

Dificultades y errores que presentan los estudiantes de los grados décimo y undécimo de los colegios de Cali al resolver un problema de olimpiadas.

Difficulties and errors experienced by 10th and 11th grade students from schools in Cali when solving a problem in the Mathematical Olimpiads

Jorge Figueroa¹, Daniel Suescún Díaz²
Universidad Javeriana Cali, Cali, Colombia
 jfigueroa@javerianacali.edu.co
 dsuescun@javerianacali.edu.co

Resumen— En este documento se recogen los resultados obtenidos, al analizar los procedimientos realizados por un grupo de alumnos de los grados décimo y undécimo de los colegios de Cali, a un problema de olimpiadas. El grupo estaba conformado por 52 alumnos que fueron escogidos como “los de mejores desempeños matemáticos”, de entre 520 alumnos pertenecientes a los grados décimo y undécimo de 49 colegios públicos y privados, que presentaron un examen de selección múltiple que constaba de 15 preguntas de matemáticas. El análisis se hace desde un punto de vista matemático, tratando de describir e identificar los errores cometidos y las dificultades presentadas en la solución. Los resultados obtenidos muestran que los alumnos presentan dificultades y errores similares en sus producciones en temas de álgebra, a los errores que se identifican en un grupo de alumnos “regulares” del primer semestre en la Universidad.

Palabras clave— Álgebra, bachillerato, errores.

Abstract— This article gathers the results obtained when analyzing the procedures carried out by a group of students of 10th and 11th grade from schools in Cali, relating to a problem in a Mathematics Olimpiad. The group was made up of 52 students who were chosen for having ‘the best performance in mathematics’, among 520 10th and 11th grade students from 49 state and private schools, who presented a multiple choice-style test consisting of 15 mathematical questions. The analysis was made from a mathematical point of view, attempting to describe and identify the errors committed and difficulties found in their solution. The results show that the students experienced difficulties and made errors which were similar in their algebra production to those identified in a group of ‘normal’ students in their first semester in the University.

Key Word — Algebra, high school, errors.

I. INTRODUCCIÓN

Es preocupación frecuente de la comunidad de investigadores en educación matemática a nivel de educación superior, que el fracaso en la disciplina ha estado relacionado con errores cometidos a causa de fallas en los conocimientos previos de la matemática de la educación secundaria [1]. En este sentido [2], señala que muchos de los errores que los estudiantes cometen en matemática no se deben específicamente, al tema que se está desarrollando, sino a carencias de conocimientos previos que se transfieren a los nuevos contenidos que son abordados. Cadenas [3], citando a Brousseau [4], señala que un error es un concepto equivocado, producto de las combinaciones de los conocimientos previos que poseen los alumnos, es decir, “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, de la casualidad, sino que es un resultado de un conocimiento anterior, que ha tenido su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadecuado”. En [3], también se señala que los errores encontrados permiten retomar los contenidos logrando que los alumnos identifiquen e intenten superar sus dificultades y obstáculos para lograr nuevos aprendizajes, y realimentar los conocimientos existentes.

Identificar y describir las dificultades y errores que tienen los estudiantes “de mejores desempeños matemáticos” de los últimos grados del bachillerato al resolver un problema que involucra conocimientos matemáticos donde se deben realizar procedimientos algebraicos como: solución de una ecuación de tipo cuadrático, sustitución del valor de una variable en una expresión algebraica, operaciones con fracciones y expansión de un binomio elevado a una potencia entera; podrían servir para diseñar el contenido del primer curso de matemáticas, como también para implementar estrategias en aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje.

¹ Licenciado en matemáticas, M. Sc.

² Físico, Ph.D.

Trabajos como los de [3], [2] y [5] muestran que los estudiantes de primer semestre tienen deficiencias, dificultades y errores en conocimientos matemáticos previos al ingreso a la Universidad, en temas como ecuaciones cuadráticas, potenciación, radicación y operaciones aritméticas, entre otras.

