Financiación e indiferencia en el valor de la anualidad cuando el número de periodos tiende a infinito

Financing and indifference in the value of the annuity when the number of periods tends to infinity

Omar Enrique Valencia Angulo[1], Edgar Alirio Valencia Angulo[2], Carlos Arturo Escudero[3]
Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
evalencia@utp.edu.co
carlos10@utp.edu.co

Resumen— El presente documento analiza el comportamiento de situaciones donde se financia un monto de capital, un bien o servicio o su equivalente en dinero y el valor hacia el cual se acerca, lo que Ernest F. Jr. y Richard S. Paul [1] y Laurence Hoffmann [2] llama una anualidad, es decir el monto de los pagos periódicos, cuando el número de estos crece de forma significativa.

Palabras clave— Anualidad de un valor presente, crecimiento exponencial, limite de una anualidad cuando los periodos tienden a infinito, financiación, análisis del valor del dinero en el tiempo, la financiación y sus variables, curvas logísticas, modelos exponenciales, cotas.

Abstract— This paper analyzes the behavior of situations where an amount of capital, a good or service or its equivalent in money and the value to which approaches the annuity, the amount of periodic payments is financed when the number of these has grown significantly.

Key Word — Present value annuity; exponential growth; limit of an annuity when periods tend to infinity; financing; analysis of the value of the money in time, the financing and its variables; curved logistics; exponential models, cotas.

I. INTRODUCCIÓN

En la economía y en las operaciones comerciales, se presenta un fenómeno, cuya definición leí por primera vez en el libro de Rodrigo Varela [3], el cual se conoce como el análisis del valor del dinero en el tiempo, y es que a menudo en la adquisición de bienes y servicios no se cuenta con los recursos o dinero suficiente, ante ello una opción muy común es tomar un crédito; al hacerlo, el tomador decide el plazo y la periodicidad de los pagos; entre el abanico de alternativas que el colocador le plantea, generalmente el tomador fija el plazo, buscando la comodidad en el monto del valor a cancelar cada vez que le toca hacer un abono; en el presente texto se explica y demuestra como en un momento dado, es indiferente el aumento en el plazo, dado que financieramente no implica disminución en el valor de la cuota y por otro lado, se estaría pagando en total una mayor cantidad de dinero por el crédito (algo que el común de las personas perciben, sin ser expertas en finanzas; a mayor plazo mayor financiación). Este análisis evidencia su importancia en la medida que como herramienta matemática, permite al tomador balancear la comodidad de las cuotas con el costo financiero y al final abordar el esquema que más se ajuste a su situación.

El estudio y comprensión de modelos, como el que a continuación se presenta encuentran la racionalidad de su utilización como factor analítico en negociaciones que suelen hacer los entes territoriales, las empresas y organizaciones, y los mismos particulares, como ocurre al financiar vivienda, donde las familias toman hasta 20 años para pagarla. Este análisis está relacionado con el concepto de *anualidades perpetuas*, mencionado por Lincoyan Portus Govinden [7]; también es importante el análisis y observación en operaciones de intensa composición (continua). Para explicar el tema y su formulación se acudirá a un concepto perteneciente a la función exponencial como son las curvas logísticas.

II. TENDENCIA DE LA ANUALIDAD CON RESPECTO AL VALOR PRESENTE, CUANDO EL TIEMPO ES SIGNIFICATIVAMENTE LARGO

Conceptualización 1: Una financiación o crédito ocurre cuando, para pagar una deuda se da un plazo para cancelarlo y a cambio, el colocador cobra como compensación un interés, de tal manera que el interés es el costo por el uso de un capital, un término sinónimo que se encuentra en libros financieros o

[1] Administrador de empresas de la Universidad del Valle; especialista en gerencia financiera de la Universidad Central, docente en temas administrativos y financieros en la Universidad de Pamplona

[2] Magíster en Ciencias Matemáticas

[3] Ph.D. en Ciencias Matemáticas.

Fecha de Recepción: 03 de Agosto de 2011
Fecha de Aceptación: 11 de Noviembre de 2011

matemáticos como el de Max A Sobel & Norbert Lerner [5] es rédito.

Conceptualización 2: En una negociación financiera, de forma directa se incluyen unas variables entre ellas el tiempo y como demuestra Arturo Infante Villareal [6] y Antonio Medina Serrano [9], derivado del tiempo están el número de periodos que se representa con n; el interés, en cuanto a la tasa para el periodo, se ilustra con **i**; no se debe dejar por fuera el capital en cuestión, el cual se llama P o VP, que significan presente o valor presente respectivamente.

