

Solución Numérica de la Potencia en un Reactor Nuclear Usando el Método de Hamming

Numerical Solution of Nuclear Power Reactor Using Hamming Method

Daniel Suescún Díaz¹, Jorge Hernando Figueroa Jimenez², Héctor Fabio Bonilla Londoño³
Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia

dsuescun@javerianacali.edu.co
 jfigueroa@javerianacali.edu.co
 hfbonilla@javerianacali.edu.co

Resumen— En este artículo se plantea un nuevo método para resolver numéricamente las ecuaciones de la cinética puntual en un reactor nuclear usando el método de Hamming, el cual converge con precisión del orden h^5 donde h es el paso en el tiempo de cálculo. El procedimiento es validado para diferentes formas de reactividad y con diferentes pasos de tiempo. Los resultados computacionales son satisfactorios, pues indican que el método es bastante aproximado y tiene bajo esfuerzo computacional comparado con otros métodos convencionales.

Palabras clave—Ecuaciones de la Cinética Puntual, Método de Hamming, Reactores Nucleares, Reactividad.

Abstract— This article presents a new method for solving numerically the point kinetic equations in nuclear reactor using the Hamming method, which converges with accuracy of order h^5 where h is the time step. The method is validated for different forms of reactivity with different time steps. Computational results are satisfactory, they indicate that the method is fairly accurate and has low computational effort compared to other conventional methods.

Key Word—Point kinetics equation, Hamming Method, Nuclear Reactor, Reactivity.

I. INTRODUCCIÓN

La potencia y la concentración de neutrones retrasados en un reactor nuclear se modelan por medio de las ecuaciones de la cinética puntual. La solución computacional de las ecuaciones proporciona una comprensión de las dinámicas de operación en un reactor nuclear, lo cual permite entender las fluctuaciones de potencia evidenciadas durante el encendido o apagado del reactor [1], particularmente cuando las barras del reactor son ajustadas.

Gran parte de los trabajos interesados en este caso de estudio se han focalizado en eliminar el confinamiento de Stiffness usando la aproximación de Padé en [2]. Chao y Attard en 1985 [3]. Luego, en 1989 se implementó el método de

Runge-Kutta generalizado propuesto por [4]. Más tarde en el trabajo desarrollado por [5] se empleó una técnica de inversión de polinomios en el año 2002. Este artículo emplea el método de Hamming propuesto por el matemático R. W. Hamming, en el año 1959, este método surgió en el trabajo de investigación desarrollado por Hamming en los laboratorios Bell Telephone en Murray de New Yersey, para tratar el problema de inestabilidad del método de Milne que permite resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de forma numérica.

Adicionalmente Hamming expone en el artículo [6], la generalización de su trabajo, el cual puede ser aplicado a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias [7] aplicado al problema del cálculo de reactividad. Sin embargo en este trabajo se emplea el método de Hamming para la solución numérica de la potencia nuclear, efectuando comparaciones con los resultados obtenidos usando los métodos de Runge- Kutta de orden cuarto y Diferencias Finitas, con el fin de validar los resultados.

II. GENERALIDADES

Las ecuaciones de la cinética puntual se pueden obtener fácilmente a partir de la ecuación de la difusión de neutrones [8]. Dichas ecuaciones forman un sistema de siete ecuaciones diferenciales acopladas no lineales, que describen la evolución en el tiempo de la distribución de neutrones y la concentración de los precursores de neutrones retardados en el núcleo de un reactor nuclear, donde el parámetro dependiente del tiempo en este sistema es la reactividad. La representación matemática de las ecuaciones de la cinética puntual está dada por:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left[\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right] P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2)$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$P(t=0) = P_0 \quad (3)$$

$$C_i(t=0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} P_0 \quad (4)$$

Donde,

$P(t)$ = Potencia nuclear.

$C_i(t)$ = Concentración del i -ésimo grupo de precursores de neutrones retardados.

$\rho(t)$ = Reactividad.

Λ = Tiempo de generación de los neutrones instantáneos.

β_i = Fracción efectiva del i -ésimo grupo de neutrones retardados.

β = Fracción efectiva total de neutrones retardados.

$$\left(\beta = \sum_i \beta_i \right)$$

λ_i = Constante de decaimiento de él i -ésimo grupo de los precursores de neutrones retardados.

