

APLICACIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV PARA LA SOLUCIÓN EXACTA DE UN PROBLEMA

Mónica I. Grasso

I- Introducción

La presente observación corresponde al trabajo final presentado por el Diplomado en Innovación Tecnológica Roberto Domenge Muñoz en el Centro de Innovación Tecnológica de la Universidad Autónoma de México en junio de 1987. El tema del mismo es "Aplicación del Diagrama de Planeación de la Investigación al Proyecto de Extracción de Colorantes del Betabel".

En el trabajo mencionado se aplica el Diagrama de Planeación de la Investigación, técnica que permite incorporar a la planificación de proyectos una componente aleatoria que, en alguna de sus etapas, puede llevar dicho proyecto al fracaso con el consecuente abandono del mismo.

El objetivo de este trabajo es mostrar que el Diagrama de Planeación de la Investigación se corresponde con una Cadena de Markov y basado en dicho modelo ofrecer la solución exacta del problema, permitiendo además comprobar que los resultados calculados por el autor utilizando simulación, son una buena aproximación a los verdaderos valores esperados.

II- Descripción del problema analizado

El proyecto corresponde a la extracción de colo-

rantes a partir de un vegetal, el betabel. La investigación a nivel laboratorio se concluyó con éxito, la siguiente etapa es considerar el procesamiento de una tonelada de dicho vegetal. Se muestra más adelante, el diagrama de flujo de la estructura del proyecto.

El proyecto para el procesamiento de una tonelada de betabel consta de diez actividades agrupadas en dos grandes fases:

1- Preparación: conseguir la materia prima e instalar el equipo necesario para la realización del proceso de transformación del betabel a colorantes (actividades 1 a 6).

2- Transformación, consta de dos pasos:

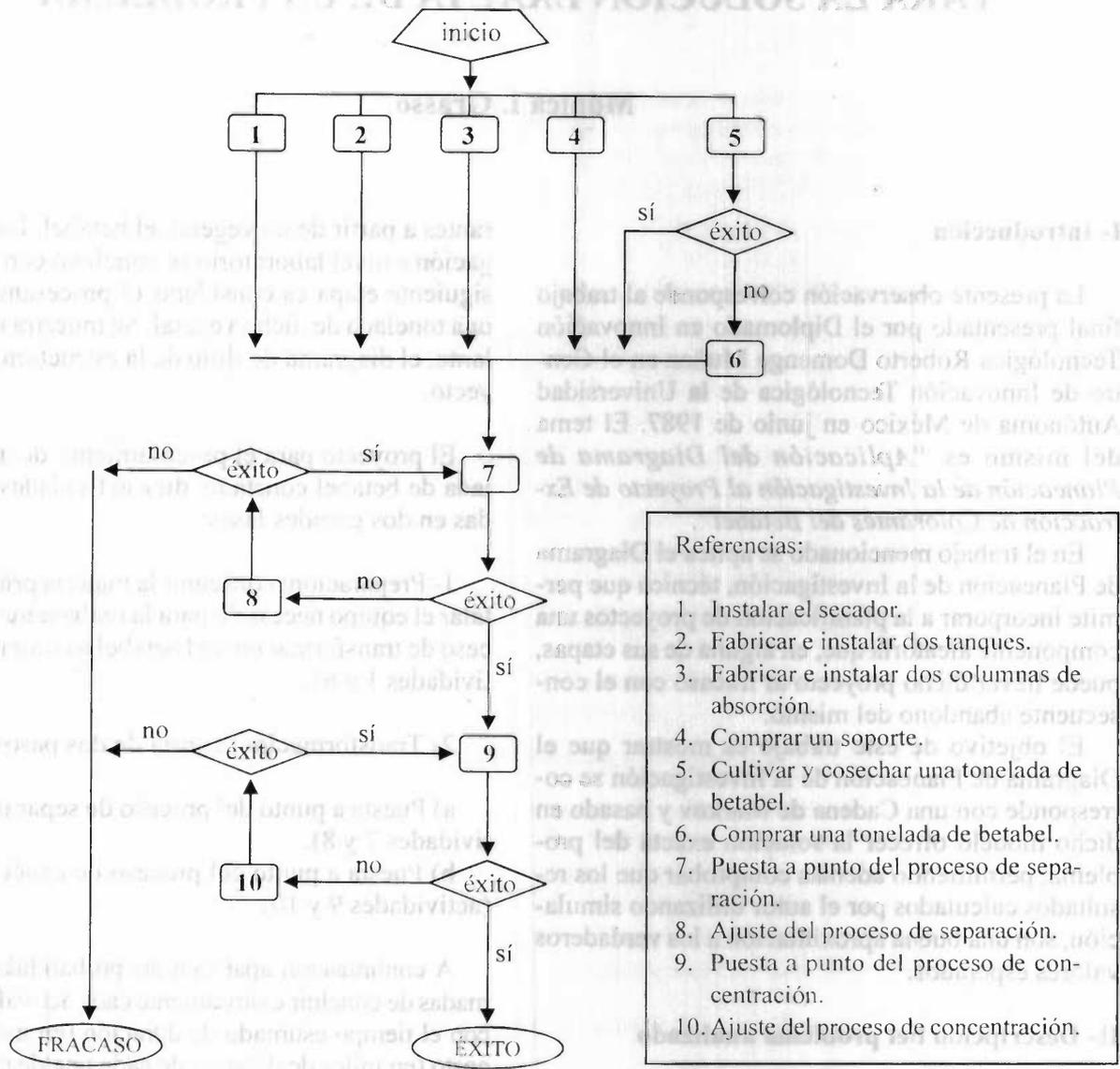
a) Puesta a punto del proceso de separación (actividades 7 y 8).

