CAMINOS Y CIRCUITOS DE UN GRAFO DIRIGIDO DONDE NINGUN ARCO ES RECORRIDO K O MAS VECES

Armando Gordon Cabral
Federico Severino Guimpel (colaboración)

Es sabido que las potencias sucesivas de las matrices de incidencia en un grafo dirigido asignando valores 1 o 0 según exista o no arco(s) entre los vértices correspondientes con el productos usual indica la existencia o no de caminos y circuitos. Y que la suma usual determina la cantidad de caminos y circuitos.

En el presente trabajo se contruye un semianillo o dioide a partir del conjunto de arcos que permiten establecer cuantos y cuales son los caminos y circuitos de un grafo dirigido donde ningún arco es recorrido k o más veces.

1. Construcción del dioide

1.1. Conjunto yacente del dioide

Sea $A' = (a_1, a_2, ..., a_n)$ $(n \geq 1)$ un <u>conjunto finito</u>.
Sea

$$A = \langle A' \rangle - \Box \qquad (1),$$

esto es, el <u>Semigrupo Libre Generado por A'</u> en el que se ha eliminado el Neutro, es decir, <u>la "palabra" vacía</u> designada con $\Box$. Evidentemente <u>A es no conmutativo</u> y un elemento genérico de A es de la forma:

(2) $s' = a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{it}$ con $t \in N$; $i_l \in (1,2,...,n)$ para todo $l \in (1,2,...,n)$, donde con N indicamos el conjunto de números naturales.

Cada a_{il} es una componente de s'.
<u>Dos o más componentes consecutivas pueden ser iguales</u> ya que por razones de simplicidad y por el significado que tendrán los resultados, obviamos la notación de potencia. (Ejemplo: escribiremos $a_3\, a_5\, a_5\, a_2 a_2\, a_2\, a_8$ en vez de $a_3\, a_5^{\,2}\, a_2^{\,3}\, a_8$)

Es sabido que si $\quad s_1' = a_{i1}^{(1)} \ldots a_{it1}^{(1)}$ y $s' = a_{i1}^{(2)} \ldots a_{it2}^{(2)}$ entonces

$$s_1' \bullet s_2' = s_1' s_2' = a_{i1}^{(1)} \ldots a_{it1}^{(1)}\, a_{i1}^{(2)} \ldots a_{it2}^{(2)} \qquad (3)$$

El subconjunto de A:

$$I = \{ s' \in A : a_{i\alpha} = a_{i\beta} = \ldots = a_{i\gamma}, \text{ (componentes) tal que } |(\alpha, \beta, ..., \gamma| \geq k \} \qquad (4)$$

es claramente un ideal de A; |C|, como es usual, significa el cardinal del conjunto C.
En palabras, el ideal I es el conjunto de todas las palabras donde una o más componentes aparecen k o más veces.

$$\text{Sea} \quad S' = A - I \qquad (5)$$

Es decir, S' es el conjunto de palabras donde cada componente puede aparecer, a lo más k-1 veces. Como el conjunto de componentes es finito, A' es finito, resulta:

$$|S'| < \infty \qquad (6)$$

Luego, todo subconjunto de S' es también finito. (6')

Ahora consideramos:

$$S = P(S') \qquad (7)$$

$$\text{siendo } |S| = 2^{|S'|} < \infty \qquad (8)$$

y por lo tanto, un elemento genérico de S, distinto del subconjunto vacío, (Ø), es, por (6'):

$s = (s_{j1}', s_{j2}', \ldots, s_{jh}') = \{s_{j1}'\} \cup \{s_{j2}'\} \cup \ldots \cup \{s_{jh}'\}$, o, con abuso de notación (escribiendo $\{s_j'\} = s_j'$):

$$s = s_{j1}' \cup s_{j2}' \cup \ldots \cup s_{jh}' \qquad (9)$$

donde $s_{ji}' \in S'$, $i \in (1,2,..,h)$; $0 < h \leq |S'|$ (10)