III. ESQUEMA PREDICTOR-CORRECTOR HAMMING

Sea la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de la forma $y' = f(t_k, y_k)$ y dado que los esquemas del corrector-predictor son de pasos múltiples, se requiere información de varios puntos previos a y_k para encontrar y_{k+1} , generalmente dichos puntos previos se calculan con el método de Runge-Kutta de orden cuarto.

El esquema predictor-corrector de Hamming utiliza el predictor de Milne, para aproximar la solución de la EDO haciendo uso del teorema fundamental del cálculo y el polinomio interpolador de Newton-Cotes de grado n igual a tres, para n valores equi-espaciados, la ecuación está dada por:

$$P_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3} (2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \quad (5)$$

Mediante formas de integración implícita y el método de los coeficientes indeterminados se da solución a la función $f(t, y)$ teniendo en cuenta un orden P y k puntos anteriores. A partir de la ecuación en diferencias con coeficientes indeterminados para un corrector generalizado de orden cuatro y k igual a tres, se obtiene:

$$y_{k+1} = \alpha_1 y_k + \alpha_2 y_{k-1} + \alpha_3 y_{k-2} + h[\beta_0 y_{k-1} + \beta_1 y_k + \beta_2 y_{k-1}] \quad (6)$$

En la ecuación (6) se pueden determinar los coeficientes en términos de α_2 (ver Tabla 1). Para $\alpha_2 = 1$ se obtiene el corrector de Milne. Por otro lado, el análisis de estabilidad para la ecuación en diferencias del corrector generalizado realizado por Hamming, presenta que el valor de α_2 debe estar en el intervalo $-0.6 < \alpha_2 < 1$. Para α_2 igual a 1, 9/17, 1/9, 0, -1, -1/7 se obtienen buenos resultados, pero el mejor es obtenido con $\alpha_2 = 0$, pues implica mayor zona de estabilidad. Por lo anterior el corrector de Hamming queda expresado de la siguiente forma:

$$C_{k+1} = \frac{-y_{k-2} + 9y_k}{8} + \frac{3h}{8} (-f_{k-1} + 2f_k + f_{k+1}) \quad (7)$$

Se introduce un modificador para mejorar la precisión dada por las ecuaciones (5) y (7), este valor está dado por:

$$m_{k+1} = P_{k+1} - \frac{112}{121} (P_k - C_k) \quad (8)$$

Sustituyendo el valor modificador en la ecuación (7), se obtiene:

$$C_{k+1} = \frac{-y_{k-2} + 9y_k}{8} + \frac{3h}{8} (-f_{k-1} + 2f_k + f(t_{k+1}, m_{k+1})) \quad (9)$$

Finalmente, el valor de salida es dado por:

$$y_{k+1} = C_{k+1} + \frac{9}{121} (P_{k+1} + C_{k+1}) \quad (10)$$

$\alpha_1 = (1/8)(9 - 9\alpha_2)$	0	9/17	1	9/8	9/7	45/31	9/5
$\alpha_2 = \alpha_2$	1	9/17	1/9	0	-1/7	-9/31	-3/5
$\alpha_3 = -(1/8)(1 - \alpha_2)$	0	-1/17	-1/9	-1/8	-1/7	-5/31	-1/5
$\beta_0 = -(1/24)(9 - \alpha_2)$	1/3	6/17	10/27	3/8	8/21	12/31	2/5
$\beta_1 = (1/12)(9 + 7\alpha_2)$	4/3	18/17	22/27	3/4	2/3	18/31	2/5
$\beta_2 = (1/24)(-9 + 17\alpha_2)$	1/3	0	-8/27	-3/8	-10/21	18/31	-4/5

Tabla 1. Coeficientes en función de α_2 para optimizar el Método de Hamming.

IV. RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados del método implementado y su comparación con los métodos de Runge-Kutta y Diferencias Finitas para 300, 550, 700 y 800 pcm (partes por cien mil) tal como se ilustra en las siguientes tablas comparativas donde se considera el tamaño de paso h y el error máximo absoluto e_{max} como indicadores de desempeño para este trabajo. Se observa que el método de Hamming tiene más precisión para las reactividades de 800 pcm.