b) Puesta a punto del proceso de concentración (actividades 9 y 10).

A continuación aparecen las probabilidades estimadas de concluir exitosamente cada actividad, junto con el tiempo estimado de duración (en meses) y el costo (en miles de dólares) de cada una de ellas.

Actividad	Prob. de éxito	Tiempo de duración	Costo
1	1.00	1.50	1 635.81
2	1.00	2.00	1 810.70
3	1.00	2.00	1 710.70
4	1.00	1.00	1 421.40
5	0.80	2.00	1 000.00
6	1.00	0.25	350.00
7	0.70	1.25	4 646.20
8	0.90	0.75	500.00
9	0.90	0.75	4 646.20
10	0.95	0.50	500.00

Diagrama de flujo de la estructura del proyecto



- Referencias:
1. Instalar el secador.
 2. Fabricar e instalar dos tanques.
 3. Fabricar e instalar dos columnas de absorción.
 4. Comprar un soporte.
 5. Cultivar y cosechar una tonelada de betabel.
 6. Comprar una tonelada de betabel.
 7. Puesta a punto del proceso de separación.
 8. Ajuste del proceso de separación.
 9. Puesta a punto del proceso de concentración.
 10. Ajuste del proceso de concentración.

III- Modelización y solución

El problema presentado se puede modelar como una *Cadena de Markov*. Las Cadenas de Markov explican el comportamiento de ciertos fenómenos aleatorios que afectan a sistemas dinámicos, se refieren a procesos cuyo estado futuro sólo depende de su estado presente y es independiente de sus estados pasados. En nuestro caso en cada una de las etapas del proyecto las probabilidades de pasar a la etapa siguiente, tener éxito o fracaso solo dependen de la etapa considerada y no de las anteriores.

El primer paso es la definición de los *estados* que componen el proceso; en este caso los estados son cada una de las actividades, identificadas por su número, más dos estados absorbentes (o estados en los que finalmente concluirá el proceso) a los que llamaremos éxito (E) y fracaso (F). Como contamos con cinco actividades iniciales, cuatro de las cuales tienen probabilidad nula de fracasar, por razones de simplicidad las agruparemos en un solo estado llamado I/5.

Definidos los estados, el comportamiento de la cadena se resume en una *matriz de probabilidades*

de transición integrada por las probabilidades de pasar a la etapa siguiente, lograr el éxito o fracasar dado que el proceso se encuentra en una etapa determinada (probabilidades condicionales).