Otras variables que intervienen, pero no de forma directa son el riesgo, este se configura como la probabilidad de que las cosas no evolucionen o terminen de la forma prevista, en el caso de una transacción financiera, es la probabilidad de que el tomador del crédito entre en moratoria de pagos o sencillamente que no pague, por ello en las operaciones crediticias se investiga la situación patrimonial, para establecer las garantías que el tomador puede ofrecer, se averigua la actividad económica y el flujo de efectivo para obtener su capacidad de endeudamiento; además se indaga su historial crediticio para tener un perfil sobre su disciplina y responsabilidad para honrar sus compromisos.

En la economía el riesgo castiga la tasa de interés y por ende al tomador de la financiación, ya que al imprimir un peso adicional a la obligación, la hace más costosa.

Otra variable que influencia las transacciones crediticias es la inflación, que se define como el aumento descontrolado y generalizado de los bienes y servicios, en un corto lapso de tiempo. Históricamente se constata que a mayor inflación, mayor es la tasa de interés y a cuando disminuye la inflación, también baja el costo del dinero.

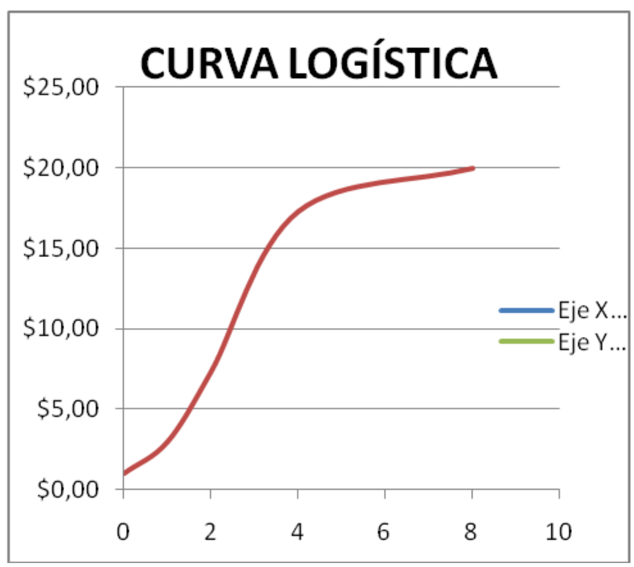
Otro aspecto que puede impactar las operaciones financieras, son las políticas monetarias del gobierno de turno, estas son las decisiones y medidas que las autoridades monetarias y económicas de un país, adoptan, tendientes a dinamizar o controlar la economía o algunas actividades puntuales; ejemplo, en la época de fin de año, el gobierno expande la oferta monetaria (libera dinero en la economía), ya que normalmente en la navidad y año nuevo, por costumbre o contagio, las personas consumen más que en cualquier otra época.

Un ejemplo de decisiones de control, se observan cuando los responsables del manejo económico, aumentan el encaje bancario (porcentaje de los recursos y recaudos que el banco está obligado dejar en el Banco Central); este tipo de acciones, normalmente implican una subida en los intereses.

Conceptualización 3: Ya que se han descrito las variables a involucrar en la financiación de deudas, y como se trata de una igualdad matemática, la variable a despejar es **A**: Esta es la anualidad, que otras palabras es el valor de la cuota que el tomador se compromete a pagar periódicamente, ó como se menciona en el libro de Corredores y Asociados [4], es *"una serie uniforme de flujos"*; en el caso de los particulares, la mayoría de las operaciones se pactan para hacer abonos mensualmente, pero las empresas y negocios pueden negociar pagos para periodos diferentes: en el pago de la anualidad se incluye como mínimo dos componentes como son la amortización y los intereses o rendimientos propios de la de obligación, la amortización, se define, prácticamente en todos los libros referidos como bibliografía, pero especialmente Jorge Rivera Salcedo [8] y Frank Aires Jr. [10] como el valor pagado que se destina a abonar o descontar a la deuda.

Conceptualización 4: Composición: Es un concepto financiero que hace referencia a la periodicidad con que se hacen abonos a una deuda u obligación o con que se liquidan los intereses; esto es, una deuda que se paga cada mes, tiene una mayor composición que una deuda pactada para cancelar bimensualmente (cada dos meses).