Método (300 pcm)	$t = 1s$	$t = 10s$	$t = 20s$	h	e_{max}
Valor Exacto	2.2098	8.0192	28.2970	-	0
Hamming	2.209840	8.019199	28.297399	10^{-3}	0.000399
Runge-Kutta	2.209840	8.019199	28.297399	10^{-2}	0.000399
Diferencias Finitas	2.2098	8.0192	28.2974	10^{-6}	0.000400

Tabla 2. Cuadro comparativo de las soluciones para cada método con una reactividad de 300 pcm.

Método (550 pcm)	$t = 0.1s$	$t = 2s$	$t = 10s$	h	e_{max}
Valor Exacto	5.2100	43.025	1.3886×10^5	-	0
Hamming	5.215306	43.025143	1.38860×10^5	10^{-2}	0.005306
Runge-Kutta	5.209959	43.025143	1.38860×10^5	10^{-2}	0.000041
Diferencias Finitas	5.2100	43.0251	1.38860×10^5	10^{-6}	0.000000

Tabla 3. Cuadro comparativo de las soluciones para cada método con una reactividad de 550 pcm.

Método (700 pcm)	$t = 0.01 s$	$t = 0.5 s$	$t = 2 s$	h	e_{max}
Valor Exacto	4.5088	5.3459×10^3	2.0591×10^{11}	-	0
Hamming	4.508851	5.34588×10^3	2.059159×10^{11}	10^{-2}	0.000059
RungeKutta	4.508851	5.34584×10^3	2.059089×10^{11}	10^{-2}	0.000051
Diferencias Finitas	4.508855	5.34570×10^3	2.05887×10^{11}	10^{-6}	0.00023

Tabla 4. Cuadro comparativo de las soluciones para cada método con una reactividad de 700 pcm.

Método (800 pcm)	$t = 0.01 s$	$t = 0.5 s$	$t = 2 s$	h	e_{max}
Valor Exacto	6.2029	1.4104×10^3	6.1634×10^{23}	-	0
Hamming	6.20285	1.41042×10^3	6.16335×10^{23}	10^{-3}	0.00005
RungeKutta	6.20285	1.41042×10^3	6.16331×10^{23}	10^{-3}	0.00009
Diferencias Finitas	6.202683	1.410224×10^3	6.154747×10^{23}	10^{-6}	0.008653

Tabla 5. Cuadro comparativo de las soluciones para cada método con una reactividad de 800 pcm.

La Figura 1. Muestra la potencia obtenida cuando la reactividad tiene la forma $\rho(t) = 0.005333 \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)$ con periodo $T = 100 s$, idéntico resultado al obtenido por el método de Kinard y Allen en el 2004 [8].

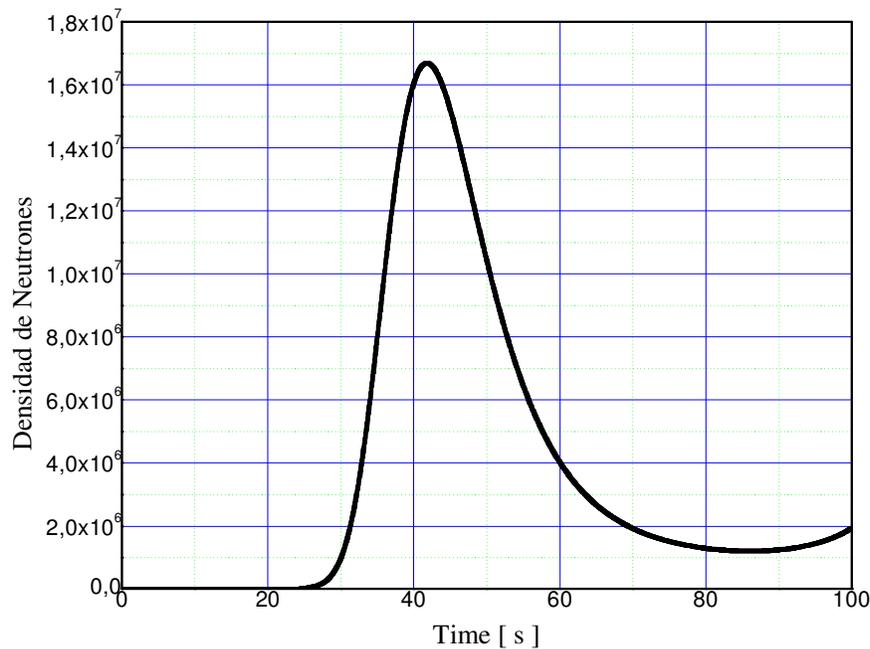


Fig 1. Densidad de la potencia nuclear en función de el tiempo

V. CONCLUSIONES

Se implementó el método de Hamming para resolver numéricamente las ecuaciones de la cinética puntual con un tamaño paso de $h = 10^{-3}$ con una diferencia máxima de 0.000399 para reactividad con valor de 300 pcm. Para reactividades de 700 pcm el paso es aumentado 10 veces, es decir $h = 10^{-3}$.