Matriz de probabilidades de transición

	F	E	1/5	6	7	8	9	10
F	1,00							
E		1,00						
1/5				0,20	0,80			
6					1,00			
7						0,30	0,70	
8	0,10				0,90			
9		0,90						0,10
10	0,05							0,95

De esta matriz se extrae la *matriz fundamental* de una cadena absorbente. Una Cadena de Markov es absorbente cuando tiene por lo menos un estado absorbente, en nuestro caso son dos: éxito y fracaso. La matriz fundamental está formada por las probabilidades de transición que corresponden a los sucesos pasar de un estado no absorbente a otro estado no absorbente. Operando con dicha matriz y agregando los tiempos y costos de cada actividad se obtienen interesantes resultados de gran ayuda para el momento de tomar decisiones.

Probabilidades de éxito del proyecto

Alcanzada la etapa	Probabilidad de éxito	Probabilidad de fracaso
1/5	0.954	0.046
6	0.954	0.046
7	0.954	0.046
8	0.858	0.142
9	0.994	0.006
10	0.945	0.055

El proyecto tiene una probabilidad de éxito del 95.4%. Como las actividades 1 a 6 no ofrecen oportunidad de fracasar, esta probabilidad se mantiene en el mismo valor hasta que se alcanza la etapa 7. Pero si se alcanza la etapa 8, por problemas de puesta a punto de la etapa de separación, entonces la pro-

babilidad de fracasar aumenta al 14.2%.

Tiempo de duración y costo promedios del proyecto

Alcanzada la etapa	Tiempo promedio (meses)	Costo promedio (miles de dólares)
1/5	4.9	19.194.66
6	3.1	11.896.05
7	2.8	11.546.05
8	3.3	10.891.45
9	0.9	5.189.17
10	1.3	5.429.71

Nuevamente como en el caso de las probabilidades contamos con la información de tiempos y costos promedios discriminada según el estado alcanzado.

IV- Comparación de resultados

El autor del artículo de referencia resuelve el problema simulando mil veces la situación y calculando promedios con los resultados de las simulaciones, agrega las distribuciones de frecuencia correspondientes al tiempo de duración del proyecto y al costo del mismo. La tabla siguiente compara los resultados de la simulación con los valores obtenidos utilizando Cadenas de Markov.

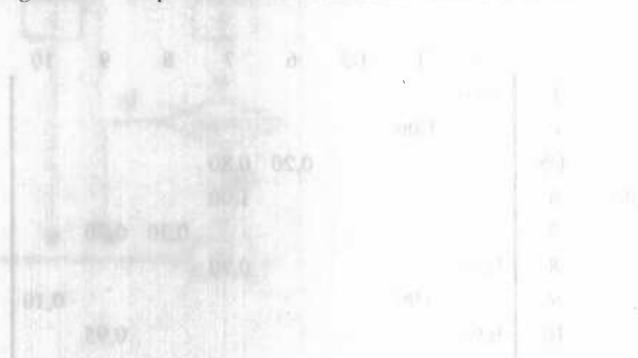
Característica evaluada	Cadenas de Markov	Simulación
Probabilidad de éxito	0.954	0.967
Tiempo de duración promedio	4.92 meses	5.02 meses
Costo promedio	US\$ 19 194 660	US\$ 19 899 060

La simulación, cuando se realiza un número grande de repeticiones, proporciona buenas aproximaciones de los parámetros poblacionales estimados, pero si es posible modelizar el problema con una Cadena de Markov tenemos la oportunidad de conocer los valores verdaderos de dichos parámetros y eliminar el error de estimación.

BIBLIOGRAFÍA

DAELLENBACH, H, George, J, McNickle, D, *Introducción a las Técnicas de Investigación de Operaciones*. CECSA, México, 1987.
 HILLIER, F, Lieberman, G, *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Mc Graw Hill, México, 1989.
 WINSTON, Wayne, *Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos*. Grupo Editorial Iberoamérica – México, 1994.

Actividad	Costo	Recurso
1	10	10
2	8	8
3	7	7
4	5	5
5	4	4



El costo del recurso es el costo de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos.

El costo del recurso es el costo de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos.

IV - Comparación de resultados

El costo del recurso es el costo de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos.

Probabilidades de éxito del proyecto

Actividad	Costo	Recurso
1	10	10
2	8	8
3	7	7
4	5	5
5	4	4

Actividad	Costo	Recurso
1	10	10
2	8	8
3	7	7
4	5	5
5	4	4

El costo del recurso es el costo de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos.

El costo del recurso es el costo de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos. Los costos de los recursos son los costos de los recursos.