Conceptualización 5: Las curvas logísticas son representaciones de ecuaciones pertenecientes a la función exponencial que ilustran situaciones donde la variable dependiente encuentra, una cota, restricción de crecimiento o límite superior, cuando la variable independiente supera cierto nivel o crece sin límite; una explicación más desmenuzada, con los respectivos casos, se puede observar en los textos de Ernest F. Haeussler**,** Jr. y Richard S. Paul [1] y Hoffmann Laurence D. [2]. Un ejemplo de dicha función se puede observar en el siguiente gráfico.



$$f(n) = \left[\frac{C}{1 + Ae^{-Kt}}\right]$$

Gráfico 1

Formulación: Las siguientes son las ecuaciones para analizar la incidencia de la longitud de los periodos en el valor de la anualidad con relación a una deuda o financiación:

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \quad \{1\}$$

$$A = P\left[\frac{e^{(r\cdot n)}\,(e^{r}-1)}{e^{(r\cdot n)}-1}\right] \quad \{2\}$$

La ecuación {1}, se emplea para operaciones de interés compuesto discreto, que son aquellas operaciones donde la composición (el número de periodos de aplicación en un año) implica unos periodos claramente expresados o determinados, en otras palabras, finitos. De otra parte, la ecuación {2} se utiliza en operaciones de interés compuesto continuo, que son aquellas transacciones donde los periodos de aplicación son indeterminados, infinitos o de cantidad significativamente alta.

Premisa: En el desarrollo de los ejemplos, los valores porcentuales menores a la unidad, se expresarán en decimales.

Los resultados de las operaciones se expresarán con dos decimales.

Ejemplo 1. Una persona adquiere un bien que cuesta \$100.oo, la entidad financiera le cobra una tasa periódica del 3.6% mensual y el tomador desea calcular si al financiar a un plazo mayor a 156 meses, la disminución resultante en la cuota, vale la pena.

Como se puede observar, se debe utilizar la primera fórmula, debido a que la composición indica unos periodos a considerar o aplicar, claramente definidos, en este caso, cada mes

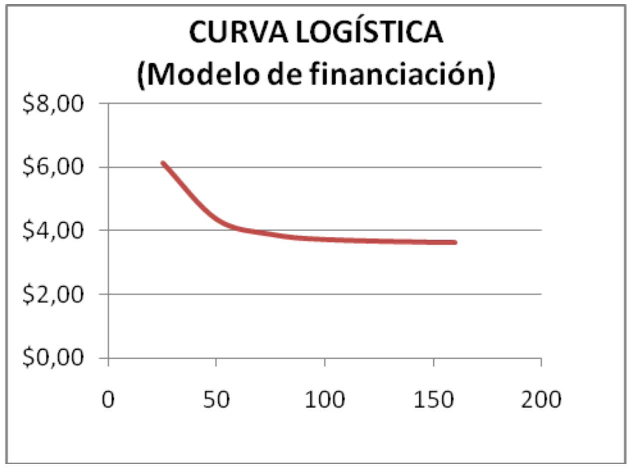
SOLUCIÓN: Para resolver el problema, se sugiere identificar cada variable conocida y la que se busca descubrir.

P = \$100 i = 0.036 Composición = Mensual.
n = 156 A = ?

Se continúa reemplazando en la ecuación:

$$A = \$100\left[\frac{0.036}{1-(1.036)^{-156}}\right] \qquad A = \$3.61$$

Ahora si se amplía el plazo, por ejemplo a 160 meses, se observa que el valor de las cuotas baja algunas milésimas, pero al seguir tomando dos decimales, el valor de la anualidad continúa siendo el mismo (\$3.61). Todo esto se ilustra mejor en el gráfico 2.



$$f(n) = A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \quad \{1\}$$

Gráfico 2

Se puede establecer que al financiarse \$100 a una tasa de interés del 3.6% no justifica tomar un plazo mayor a 75 meses debido a que la disminución en el valor de la anualidad no es tan significativo, como para motivar al tomador a ampliar el plazo; y luego de 156 meses de plazo, ya el valor de las mensualidades no sufre impacto alguno; de hecho, por más plazo que se tome, el valor de los pagos no bajará de \$3.6.

