

# Representación matemática y geométrica de un sistema de proporción

Mathematical and geometric representation of a system of proportion.

Jorge I. Gómez Angarita<sup>1</sup>

*Diseñador Industrial, Universidad Autónoma Manizales, Manizales, Colombia*  
jigomez@autonoma.edu.co

**Resumen**— Este artículo pretende exponer una parte del resultado de investigación en la elaboración de un modelo geométrico de proporción que permite desarrollar un tipo de equilibrio visual y constructivo entre las partes que componen a un todo diseñado en los objetos, productos industriales, relaciones antropométricas y estructuras en general. El proyecto pertenece a la línea de investigación en objetos y sistemas industriales del grupo de investigación Diseño & Complejidad de la Universidad Autónoma de Manizales y se basa en la existencia de principios geométricos que son importantes para determinar las condiciones de equilibrio, donde los conceptos básicos de escala, simetría y proporción, permiten el ordenamiento que conjuga la triada forma, función, estructura.

**Palabras clave**— Simetría, proporción Aurea, Teorema de Leonardo, Proporciones notables, Grupos y matrices, Isometrías, Canon de proporción.

**Abstract**— This article aims to expose a part of the research result in the development of a proportion geometric model that allows the development of a type of visual and constructive balance between the parts that make an entire designed in the objects, industrial products, anthropometric relationships and structures in general. This project belongs to the objects and systems research line of Industrial Design & Complexity research group of the Autonomia University of Manizales and it is based on the existence of geometric principles that are important to determine the balance conditions, where the basic concepts of scale, symmetry and proportion allow the arrangement of a triad that combines form, function, structure.

**Key Word** — Symmetry, Golden Ratio, Leonardo's theorem, Proportion, Groups and Matrix math, Isometrics, Canon of proportion.

## I. INTRODUCCIÓN

Toda elaboración de un proyecto de ingeniería, diseño o de arquitectura, introduce en el medio una alteración espacial, donde los volúmenes, superficies, líneas, articulaciones

plásticas y cromáticas concurren juntas al crear el objeto o el producto, tanto en su morfo-funcionalidad como en el comportamiento del mismo en su entorno, y su estrecha relación dimensional con el hombre; justificación que lleva a que el diseño actúe en el sentido de las proporciones, donde existe una intencionalidad visual que consiste en crear un orden aparente por repetición de figuras geométricas con o sin semejanza; pero con intencionalidad formal, basada no en las formas mismas, sino en el ritmo entre tales formas.

Con esta concepción se soslaya la cuestión de la conmensurabilidad de segmentos áreas y volúmenes, ya acontecida en Grecia en el siglo IV a.C. estableciendo las definiciones de mayor, menor y de razón entre dos magnitudes; es así como aparece en Grecia una nueva perspectiva sobre la teoría de proporción con el célebre filósofo, astrónomo y matemático Eudoxo, quien participa con gran contribución al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, y con ello estableció que:

“las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios; los volúmenes de dos esferas a los cubos de sus radios; el volumen de un prisma es un tercio el volumen de un prisma de igual base y altura; y el de un cono es un tercio del cilindro de igual base y altura.”

Por estas sencillas razones para Eudoxo no tiene sentido preguntar ¿cual es el área del círculo? ¿Cuál es el volumen de una esfera?, etc..., pero sí lo tiene ¿Cuál es la relación que existe entre las áreas de dos círculos, entre los volúmenes de dos esferas?, etc. Con esta definición de Eudoxo se deja a un lado la preocupación por la inconmensurabilidad que existe entre círculos y cuadrados; esferas y cubos; y nos introducimos en la realidad de la comparación; comparamos cuadrados con cuadrados y círculos con círculos, etc., sentando así Eudoxo el primer indicio del concepto de límite más conocido como el método de exhaustión, método que también se conoce por los elementos euclidianos libro X proposición 1:

“dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra mayor que su mitad y se repita el proceso continuamente, quedara una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.”

<sup>1</sup> Investigador del grupo Diseño y Complejidad

Para establecer este teorema, Euclides recurre al hoy día llamado *postulado de Arquímedes* el cual dice “dadas dos magnitudes desiguales, se puede alcanzar y superar la mayor repitiendo la menor un número suficiente de veces”, principio equivalente a la proposición 1 del libro X.