Para obtener una adecuada aproximación con una reactividad de 800 pcm, el tamaño del paso h se debe disminuir hasta 10 veces.

Adicionalmente, se encontró que usando el método de Hamming para cualquier valor de reactividad y en específico, para los que se muestran en este trabajo, el método disminuye el tiempo de computo en 276 s tomando como referente el método de diferencias finitas que arroja un tiempo de computo de 277.9 s para el intervalo de tiempo [0, 20] segundos.

Sin embargo, cabe mencionar que dada la naturaleza de los algoritmos de Runge-Kutta para reactividades bajas o igual a 300 pcm su zona de estabilidad es más amplia, lo cual se evidencia en el tamaño del paso h , sin embargo la ventaja de

Hamming con respecto a este método está dada por el número de funciones que deben evaluarse para obtener la solución, al comparar estos métodos el tiempo de cálculo del método Hamming es 0.6859 veces el tiempo de Runge-Kutta, lo que garantiza mayor velocidad en la solución de problemas numéricos

VI. ANEXOS

DIAGRAMA 1. MÉTODO DIFERENCIAS FINITAS

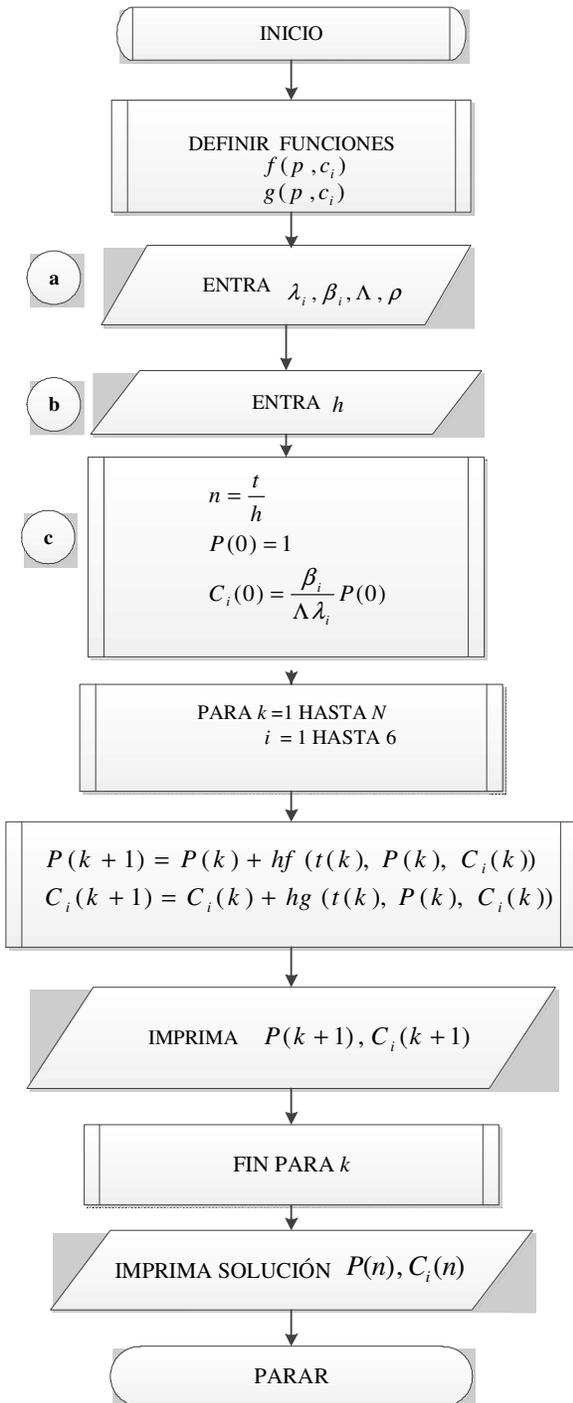


DIAGRAMA 2. MÉTODO RK4

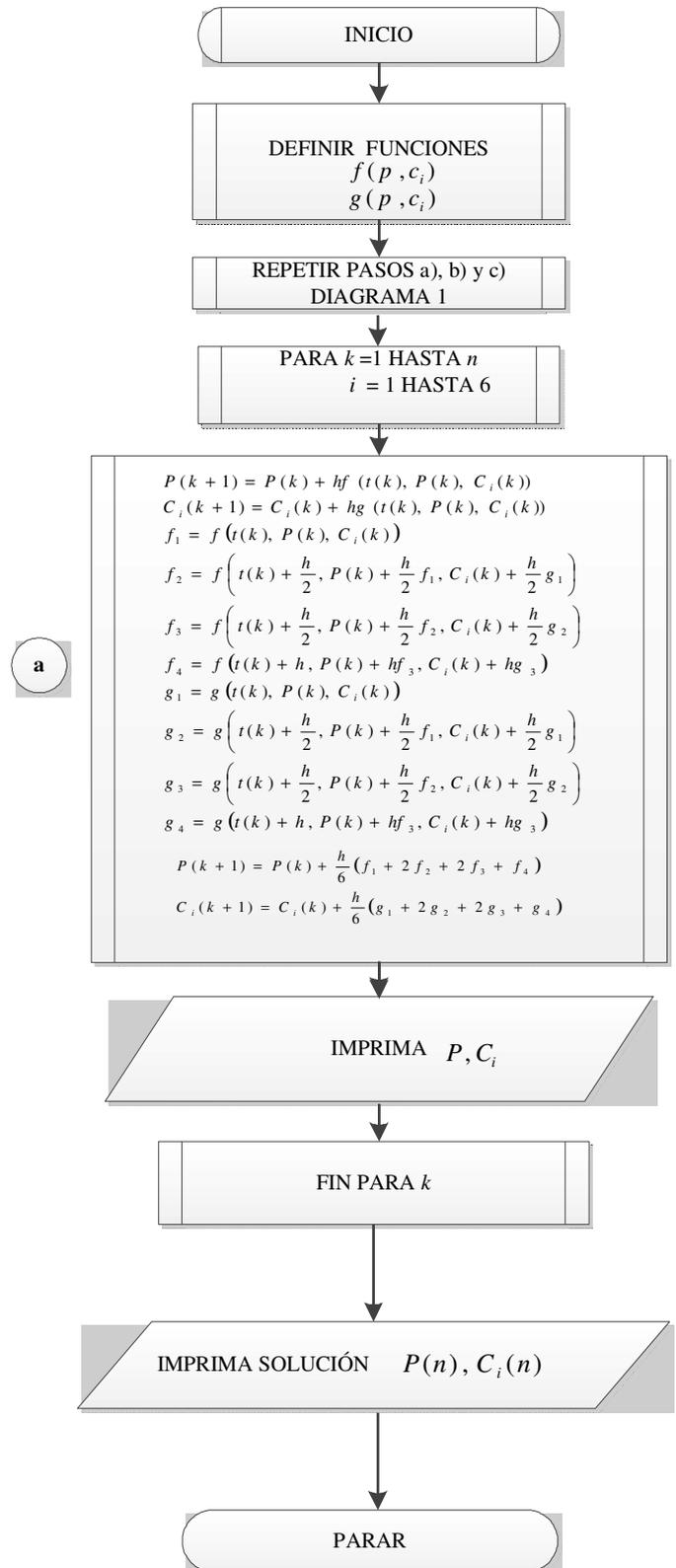
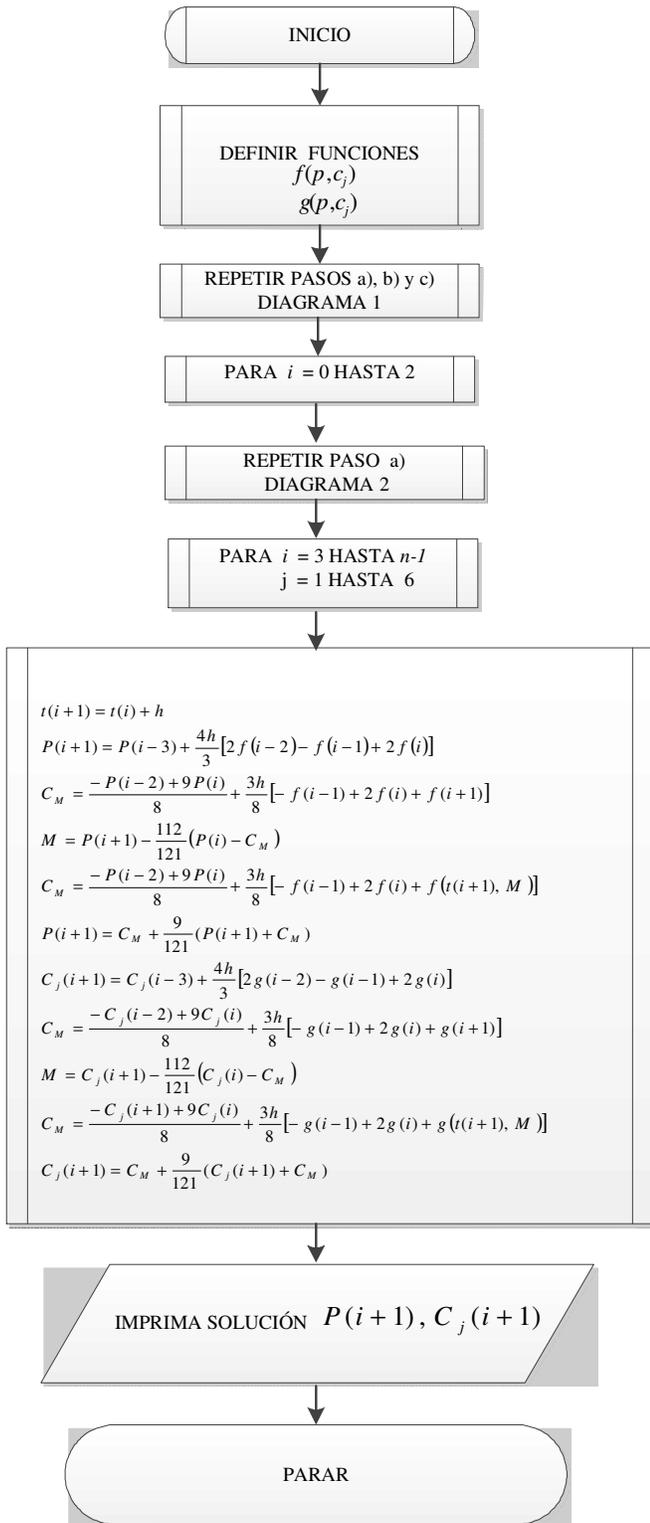