Ejemplo 2: Una organización decide tomar la financiación de una maquina por valor de \$200, con pagos bimestrales durante 104 periodos y una tasa respectiva del 6%de composición continua, el directivo sospecha que después de cierto plazo, el monto de las bimensualidades no baja de forma impactante, como para hacer ese esfuerzo, por lo cual desea hacer un análisis sobre la influencia de plazo largo en el valor de las anualidades.

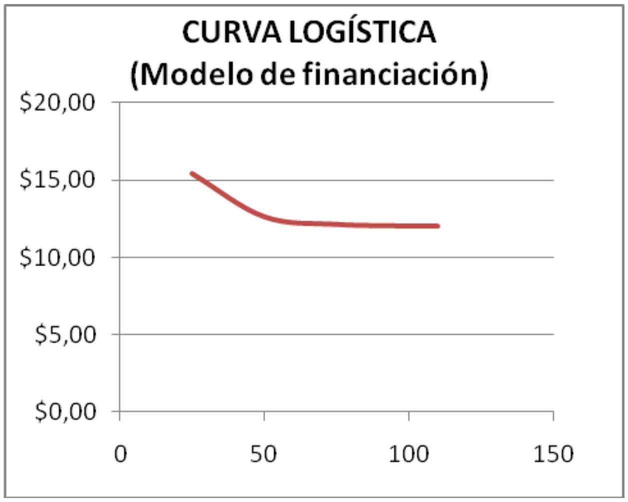
Tal como indica la información del problema, se trata de una financiación de composición continua, por lo que se requiere utilizar la ecuación {2}.

SOLUCIÓN: Se pasa a identificar variables conocidas y la que se debe esclarecer.

P = \$200 i=6% Composición=Continua
n=104 A=?

Paso seguido, se reemplazan las variables conocidas en la fórmula:

$$A = \$200\left[\frac{e^{(0.06*104)}\,(0.06-1)}{e^{(0.06*104)}-1}\right] \qquad A=12.02$$



$$f(n) = A = P\left[\frac{e^{(r*n)}\,(e^{r}-1)}{e^{(r*n)}-1}\right]$$

Gráfico 3

Al ensayar con valores superiores de 104, se observa que la disminución en el valor de las bimensualidades es poco significativo, lo que aunado a la gráfica 3, indica que por más que se extienda el tiempo de plazo, el valor de las cuotas no bajará de $12; por todo lo anterior, la observación indica que más allá de 40 bimestres, los plazos adicionales no impactan lo suficiente la disminución de las cuotas.

Ejemplo 3: El siguiente ejemplo sirve para demostrar como una tasa de interés mayor hace que la cota en la curva logística, se ubique en un menor valor de la variable independiente (el plazo).

Un comerciante acude donde dos intermediarios financieros para cotizar la financiación de $300, las entidades tiene diferentes políticas en cuanto garantías, requisitos, plazo, y tasas de interés; la entidad I, cobra una tasa periódica del 8% y la II, 9%; el comerciante desea hacer un análisis comparativo, al hacer la financiación a 115 bimestres.

ENTIDAD I:

P = $300 i = 0.08 Composición=Bimestral
n = 115 A = ?

Reemplazando en la ecuación:

$$A = \$300\left[\frac{0.08}{1-(1.08)^{-115}}\right] \qquad A = \$24$$

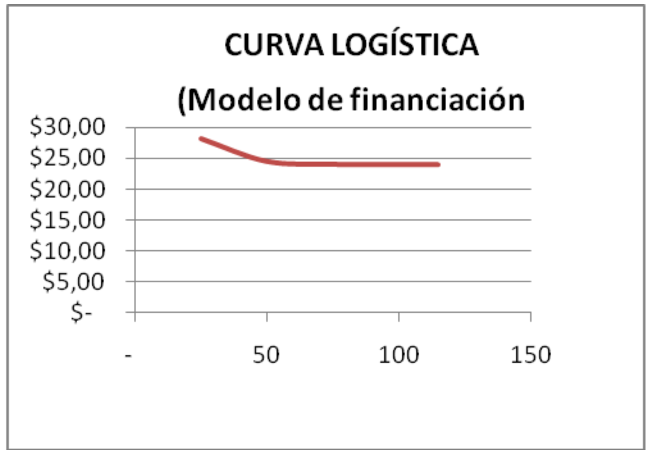


Gráfico 4

ENTIDAD II:

P = $300 i = 0.09 Composición=Bimestral
n = 115 A = ?