Es de aclarar que Euclides introduce una definición de proporción antes de la conocida en aquella época y enunciada de la siguiente manera:

“Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se pueden multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra”.

Euclides introdujo la definición anterior pensando en que todas las magnitudes tienen razón. [1]

## II. EXPLICACIÓN DE PROPORCIÓN

Una proporción es una igualdad entre dos razones, y aparece frecuentemente en notación fraccionaria.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Luego se puede definir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0.$$

La proporción se denomina racional, conmensurable o estática si:

$$\frac{a}{b} \text{ es un número racional positivo.}$$

La proporción se denomina irracional, inconmensurable o dinámica si:

$$\frac{a}{b} \text{ es una proporción de valor irracional positivo.}$$

La proporción notable Aurea  $\frac{a}{b} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$

es denominada número de oro  $\phi$

| Proporciones Notables             |  |
|-----------------------------------|--|
| Estáticas                         | Dinámicas                                    |
| <b>Cuadrada</b> $\frac{a}{b} = 1$ | <b>Raíz de dos</b> $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$  |
| <b>Dupla</b> $\frac{a}{b} = 2$    | <b>Raíz de tres</b> $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ |

|   |  |
|---|--|
| <b>Sesquitercia</b> $\frac{a}{b} = 4/3$ | <b>Plata</b> $\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}$                      |
| <b>Sesquiáltera</b> $\frac{a}{b} = 3/2$ | <b>Áurea</b> $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$            |
| <b>Pentatercia</b> $\frac{a}{b} = 5/3$  | <b>Cordobesa</b> $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ |
| .....                                   | .....  |

### Cuadro 1. Proporciones notables. [2]

Y la proporción notable de plata  $a = (1 + \sqrt{5})$  es denominada número de plata  $\theta$

Soluciones positivas de las ecuaciones

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - ax - 1 = 0$$

Respectivamente, pertenecen a la “familia de los números metálicos, que originan proporciones notables en arquitectura. [3-4]. El estudio de estos números es muy reciente, y son números irracionales de la forma

$$\phi_n = a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}} = a = 1, 2, 3, \dots$$

y son respectivamente, la solución positiva de las ecuaciones

$$x^2 - ax - 1 = 0 \quad [5]$$

La ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad a \in \mathbb{N}, \text{ puede ser}$$

$$G(n+2) - aG(n+1) - G(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Cuando  $a=1$  se obtiene la sucesión de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,..... cuyos cocientes tienden al número de oro.

Si  $a=2$ , se obtiene la sucesión de Pell [6], 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239,.... Cuyos cocientes tienden al número de plata. Las sucesiones anteriores forman parte de la familia de las Sucesiones Secundarias generalizadas de Fibonacci, que son de la forma:

$$a, b, pb+qa, p(pb+qa) + qb, \dots$$

O bien:

$$G(n+2) = -pG(n+1) + qG(n), \quad p, q \in \mathbb{N},$$

$$G(0) = G(1) = b$$

Para estas sucesiones se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n+2)}{G(n+1)} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Los números metálicos son límites de estas sucesiones secundarias Generalizadas de Fibonacci y, a partir de ellos, se generan sucesiones con el doble carácter aditivo y multiplicativo [2-5].

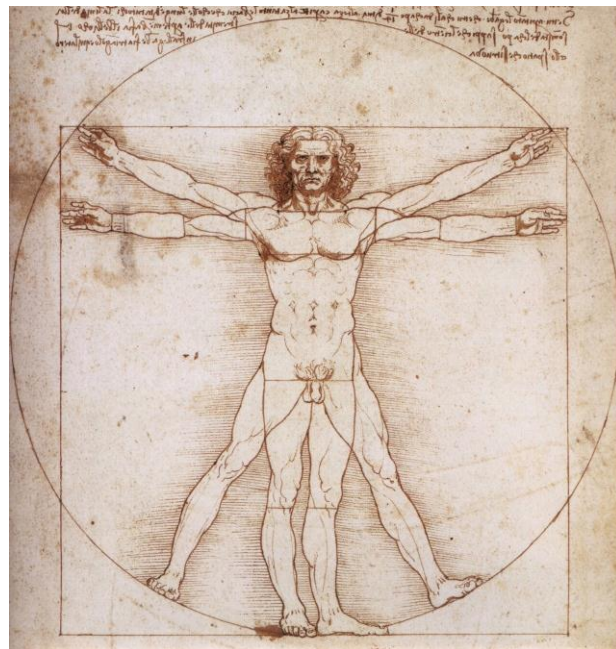
| Sucesión de Fibonacci                                    | Sucesión de Pell   | Sucesión de Padovan                                   |
|--|--|---|
| $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$                                | $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$                                 | $a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2}$                         |
| Con $a_0 = a_1 = 1$                                      | Con $a_0 = a_1 = 1$  | Con $a_0 = a_1 = a_2 = 1$                             |
| 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...                     | 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239,...                            | 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16,...              |
| $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = P$ |
| $\phi$ es el número de oro                               | $\theta$ es el número de plata                             | $P$ es el número de plástico                          |
| 1,618.....   | 2,4142.....  | 1,324.....  |
| Raíz real y positiva de: $x^2 - x - 1 = 0$               | Raíz real y positiva de: $x^2 - 2x - 1 = 0$                | Raíz real y positiva de: $x^3 - x - 1 = 0$            |

