-0,0028	-0,0078	0,0001
20-mar-98	16	6,60	1,0030	0,0030	-0,0028	0,0059	0,0000
23-mar-98	17	6,81	1,0318	0,0313	-0,0028	0,0341	0,0012
24-mar-98	18	6,79	0,9971	-0,0029	-0,0028	0,0001	0,0000
25-mar-98	19	6,74	0,9926	-0,0074	-0,0028	-0,0046	0,0000
26-mar-98	20	6,72	0,9970	-0,0030	-0,0028	-0,0002	0,0000
27-mar-98	21	6,74	1,0030	0,0030	-0,0028	0,0058	0,0000
30-mar-98	22	6,72	0,9970	-0,0030	-0,0028	-0,0002	0,0000
31-mar-98	23	6,77	1,0074	0,0074	-0,0028	0,0102	0,0001
1-abr-98	24	6,80	1,0044	0,0044	-0,0028	0,0072	0,0001
2-abr-98	25	6,80	1,0000	0,0000	-0,0028	0,0028	0,0000
3-abr-98	26	6,57	0,9662	-0,0344	-0,0028	-0,0316	0,0010
6-abr-98	27	6,54	0,9954	-0,0046	-0,0028	-0,0018	0,0000
7-abr-98	28	6,21	0,9495	-0,0518	-0,0028	-0,0490	0,0024
8-abr-98	29	6,16	0,9919	-0,0081	-0,0028	-0,0053	0,0000
13-abr-98	30	6,00	0,9740	-0,0263	-0,0028	-0,0235	0,0006
Totales				-0,0846			0,0071

Siendo:

$$\bar{r} = \sum_{j=1}^{n} r_j \qquad \sigma_{diaria} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(r_j - \bar{r}\right)^2}{n-1}} \qquad \sigma_{anual} = \sigma_{diaria}\sqrt{252}$$

$\bar{r}$ = **-0,0028** σdiaria = **1,56%** σanual = **24,79%**

Cálculo de la Prima de acuerdo con la fórmula de Black and Scholes

Fecha de análisis:	14-abr-98
Fecha de expiración de la opción:	19-jun-98
Días hasta el vencimiento de la opción:	66
Días hasta el vencimiento de la opción (t):	0,1808 expresado en años
Precio de ejercicio:	6,44
Precio del activo subyacente (So):	6,15
Tasa instantánea de interés para contemporizar el precio de Ejercicio (r):	10% anual

En las fórmulas (1) y (2)

d_1 = -0,2128 d_2 = -0,3182

N(d_1) = 0,4157 N(d_2) = 0,3752

$$C = \mathbf{0{,}184}$$

El dia 14/04/98 PC-6.44 - Jun cerró a 0.185 (Ambito Financiero del 15/04/98)

5. Consideraciones finales

Toda aplicación de una teoría matemática se realiza a través de modelos como el estudiado en este trabajo. El matemático, cuando encara una situación 'real' o 'concreta' realiza una idealización y, empleando un razonamiento y un proceso lógicos, construye un modelo. Dichos modelos matemáticos y/o probabilísticos han probado ser muy útiles aceptando la sobresimplificación de supuestos. Estos modelos, en nuestro caso provenientes de la economía matemática, especifican relaciones entre variables que darán como resultado predicciones sobre aspectos del comportamiento financiero.

Sin embargo, el mercado financiero se desarrolla dentro un contexto económico y el operador debe captar los 'mensajes' de ese mercado y sus influencias. Los mercados reales son más complejos, están integrados por inversores humanos cuyo comportamiento dista mucho de ser racional, en el sentido frío y lineal que establecen las teorías. El modelo queda supeditado a un contexto caracterizado por influencias económicas, sociales, políticas, ambientales y de organización y no siempre es apropiado para cualquier situación.

Muchas veces, los modelos pierden relevancia en mercados afectados por cambios estructurales muy profundos, o por condiciones de negociación particulares. En esta etapa de globalización de la economía, el análisis financiero debe partir de un estudio macroeconómico, de las principales variables económicas del país y también del mundo. De la misma forma se debe realizar un estudio microeconómico, de la empresa en la cual se desea invertir (considerando opciones sobre acciones), ya que si la empresa va bien se reflejará en el comportamiento de la acción. En consecuencia, el medio ambiente se transforma en otro factor generador de variaciones integrando todas el concepto de 'realidad económica', ya sea en el ámbito nacional como internacional.

La utilidad y eficiencia del modelo de B&S (adecuadamente utilizado) es innegable en el mundo financiero, ya que ha sido ampliamente probado en forma empírica. En realidad, dicho modelo ayuda a pensar en nuevas formas de financiación e inversión fuera del rígido marco numérico de las teorías.

APÉNDICE

Partiendo de las fórmulas de monto con capitalización periódica y subperiódica

$$M = K(1+i)^n \qquad M = K\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{nm}$$

donde:

M: capital final o monto
K: capital inicial
i: tasa periódica efectiva de interés con capitalización periódica
j(m): tasa periódica nominal de interés con capitalización subperiódica
n: tiempo de colocación expresado en períodos
m: frecuencia de capitalización
nm: tiempo de colocación expresado en subperíodos

planteamos la igualdad de monto o equivalencia financiera:

$$1+i = \left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^m$$

Sabiendo que la tasa de rendimiento instantáneo 'r' (en el campo continuo) no es más que el límite para 'm' tendiendo a infinito de la tasa nominal periódica j(m) (en el campo discreto), podemos escribir,

$$r = \lim_{m\to\infty} j(m)$$

Para hallarla aplicaremos el $\lim_{m\to\infty}$ en ambos miembros

$$\lim_{m\to\infty}(1+i) = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^m$$

y recordando que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ nos quedará

$$\lim_{m\to\infty}(1+i) = \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\frac{j_{(m)}}{m}}{j_{(m)}}\right)^{\frac{m}{j_{(m)}}}\right]^{j_{(m)}}$$

$$(1+i) = e^{\lim\limits_{m\to\infty} j(m)} \quad \text{es decir} \quad (1+i) = e^r$$

de donde $\boxed{r = \ln(1+i)}$ tasa de rendimiento instantáneo.

Observación:

De esta igualdad podemos despejar 'i'

$e^{r} - 1 = i$ y reemplazando en la fórmula de monto con capitalización periódica

$M = K\,(1+ e^{r} -1)^{n} \Longrightarrow M = K\,e^{rn}$

obtenemos el monto en régimen de interés compuesto capitalizando en forma continua donde e^{rn} es el factor de capitalización en régimen de interés continuo.

Despejando el Capital:

$$\boxed{K = M\,e^{-rn}}$$

donde e^{-rn} es el factor de actualización o descuento en el campo continuo.

NOTAS

1. Véase en la obra Black, Fisher y Scholes, Myron. The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81 (1973) pag. 637-59

BIBLIOGRAFÍA

COX, JOHN C AND RUBINSTEIN, MARK. *Options markets.* Prentice Hall, Inc. New Jersey, 1985.

GALITZ, LAWRENCE. *Ingeniería financiera I.* Ediciones Folio S.A. Barcelona, 1994.

MARTÍNEZ ABASCAL, EDUARDO. *Futuros y opciones en la gestión de carteras.* Mc Graw- Hill. Madrid, 1993.

NATENBERG, SHELDON. *Options volatility & pricing.* Probus Publishing Company. Chicago, 1994.