II. POBLACIÓN Y MUESTRA

La Pontificia Universidad Javeriana – Cali realizó la cuarta olimpiada de matemáticas en el año 2008, donde participaron inicialmente 2300 alumnos de 49 colegios públicos y privados de la ciudad de Cali, distribuidos en tres categorías; la primera correspondía a los grados sexto y séptimo, la segunda a los grados octavo y noveno, y la tercera a los grados décimo y undécimo. En la primera fase de la olimpiada se aplicó tres test diferentes, uno para cada categoría, que constaba de 15 preguntas de selección múltiple con única respuesta. De cada categoría se escogió el 10% de “los mejores alumnos” y estos participaron en la fase final en una prueba escrita que constaba de 7 problemas, una prueba para cada una de las tres categorías. En la categoría tres, en la primera fase se inscribieron 520 alumnos y se seleccionaron 52 alumnos para la fase final. A continuación se presenta una tabla correspondiente a la prueba de la fase final de la categoría tres, donde se indica el número de alumnos que contestaron correctamente cada problema y el porcentaje.

Tabla. Prueba de la fase final categoría tres.

Número del problema	Número de alumnos que contestaron correctamente	Porcentaje
1	6	11.5
2	2	3.8
3	22	42.3
4	18	34.6
5	12	23
6	31	59.6
7	8	15.7

Fuente: Elaboración propia. Comité Olimpiadas Matemáticas.

Como se puede observar en la tabla, el problema que presentó mayor dificultad es el número dos, ya que solamente el 3.8% del total de los alumnos lo resolvieron correctamente.

Problema 2: Si x es un número real positivo tal que

$$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5 \quad (1),$$

Determine el valor de $\frac{x^6 + 1}{x^3}$ (2).

Se escogió este problema para hacer el análisis, porque en el proceso de solución se requiere conocimientos básicos de matemáticas, que se trabajan hasta el grado noveno en el bachillerato como: solución de una ecuación de tipo cuadrático, operaciones con fracciones, transposición de términos en una ecuación, sustitución del valor de una variable en una expresión algebraica, y era de esperarse que este grupo “con desempeño sobresaliente en el área de matemáticas” de alumnos que estaban terminando el bachillerato no tuvieran muchas dificultades para resolverlo.

De los 52 alumnos que presentaron la prueba, 22 alumnos ni siquiera intentaron resolver el problema dos.

III. ANÁLISIS DE PROCEDIMIENTOS

Al revisar las respuestas dadas por los 30 alumnos al problema, se identificó cuatro tipos de procesos teniendo en cuenta lo realizado en sus producciones. El primer grupo en el cual se reconocen 7 alumnos, solamente intentaron resolver la ecuación (1). El segundo grupo donde se ubican 13 alumnos intentaron resolver la ecuación (1) y luego reemplazaron el valor de x en la expresión (2). En el tercer grupo conformado por 8 alumnos intentaron manipular la ecuación (1), sin necesidad de despejar el valor de x , para luego hallar el valor de la expresión (2); y el cuarto grupo es el de los dos alumnos que resolvieron correctamente el problema.

Los procedimientos realizados por los alumnos se numeraron desde A1 hasta A28 y los errores cometidos en cada procedimiento se señala con una letra dentro de un paréntesis en el renglón donde aparecen, (t) significa error en la transposición de términos, (c) error en la ecuación cuadrática, (f) error en la fracción, (r) error en el radical, (e) error en los exponentes y (v) error en el valor de una expresión.

A continuación se muestran algunos de los procedimientos de los alumnos en cada grupo y al final de los procedimientos se da una explicación, tratando de plantear una hipótesis, con respecto a los errores y dificultades encontrados.

A. PRIMER GRUPO

A continuación se muestran tres de los procedimientos de los alumnos del primer grupo, es decir de los alumnos que solamente intentaron resolver la ecuación (1).

A1	A4
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$	$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$
$\sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2}} = \sqrt{5}$	$x^2 + 1 = 5x \quad (f)$
$\frac{x^2 + 1}{x} = \sqrt{5} \quad (r)$	$\frac{x^2}{x} = 5 + 1 \quad (t)$
$x^2 + 1 = \sqrt{5}x$	$x = 6 \quad (v)$
$1 = \sqrt{5}x + x^2 \quad (t)$	
$\frac{1}{\sqrt{5}} = x + x^2 \quad (t)$	

El alumno A1 en el tercer renglón en (r) presenta dificultades con expresiones que contienen radicales, comete error al distribuir el exponente sobre cada factor en procesos aditivos: suma y resta. En el renglón cinco en (t), hace la transposición del término x^2 incorrectamente, porque lo suma en el lado derecho de la ecuación en lugar de restarlo; también en el renglón seis comete error al hacer transposición de términos. Aunque finalmente obtiene en su procedimiento una ecuación de tipo cuadrático no la resuelve, quizá porque no conoce alguno de los métodos de solución.