**Cuadro 2**  
Cuadro resumen de algunas características de los números de oro, plata y plástico. [2].

### III. LA PROPORCIÓN EN LA FIGURA HUMANA

La proporción de la figura humana es la medida que el hombre toma como base para realizar armónicamente objetos, productos industriales, relaciones antropométricas y estructuras en general. Esa antropometría relacionada a la obra humana tiene de manera inmersa el concepto de la proporción, y modularidad; pero siempre teniendo como base al hombre donde éste es el centro de la medida; por esta razón la regla de las proporciones de la figura humana busca un modelo al tipo ideal aceptado o con características

perfectas, cuestión que lleva a tener una regla o precepto proporcional al cual se le denomina canon. El canon más antiguo acerca de las proporciones del humanas se encontró en Egipto (aprox 3000 años a. En el siglo I a.C., tiempo después el arquitecto romano Vitruvio, al servicio del emperador Julio Cesar, escribe 10 tomos de ingeniería hidráulica, de cuadrantes solares, de mecánica y de sus aplicaciones en arquitectura civil e ingeniería militar, donde se marca el interés por las proporciones del cuerpo y la importancia relacional de estas con la fabricación de objetos y obras de ingeniería. En la Edad Media, el monje Dionisio de Phourna Agrapha, describió el cuerpo humano como “de altura, nueve cabezas”. Luego en el siglo XV el italiano Cennino Cennini, describe la altura del hombre como igual a su anchura con los brazos extendidos. En el Renacimiento, Leonardo Da Vinci realiza el dibujo de la figura humana, basado en la normatividad propuesta por el arquitecto Vitruvio.



**Figura 1.**  
**Hombre de Vitruvio**

La importancia del estudio de las medidas del hombre lleva a Linneo, Buffon y White (antropometría física) a desarrollar investigaciones de antropometría racial comparativa, hasta que a mediados del siglo XIX Gibson y J. Bonomi, rearmaron la figura de vitruvio. Pero fue realmente el belga Quetlet, quien realiza trabajos antropométricos, que estructuran esta ciencia, al punto de reconocérsele a él, la denominación de antropometría. Luego en el siglo XX el arquitecto Le Corbusier retoma los estudios del arquitecto Vitruvio creando el Modulor.

(“Vitruvio el arquitecto, dice en su obra sobre arquitectura que la naturaleza distribuye las medidas del cuerpo humano como sigue: que 4 dedos hacen 1 palma, y 4 palmas hacen 1 pie, 6 palmas hacen 1 codo, 4 codos hacen la altura del hombre. Y 4 codos hacen 1 paso, y que 24 palmas hacen un hombre; y estas medidas son las que él usaba en sus edificios. Si separas la