1.2 Operaciones binarias en S

1.2.1 Primera operación

Es sabido que S con la operación unión es un semigrupo conmutativo con Ø como neutro. En vez del símbolo usual, U, pondremos +, y la llamaremos suma. Por lo tanto (10) se escribirá:

$$s = s_{j1}' + s_{j2}' + \ldots + s_{jh}' \qquad (11)$$

1.2.2 Segunda operación

Definimos en S una operación que indicaremos con *, tal que $\forall\ s, v \in S$; $s \neq \emptyset$, $v \neq \emptyset$;

$$s * v = (s_{j1}' + s_{j2}' + \ldots + s_{jh}') * (v_{j1}' + v_{j2}' + \ldots + v_{jm}') = \sum_{\beta 1m} \sum_{\alpha 1h} s'_{j\alpha} * v'_{j\beta} \qquad (12)$$

donde

$$s_{j\alpha}' * v_{j\beta}' = \begin{cases} s_{j\alpha}'\ v_{j\beta}' \text{ (según (3))} & \text{si } s_{j\alpha}'\ v_{j\beta}' \in S' \\ \emptyset & \text{si } s_{j\alpha}'\ v_{j\beta}' \in I \text{ (ver (4))} \end{cases} \qquad (13)$$

$$s' * \emptyset = \emptyset * s' = \emptyset * \emptyset = \emptyset \qquad (13')$$

Esta operación dota a S de otra estructura de semigrupo, no conmutativa, con Ø como elemento cero o absorbente.

Como además, * es distributiva con respecto a +, por definición, resulta que (S,+,*) es un semianillo no conmutativo con Ø como elemento absorbente, o dioide.

2. Construcción de caminos y circuitos

2.1 Sea G un grafo dirigido cuyos conjuntos de vértices y arcos respectivamente son:

$$P = (p_1,p_2,...,p_m) \text{ y } A' = (a_1,a_2,...,a_n) \qquad (14)$$

Con A' construimos el dioide según **1**.
Dada la inyección $A' \to S / a_i \to s = \{a_i\} = a_i$ (ver (2) y (9)), i: 1,2,...n (15)
el conjunto de arcos puede considerarse como un subconjunto de S.
Si A es la matriz de incidencia de vértices con entradas en el dioide, cada entrada $(a_{ij})_r$ de A^r ($r \in N$) indica los caminos de longitud r desde el vértice p_i al vértice p_j; en particular $(a_{ii})_r$ los circuitos de longitud r que pasan por el vértice p_i.
(aij)(r) y (aii)(r) en la matriz $A(r)= \sum_{\gamma=1}^{r} A^{\gamma}$ los caminos y circuitos de longitudes menores o iguales que r.

Con el dioide construido se eliminan los caminos y circuitos en los que uno o más arcos son recorridos k o más veces (En realidad dada la forma progresiva de calcular las potencias de la matriz de incidencia, cuando aparece el primer arco a_i recorrido k veces, queda eliminado el camino o circuito correspondiente).

También es cierto que $\lim r\to \infty\ A^r = A^l = (\emptyset),\ \forall\ l \geq n(k-1) + 1$ (16)
matriz cuyas entradas son todas iguales al conjunto Ø.
(Puede suceder que $A^l= (\emptyset)$ para algún $l < n(k-1) + 1$).