El alumno A4 en el segundo renglón en (f) presenta un error en la fracción, obtiene una ecuación que no es equivalente a la anterior. En el tercer renglón comete un error en la transposición de términos. A pesar de hallar un valor de x (no el esperado), no reemplazó este valor en la expresión (2), esto se puede presentar por no tener claridad del qué hacer con el valor de la x o haber comprendido la consigna del problema, o tal vez porque creía que el problema era hallar el valor de x .

A7
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$
$x^4 + 1 = 5x^2$
$x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
$x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$

El alumno A7 fue el único de este primer grupo que resolvió correctamente la ecuación de tipo cuadrático, pero no resolvió el problema completamente porque no reemplazó el valor de x en la expresión (2).

B. SEGUNDO GRUPO

A continuación se muestran tres de los procedimientos del segundo grupo, estos alumnos resolvieron, incorrectamente, la ecuación (1) y luego reemplazaron el valor de x en la expresión (2).

A8	A11
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$	$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$
$x^2 + 1 = 5 \quad (f)$	$\frac{x^4}{x^2} = 5 - 1 \quad (t)$
$x^2 = 5 - 1$	$x^2 = 4$
$x = \sqrt{4} \quad (c)$	$x = 2 \quad (c)$
$x = 2$	$\frac{x^6 + 1}{x^3} = y$
$\frac{x^6 + 1}{x^3}$	$\frac{2^6 + 1}{2^3} = y$
$x^3 + 1 = (2)^3 + 1 \quad (f)$	$\frac{64 + 1}{8} = y$
$= 8 + 1$	$\frac{64}{8} = y - 1 \quad (t)$
$= 9$	$8 = y - 1$
	$9 = y$

El alumno A8 en el segundo renglón en (f), tiene dificultades al simplificar una expresión fraccionaria en una ecuación; asume que el denominador de una fracción solo divide a uno de los sumandos del numerador, o que puede cancelar un sumando con el denominador de la fracción. Comete el mismo error tanto en el primer procedimiento tratando de despejar a x en la ecuación (1), como en el segundo procedimiento al reemplazar este valor en la expresión (2). En (c) comete un error al considerar que el conjunto solución de una ecuación cuadrática del tipo $x^2 = c$, es $\{\sqrt{c}\}$ y no $\{\sqrt{c}, -\sqrt{c}\}$.

El alumno A11 en los renglones dos y ocho en (t), utilizan mal la propiedad uniforme de la adición, ya que el número 1 hace parte del numerador del lado derecho de la igualdad y no se puede “pasar” al lado izquierdo a restar. Tiene dificultades con la transposición de términos, quizá porque no logra reconocer cómo operar teniendo en cuenta las jerarquías de las operaciones. En el cuarto renglón en (c), comete el mismo error del alumno A8.

A15	
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$	
$\frac{x^2 + 1}{x} = 5$	(f) (e)
$x + 1 = 5$	(f)
$x = 5 - 1$	
$x = 4$	
$\frac{x^6 + 1}{x^3} = \frac{x^2 + 1}{x}$	(f) (e)
$= \frac{4^2 + 1}{4}$	
$= \frac{17}{4} = 4.25$	

El alumno A15 en el segundo renglón en (f), considera que el denominador de la fracción solo divide al primer sumando; también en el segundo renglón en (e) tiene dificultades con el manejo de propiedades de exponentes enteros, para dividir potencias que tienen la misma base en lugar de restar los exponentes, los divide a ambos por dos. En el tercer renglón en (f), comete el mismo error en la fracción como en el renglón dos. En el renglón seis tanto en (f) como en (e), comete los mismos errores del segundo renglón.