piernas lo suficiente como para que tu altura disminuya  $1/14$  y estiras y subes los hombros hasta que los dedos estén al nivel del borde superior de tu cabeza, has de saber que el centro geométrico de tus extremidades separadas estará situado en tu ombligo y que el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero. La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura. Desde el nacimiento del pelo hasta la punta de la barbilla es la décima parte de la altura de un hombre; desde la punta de la barbilla a la parte superior de la cabeza es un octavo de su estatura; desde la parte superior del pecho al extremo de su cabeza será un sexto de un hombre. Desde la parte superior del pecho al nacimiento del pelo será la séptima parte del hombre completo. Desde los pezones a la parte de arriba de la cabeza será la cuarta parte del hombre. La anchura mayor de los hombros contiene en sí misma la cuarta parte de un hombre. Desde el codo a la punta de la mano será la quinta parte del hombre; y desde el codo al ángulo de la axila será la octava parte del hombre. La mano completa será la décima parte del hombre; el comienzo de los genitales marca la mitad del hombre. El pie es la séptima parte del hombre. Desde la planta del pie hasta debajo de la rodilla será la cuarta parte del hombre. Desde debajo de la rodilla al comienzo de los genitales será la cuarta parte del hombre. La distancia desde la parte inferior de la barbilla a la nariz y desde el nacimiento del pelo a las cejas es, en cada caso, la misma, y, como la oreja, una tercera parte del rostro».

#### IV. HACIA UN MODELO DE PROPORCIÓN

Es una práctica común en el diseño geometrizar, lo cual se define como trasladar una propuesta a formas básicas geométricas (geometría euclidiana) o bien otro tipo de geometría no euclidiana para buscar planos bidimensionales o tridimensionales que muestran las relaciones armónicas. En otras palabras cualquier diseño para ser plasmado en el papel, requiere vincular los espacios con el hombre y lo diseñado, para así formar un conjunto espacial que da sentido y contexto a un proyecto. Ahora, cuando se modula en diseño, se refiere a la distribución coherente y lógica de las estructuras que sustentarán la idea de lo que se desea diseñar; por esta razón la modulación está basada en principios geométricos que hacen prevalecer la armonía.

De acuerdo con lo anterior pensemos en una manera de geometrizar, que permita buscar la armonía en lo que se diseña, partiendo de principios geométricos donde las relaciones proporcionales basadas en la construcción (instrumentos o sistemas CAD), fácilmente crezcan o decrezcan en un área determinada; manteniendo las relaciones armónicas bajo la teoría de acción de grupo, isometrías y simetrías.