Se reemplaza en la ecuación:

$$A = \$300\left[\frac{0.09}{1-(1.09)^{-115}}\right] \qquad A = \$27$$

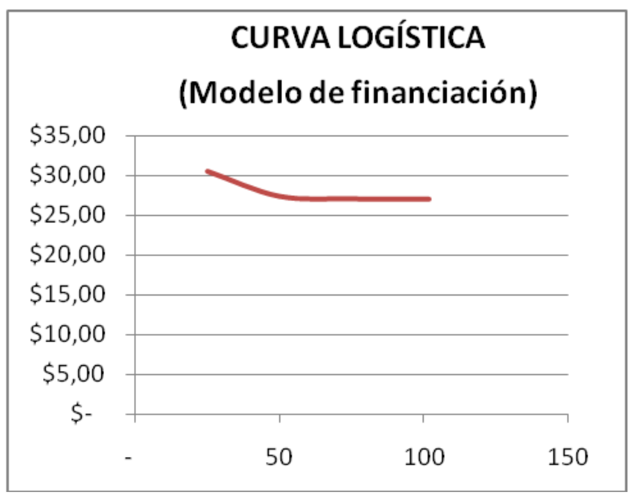


Gráfico 5

Se puede observar que para la financiación en la entidad I, la indiferencia (cota) en el valor de la anualidad, ocurre cuando el plazo es de 112 (para un A=24), a partir de ahí, aunque se extienda el monto de la anualidad, esta no baja. Si el análisis se hace más exhaustivo, se encuentra que en un plazo de 50 periodos, el valor de la anualidad es de 24.52, lo que lleva a deducir que no vale la pena ampliar el plazo más allá de 50 periodos.

Para el caso de la financiación por parte de la entidad II, el plazo donde la anualidad se hace indiferente es 102 (para un A=27). Siendo igualmente profundos en el análisis, se observa que para un plazo de 46 periodos, la anualidad es de 27.52, esto permite igualmente establecer que no valdría la pena extender el plazo a partir de ahí.

III. CONCLUSIONES

Los ejemplos ilustrados para financiaciones de diferente composición, permiten establecer que cada operación debe analizarse sobre la conveniencia de utilizar un plazo más allá de cierto tiempo, en relación con las diferentes variables que intervienen en la operación crediticia o financiera, como son el valor presente, la tasa de interés para el periodo y el plazo.

Lo que se constata de forma ineludible, es que cada transacción de este tipo (equivalencia entre una anualidad y un valor presente) tiene un nivel donde claramente se determina que el valor de la anualidad no disminuirá por más plazo que se adicione.

Las fórmulas para hacer equivalencias entre valores en diferentes posiciones con respecto al tiempo, se conocen como matemáticas financieras, estos tres ejemplos verifican que dichas ecuaciones son exponenciales.

El ejemplo 3 deja claro que una mayor tasa periódica hace que el plazo donde el valor de la anualidad se hace indiferente, sea menor, es decir, si se eleva la tasa, la cota en cuanto al plazo que hace invariable la anualidad se reduce.

El enfoque de algunas operaciones financieras bajo el modelo de las curvas logísticas es útil para evaluar el nivel de tiempo o plazo que permite maximizar u optimizar el uso y administración de los recursos involucrados en una operación crediticia.

REFERENCIAS

[1] Ernest F. Haeussler, Jr. y Richard S. Paul: *matemáticas para administración y economía.* Pearson, Prentice Hall, 2003.

[2] Hoffmann Laurence D. *Cálculo aplicado para administración, economía contaduría y ciencias sociales.* McGraw-Hill, 1990.

[3] Varela V. Rodrigo. *Evaluación económica de inversiones.* Grupo Editorial Norma, 1993.

[4] Corredores y asociados S. A.; *Manual para el cálculo de rentabilidades.* 1994

[5] Max A Sobel & Norbert Lerner; *Algebra*; editorial Prentice Hall 1989.

[6] Villareal Infante Arturo; *Evaluación financiera de proyectos de inversión*; editorial Norma, 2009.

[7] Lincoyan Portus Govinden; *Matemáticas financieras*, editorial McGraw Hill

[8] Rivera Salcedo Jorge; *Matemáticas financieras*; editorial IPN, 1998.

[9] Medina Serrano Antonio; *Las funciones financieras más útiles llevadas al mundo empresarial*; editorial Anaya Multimedia América, 1994.

[10] Ayres Frank JR.; *Matemáticas financieras*; editorial McGraw Hill, 1993