Ninguno de los 13 alumnos del segundo grupo que resolvió la ecuación (1) lo hizo correctamente, además cuando sustituyeron el valor de x en la expresión (2) también cometieron los mismos errores de transposición de términos y de fracciones en sus procesos.

Los alumnos, tanto del primer grupo, como del segundo grupo cuando resolvieron la ecuación de tipo cuadrático no verificaron si el valor de la incógnita x que hallaron, era una solución de la ecuación original. Se limitaron simplemente a efectuar transformaciones que les permitieran hallar el valor de la incógnita.

C. TERCER GRUPO

A continuación se muestran tres de los procedimientos de los alumnos del tercer grupo, estos alumnos realizaron procedimientos al interior de la ecuación (1) sin necesidad de despejar el valor de x , para luego hallar el valor de la expresión (2).

A21	
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$	
$\frac{x^6 + 1}{x^3} = y$	
$\frac{x^{12} + x^3 - x^{12} - x^2}{x^5} = 5 - y$	(e)
$\frac{x^3 - x^2}{x^5} = 5 - y$	
$\frac{x^2(x - 1)}{x^5} = 5 - y$	
$\frac{x - 1}{x^3} = 5 - y$	
$\frac{x - 1}{x^3} - 5 = -y$	
$\frac{x - 1 - 5x^3}{x^3} = -y$	
$\frac{-x + 1 + 5x^3}{-x^3} = y$	(v)

El alumno A21 resta a la ecuación del primer renglón la del segundo renglón y trata de escribir la resta de las fracciones como una sola fracción. En (e) se evidencia las dificultades en el manejo de propiedades de exponentes, porque cuando multiplica potencias que tienen la misma base, multiplica los exponentes en lugar de sumarlos (en el numerador de la fracción). Los seis procedimientos que realiza después son correctos y el alumno cree que resolvió el problema porque finalmente despeja y . Parece ser que este estudiante no entendió, que debe hallar un valor numérico para la expresión (2), y no una expresión en términos de x .

A23	
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$	
$\left(\frac{x^4 + 1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$	
$\frac{(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{x^3} = 5^{\frac{3}{2}}$	
$\frac{2\sqrt{(x^4 + 1)^3}}{x^3} = 5^{\frac{3}{2}}$	
$\frac{2\sqrt{x^{12} + 3x^8 + 3x^4 + 1}}{x^3} = 5^{\frac{3}{2}}$	

El alumno A23 no comete errores en los cuatro pasos que realiza, pero en el último renglón parece ser que se da cuenta que no puede obtener en el numerador la expresión $x^6 + 1$ para terminar el ejercicio. Quizá, esa sea la razón por la cual no continúa con el problema.

A24
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$
$x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2}$
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$
$x^6 + x^2 = 5x^4$
$x^6 + 1 = 5x^4 - x^2 + 1$
$\frac{x^6 + 1}{x^3} = \frac{5x^4 - x^2 + 1}{x^3} \quad (v)$

El alumno A24 no presentan errores en sus procedimientos, pero la respuesta que presenta no es numérica, sino una expresión en términos de x . Este alumno tiene dificultades con el significado de "valor" de una expresión.

D. CUARTO GRUPO

A continuación se muestran los procedimientos de los dos alumnos que resolvieron correctamente el problema.

A27
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5 \quad x^4 + 1 = 5x^2$
$(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = 5x^2 + 2x^2 = 7x^2$
$x^2 + 1 = \sqrt{7}x, \quad (x^2 + 1)^3 = 7\sqrt{7}x^3$
$\frac{(x^2 + 1)^3}{x^3} = 7\sqrt{7}$
$7\sqrt{7} = \frac{x^6 + 1}{x^3} + \frac{3x^2(x^2 + 1)}{x^3}$
$7\sqrt{7} = \frac{x^6 + 1}{x^3} + \frac{3x^2(\sqrt{7}x)}{x^3}$

A28
$7\sqrt{7} = \frac{x^6 + 1}{x^3} + 3\sqrt{7}, \quad \frac{x^6 + 1}{x^3} = 4\sqrt{7}$
$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5 \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 5 \quad x + \frac{1}{x} = ?$
$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 5 + 2 = 7$
$x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}, \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5\sqrt{7}$
$x^3 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = 5\sqrt{7}$
$x^3 + \frac{1}{x^3} + \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$
$\frac{x^6 + 1}{x^3} = 4\sqrt{7}$

La estrategia utilizada por estos alumnos consistió en manipular la ecuación (1), sin necesidad de despejar el valor de x , para hallar una ecuación equivalente; luego plantearon una ecuación que involucrara la expresión (2) y la ecuación equivalente a (1); para finalmente obtener el valor de la expresión (2).