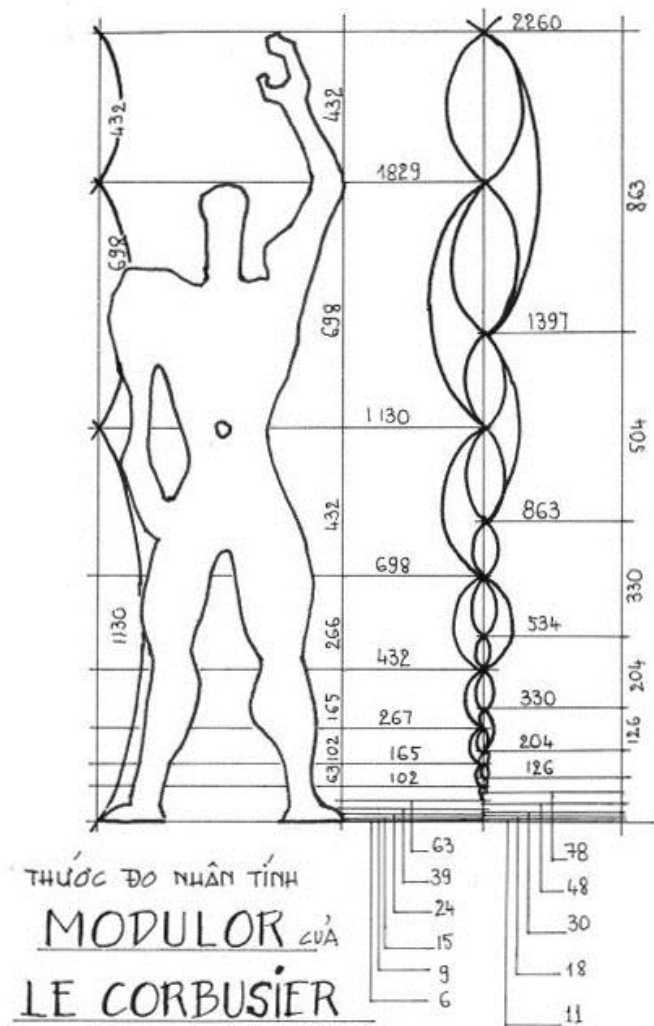


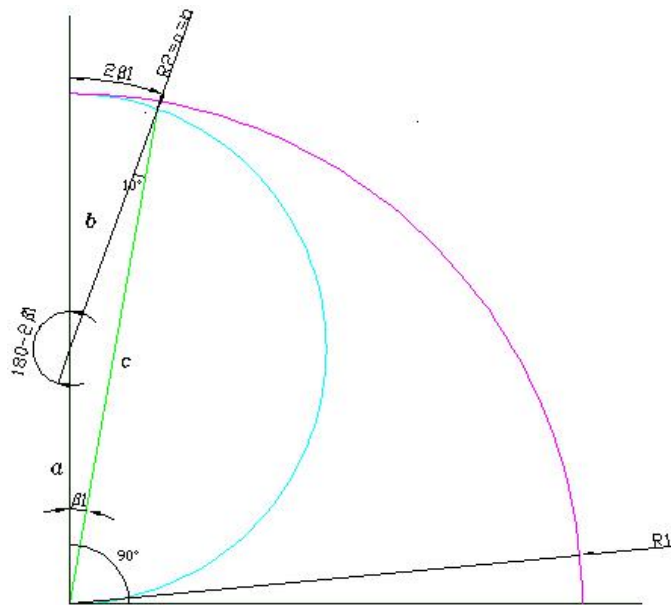
Figura 2.  
Modulor de Le Corbusier según Thuoc Dong Nhan

A continuación se iniciará la descripción del diseño geométrico, que será punto de partida para la modulación y que es la base de esta investigación.

#### A. CONSTRUCCIÓN DEL PRIMER POLIGONO TRIANGULAR

De acuerdo a como lo indica la figura 3; constrúyase un cuarto de circunferencia de radio  $R_1$  en la cual se inscribe media circunferencia azul de radio  $R_2 = a=b$ ; en dicha circunferencia azul se inscribe un polígono triangular isósceles (dos lados iguales nombrados como  $R_2 = a=b$  y menores con respecto al tercer lado  $c$ ) generado por la revolución del radio  $R_2$  con un ángulo de  $2\beta_1$  en dirección de las manecillas del reloj. Los dos

ángulos menores e iguales del polígono triangular son llamados  $\beta_1$  cada uno, luego el tercer ángulo es  $180^\circ - 2\beta_1$ .

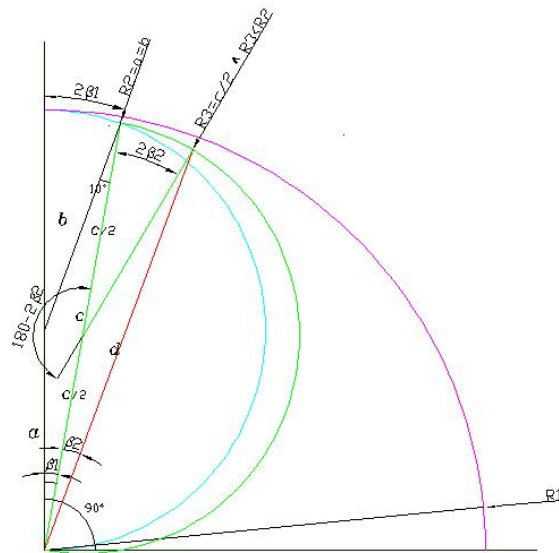


**Figura 3.**

**Construcción del primer polígono triangular**

**B. CONSTRUCCIÓN DEL SEGUNDO POLIGONO TRIANGULAR**

Si se analiza la figura 4, se encuentra que a partir del centro del lado mayor  $c$  del polígono triangular, se puede construir una segunda media circunferencia verde de radio  $R_3 = c/2 \wedge R_3 < R_2 = a = b$ ; en dicha circunferencia verde se inscribe un segundo polígono triangular isósceles (dos lados iguales nombrados como  $R_3 = c/2$  y menores con respecto al tercer lado  $d$ ) generado por la revolución del radio  $R_3$  con un ángulo de  $2\beta_2$  en dirección de las manecillas del reloj. Los dos ángulos menores e iguales del segundo polígono triangular son llamados  $\beta_2$  cada uno, luego el tercer ángulo es  $180^\circ - 2\beta_2$ .