DIAGRAMA 3. MÉTODO DE HAMMING



REFERENCIAS

[1]. D. Suescún D, A. Senra, Finite differences with exponential filtering in the calculation of reactivity, *Kerntechnik*, vol. 75, no. 4, pp. 210-213, Abr. 2010.

[2]. J. A. W, DA. Nóbrega, A new solution of the point kinetics equations, *Nuclear Science and Engineering*, vol. 46, pp. 336-3375, 1971.

[3]. Y. Chao, A. Attard. A resolution to the stiffness problem of reactor kinetics, *Nuclear Science and Engineering*, vol. 90, pp. 40-46, 1985.

[4]. J. Sanchez , On the numerical solution of the point kinetics equations by generalized Runge-Kutta methods, *Nuclear Science and Engineering*. vol. 103, pp. 94-99,1989.

[5]. A.E. Aboander, A.A Nahla. Generalization of the analytical inversion method for the solution of the point kinetics equations, *Journal of Physics a: Mathematical and General*. vol. 35, pp.3245-3263, 2002.

[6]. R. W. Hamming. Stable predictor-correct method for ordinary differential equations. *Journal of the ACM*. vol.6, pp.37-47, 1959.

[7]. D. Suescún D, J.F.Flórez O, J. A. Rodriguez S. Hamming method for solving the delayed neutron precursor concentration for reactivity calculation. *Ann. Nucl. Energy*. vol 42, pp. 47-49, 2012.

[8]. J.J, Duderstadt, L.J, Hamilton, *Nuclear Reactor Analysis*, New York: Jhon Wiley & Sons Inc,1976.

[9]. M. Kinard, E.J Allen. Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*.vol. 31, pp. 3245-3263, 2004.