IV. RESULTADOS Y COMENTARIOS

Teniendo en cuenta los procedimientos desarrollados por los alumnos, se pueden plantear las siguientes afirmaciones:

- El 67.8% muestran dificultades para resolver una ecuación de tipo cuadrático.
- El 32.1% no logran identificar las jerarquías de las operaciones que intervienen en los términos de una expresión y en una ecuación de tipo cuadrático. Esto los conduce a cometer errores cuando hacen transposición de términos en una ecuación.
- El 28.6% tienen dificultades cuando aparece una expresión fraccionaria en una ecuación o una expresión algebraica. Asumen que el denominador de la fracción solo divide a uno de los sumandos del numerador.
- El 21.4% muestran dificultades en el manejo de propiedades de exponentes y estas se evidencian en errores, donde para dividir potencias que tienen la misma base, dividen los exponentes en lugar de restarlos y en otros casos para multiplicar potencias que tienen la misma base, multiplican los exponentes.

- El 21.4% presentan dificultades con el significado de “valor” numérico de una expresión, esto se puede ver en los procedimientos de los alumnos, donde las respuestas que dan no son numéricas, sino expresiones que contienen la variable x .
- El 17.8% presentan dificultades con expresiones que contienen radicales, debido a que extraen factores de un radical, sin tener en cuenta si hay una suma, resta, multiplicación o división.

Se considera que algunos de los errores y dificultades que presentan estos alumnos podrían tener su origen en los procesos de enseñanza y aprendizaje debido posiblemente al uso exagerado de ejercicios rutinarios y de tipo algorítmico en el tema de álgebra. También los alumnos contribuyen a esta situación ya que generalmente quieren saber “la fórmula” para resolver los problemas y poco se interesan por los conceptos y el razonamiento que están detrás de un determinado tema.

Es preocupante, que tratándose de los “mejores” alumnos seleccionados de los colegios públicos y privados, y que además muestran interés por la matemática, estén presentando errores elementales en sus producciones en temas de álgebra, similares a los errores de un grupo de alumnos “regulares” del primer semestre en la Universidad ([1], [3] y [5]).

Sería deseable tener en cuenta las anteriores dificultades y errores encontrados en los alumnos, para el diseño de la unidad de procesos algebraicos del primer curso de matemáticas en la Universidad y también para tratar de implementar una propuesta didáctica con el fin de disminuir las dificultades y errores encontrados, y de esta manera mejorar la comprensión de los conocimientos matemáticos.

REFERENCIAS

- [1] Arraiz, M. G; Valecillos, F. M (2010). [En línea]. “Regreso a las bases de la matemática: un imperativo en educación superior”. *Revista Digital Universitaria*. Volumen 11. Número 9. <http://www.revista.unam.mx/vol.11/num9/art90/art90.pdf> [Consulta 20 Septiembre 2010].
- [2] Pochulu, M. (2005). [En línea]. “Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad”. *Revista Iberoamericana de Educación* (ISSN: 1681-5653). <http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf> [Consultado 5 Octubre de 2010].

[3] Cadenas, R. (2007). “Carencias, Dificultades y Errores en los Conocimientos Matemáticos en alumnos del primer semestre de la Escuela de educación de la universidad de los Andes”. <http://www.revistaorbis.org/ve/6/6Art4.pdf> [Consulta 1 Octubre 2010].

[4] Brousseau, G. (1994). “Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas”. Disponible en internet: <http://fractus.math.uson.mx/papers>.

[5] Pardo, H. y Jiménez, Y. (2003). Estudio sobre las dificultades cognitivas en matemáticas, que presentan los estudiantes del ciclo básico de ingenierías, cuando se pasa de una representación gráfica a la algebraica y viceversa. Tesis de Maestría en Educación. Pontificia Universidad Javeriana Cali.