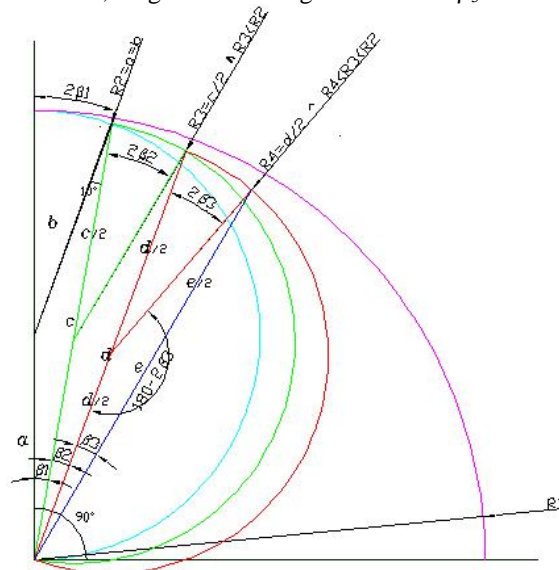


**Figura 4.**

**Construcción del segundo polígono triangular**

**C. CONSTRUCCIÓN DEL TERCER POLIGONO TRIANGULAR**

Si se analiza la figura 5, se encuentra que a partir del centro del lado mayor  $d$  del polígono triangular, se puede construir una tercera media circunferencia roja de radio  $R_4 = d/2 \wedge R_4 < R_3 < R_2 = a = b$ ; en dicha circunferencia roja se inscribe un tercer polígono triangular isósceles (dos lados iguales nombrados como  $R_4 = d/2$  y menores con respecto al tercer lado  $e$ ) generado por la revolución del radio  $R_4$  con un ángulo de  $2\beta_3$  en dirección de las manecillas del reloj. Los dos ángulos menores e iguales del tercer polígono triangular son llamados  $\beta_3$  cada uno, luego el tercer ángulo es  $180^\circ - 2\beta_3$ .

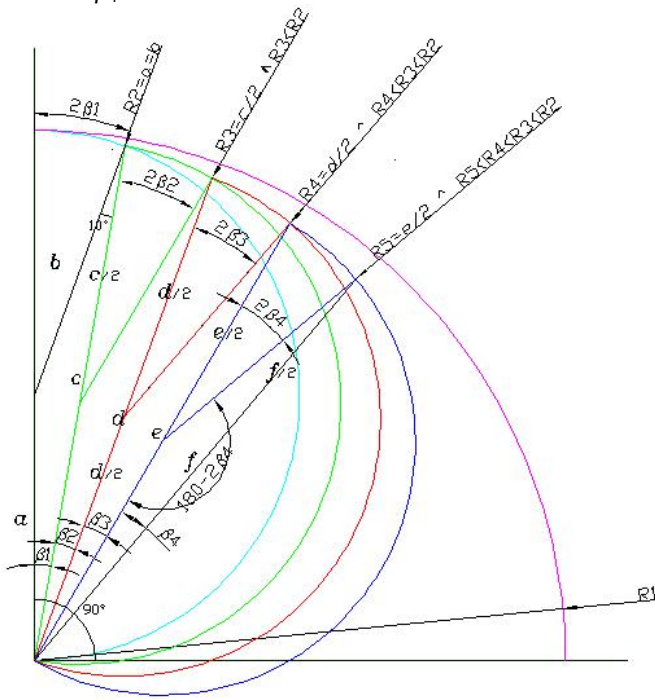


**Figura 5.**

**Construcción del tercer polígono triangular**

**D. CONSTRUCCIÓN DEL CUARTO POLIGONO TRIANGULAR**

Si se analiza la figura 6, se encuentra que a partir del centro del lado mayor  $e$  del polígono triangular, se puede construir una cuarta media circunferencia azul de radio  $R_5=e/2 \wedge R_5 < R_4 < R_3 < R_2 = a=b$ ; en dicha circunferencia azul se inscribe un cuarto polígono triangular isósceles (dos lados iguales nombrados como  $R_5=e/2$  y menores con respecto al tercer lado  $f$ ) generado por la revolución del radio  $R_5$  con un ángulo de  $2\beta_4$  en dirección de las manecillas del reloj. Los dos ángulos menores e iguales del cuarto polígono triangular son llamados  $\beta_4$  cada uno, luego el tercer ángulo es  $180^\circ - 2\beta_4$ .