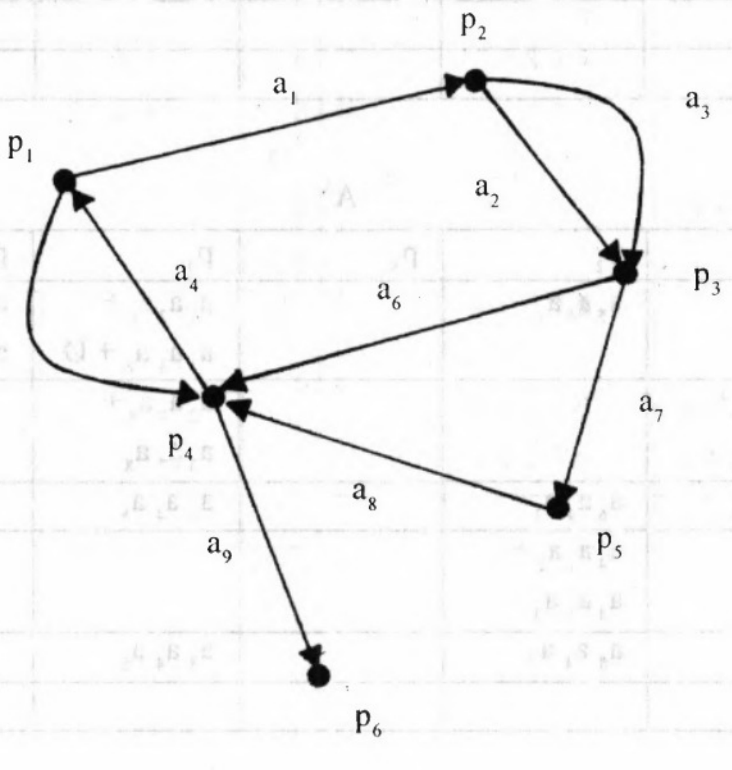
2.2 Caminos y circuitos eulerianos

Considerando en 1 y 2, 2.1, k = 2, se obtienen los caminos y circuitos eulerianos.

3. Ejemplo

Sea k = 2

Sea $\vec{G}$:



Entonces A es:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1		a_1		a_5		
p_2			$a_2 + a_3$			
p_3				a_6	a_7	
p_4	a_4					a_9
p_5				a_8		
p_6						

Observación: 1) las entradas omitidas indican vacío. Lo mismo en las sucesivas potencias de A. Sólo se colocará el símbolo Ø cuando se obtiene por el producto s' v'∈ I.

2) Por simplicidad pondremos $a_i\, a_j$ en vez de $a_i * a_j$.

Calculando resulta:

A^2

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	$a_5\, a_4$	$a_1 a_2 + a_1 a_3$				$a_5\, a_9$
p_2				$a_2 a_6 + a_3 a_6$	$a_2 a_7 + a_3 a_7$	
p_3	$a_6\, a_4$			$a_7 a_8$		$a_6\, a_9$
p_4		$a_4 a_1$		$a_4 a_5$		
p_5	$a_8\, a_4$					$a_8\, a_9$
p_6						

A^3

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1		$a_5\, a_4\, a_1$		$a_1\, a_2\, a_6 +$ $a_1\, a_3\, a_6 + Ø$	$a_1\, a_2\, a_7 +$ $a_1\, a_3\, a_7$	
p_2	$a_2\, a_6\, a_4 +$ $a_3\, a_6\, a_4$			$a_2\, a_7\, a_8 +$ $a_3\, a_7\, a_8$		$a_2\, a_6\, a_9 +$ $a_3\, a_6\, a_9$
p_3	$a_7\, a_8\, a_4$	$a_6\, a_4\, a_1$		$a_6\, a_4\, a_5$		$a_7\, a_8\, a_9$
p_4	Ø	$a_4\, a_1\, a_2 +$ $a_4\, a_1\, a_3$				$a_4\, a_5\, a_9$
p_5		$a_8\, a_4\, a_1$		$a_8\, a_4\, a_5$		
p_6						