**Figura 6.**  
**Construcción del cuarto polígono triangular**

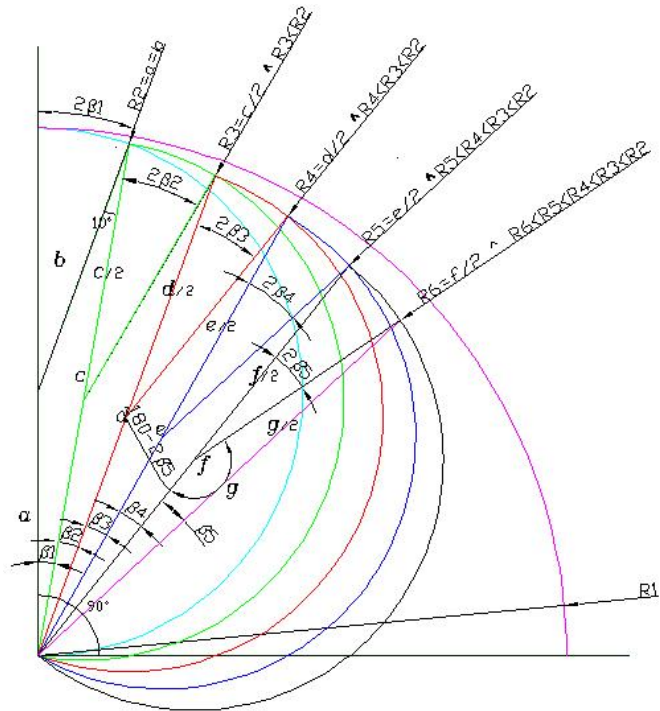
**E. CONSTRUCCIÓN DEL QUINTO POLIGONO TRIANGULAR**

Si se analiza la figura 7, se encuentra que a partir del centro del lado mayor  $f$  del polígono triangular, se puede construir una quinta media circunferencia negra de radio  $R_6=f/2 \wedge R_6 < R_5 < R_4 < R_3 < R_2 = a=b$ ; en dicha circunferencia negra se inscribe un quinto polígono triangular isósceles (dos lados iguales nombrados como  $R_6=f/2$  y menores con respecto al tercer lado  $g$ ) generado por la revolución del radio  $R_6$  con un ángulo de  $2\beta_5$  en dirección de las manecillas del reloj.

Los dos ángulos menores e iguales del quinto polígono triangular son llamados  $\beta_5$  cada uno, luego el tercer ángulo es  $180^\circ - 2\beta_5$ .

**F. CONSTRUCCIÓN DEL ENÉSIMO POLIGONO TRIANGULAR**

A partir del centro del lado mayor  $z_n$  del enésimo polígono triangular isósceles (los 2 lados menores  $c/u = z_n/2\cos\beta_n \leq z_n$ ); se puede construir una media circunferencia de radio denominado como  $Rz_n = z_n/2 \wedge Rz_n < Rz_{n-1} < Rz_{n-2} \dots Rz_{n-(n-3)} < Rz_{n-(n-2)} < Rz_1$ ; en dicha circunferencia se inscribe el enésimo más un polígono triangular isósceles "o"  $(n+1)$ -polígono (dos lados iguales nombrados como  $Rz_n = z_n/2$  y menores con respecto al tercer lado  $z_{n+1}$ ), generado por la revolución del radio  $Rz_n = z_n/2$  con un ángulo de  $2\beta_{n+1}$  en dirección de las manecillas del reloj. Los dos ángulos menores e iguales del enésimo más un polígono triangular son llamados  $\beta_{n+1}$  cada uno, luego el tercer ángulo es  $180^\circ - 2\beta_{n+1}$ .



**Figura 7.**  
**Construcción del quinto polígono triangular**

**G. SOBRE LOS ÁNGULOS**

Los ángulos menores que forman a cada polígono triangular isósceles son denominados:  
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots, \beta_{n-2}, \beta_{n-1}, \beta_n$  respectivamente

Los ángulos mayores que forman a cada polígono triangular isósceles son denominados:  
 $180^\circ - 2\beta_1, 180^\circ - 2\beta_2, 180^\circ - 2\beta_3, \dots, 180^\circ - 2\beta_n, 180^\circ - 2\beta_{n+1}$

El primer polígono triangular está conformado por los ángulos  $(\beta_1, \beta_1, 180^\circ - 2\beta_1)$

El segundo polígono triangular está conformado por los ángulos  $(\beta_2, \beta_2, 180^\circ - 2\beta_2)$ .

El enésimo polígono triangular está conformado por los ángulos  $(\beta_n, \beta_n, 180^\circ - 2\beta_n)$ .