A^4

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	$a_1 a_2 a_6 a_4+$ $a_1 a_3 a_6 a_4$		$a_5 a_4 a_1 a_2+$ $a_5 a_4 a_1 a_3$	$a_1 a_2 a_7 a_8+$ $a_1 a_3 a_7 a_8$		$a_1 a_2 a_6 a_8+$ $a_1 a_3 a_6 a_9$ + Ø
p_2	$a_2 a_7 a_8 a_4+$ $a_3 a_7 a_8 a_4$	$a_2 a_6 a_4 a_1+$ $a_3 a_6 a_4 a_1$		$a_2 a_6 a_4 a_5+$ $a_3 a_6 a_4 a_5$		$a_2 a_7 a_8 a_9+$ $a_3 a_7 a_8 a_9$
p_3		$a_7 a_8 a_4 a_1$	$a_6 a_4 a_1 a_2+$ $a_6 a_4 a_1 a_3$	$a_7 a_8 a_4 a_5$		$a_6 a_4 a_5 a_9$
p_4		Ø		$a_4 a_1 a_2 a_6+$ $a_4 a_1 a_3 a_6$	$a_4 a_1 a_2 a_7+$ $a_4 a_1 a_3 a_7$	
p_5		$a_8 a_4 a_1 a_2+$ $a_8 a_4 a_1 a_3$				$a_8 a_4 a_5 a_9$
p_6						

A^5 (abreviamos la notación i j k l por a_i a_j a_k a_l)

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	1 2 7 8 4 + 1 3 7 8 4	Ø + Ø		1 2 6 4 5 + 1 3 6 4 5 + 5 4 1 2 6 + 5 4 1 3 6	5 4 1 2 7 + 5 4 1 3 7	
p_2		2 7 8 4 1 + 3 7 8 4 1	2 6 4 1 3 + 3 6 4 1 2 + Ø + Ø	2 7 8 4 5 + 3 7 8 4 5		2 6 4 5 9 + 3 6 4 5 9
p_3			7 8 4 1 2 + 7 8 4 1 3	Ø + Ø	Ø + Ø	7 8 4 5 9
p_4	Ø + Ø		Ø + Ø	4 1 2 7 8 + 4 1 3 7 8		4 1 2 6 9 + 4 1 3 6 9
p_5				8 4 1 2 6 + 8 4 1 3 6	8 4 1 2 7 + 8 4 1 3 7	
p_6						

A^6

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1		Ø + Ø	Ø + Ø	1 2 7 8 4 5 + 1 3 7 8 4 5 + 5 4 1 2 7 8 + 5 4 1 3 7 8		1 2 6 4 5 9 + 1 3 6 4 5 9 + 5 4 1 2 6 9 + 5 4 1 3 6 9
p_2		2 7 8 4 1 3 + 3 7 8 4 1 3 + Ø + Ø				2 7 8 4 5 9 + 3 7 8 4 5 9
p_3				6 4 1 2 7 8 + 6 4 1 3 7 8 + 7 8 4 1 2 6 + 7 8 4 1 3 6	Ø + Ø	Ø + Ø
p_4	Ø + Ø			Ø + Ø + Ø Ø		
p_5				Ø + Ø		8 4 1 2 6 9 + 8 4 1 3 6 9
p_6						

A^7

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1			Ø + Ø			1 2 7 8 4 5 9 + 1 3 7 8 4 5 9
p_2				2 6 4 1 3 7 8 + 3 7 8 4 1 2 6 + Ø + Ø		
p_3						7 8 4 1 2 6 9 + 7 8 4 1 3 6 9
p_4				Ø + Ø + Ø + Ø		Ø + Ø + Ø + Ø
p_5						
p_6						

En A^8:

$(a_{14})_8 = \emptyset + \emptyset = (a_{46})_8$

$(a_{26})_8 = \emptyset + 2\,7\,8\,4\,1\,3\,6\,9 + 3\,7\,8\,4\,1\,2\,6\,9 + \emptyset$

Los demás $(a_{ij})_8 = \emptyset$

$A_9 = (\emptyset)$

BIBLIOGRAFÍA

Clifford & Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Volume I. American Mathematical Society - 1963, Rhode Island. EEUU.

Berger, Claude, *Teoria de las Redes y sus aplicaciones*. Compañia Editorial Continental, 1966, México D.F. México.

Araoz, Julián, Publicaciones (varias) de la Universidad Simón Bolívar. Venezuela.