Durante toda la modulación, es posible geometrizar todos los polígonos isósceles con iguales ángulos menores (no olvidar que cada polígono isósceles posee dos lados menores e iguales llamados  $\beta$  cada uno y un ángulo mayor denominado  $180^\circ - 2\beta$ ), luego:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 \dots \dots \beta_{n-2} = \beta_{n-1} = \beta_n$$

También es posible geometrizar los polígonos isósceles con ángulos diferentes entre sí, o iguales algunos y diferentes a otros:

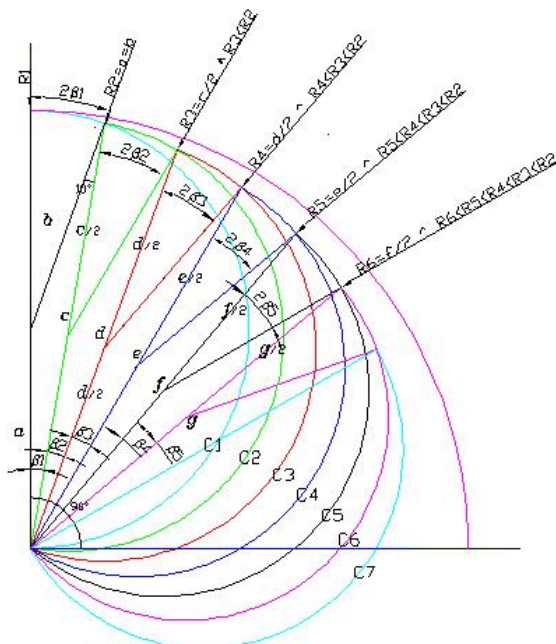
$$\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_4 \dots \dots \beta_{n-2} \neq \beta_{n-1} \neq \beta_n$$

Por esta razón las longitudes de los radios  $R_2=a=b, R_3=c, R_4=d, R_5=e, R_6=f, \dots, R_{27}=z, R_{Zn-(n-2)}, R_{Zn-(n-3)}, \dots, R_{Zn-2}, R_{Zn-1}, R_{Zn}$ , respectivamente generadas por la revolución de los mismos; dependerá de los ángulos,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \dots \beta_{n-2}, \beta_{n-1}, \beta_n$  respectivamente.

### V. CONCLUSIONES

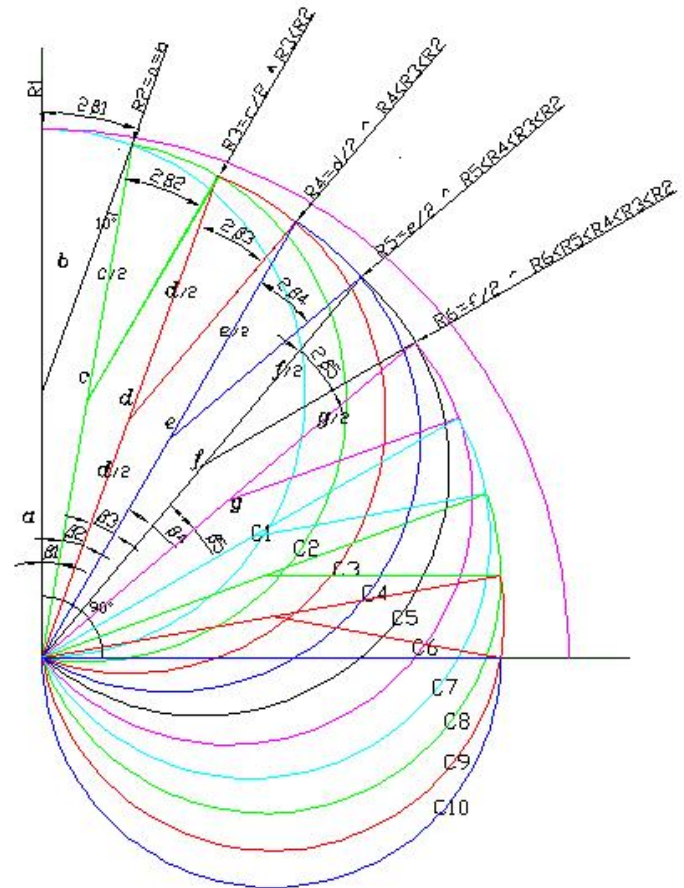
- Cuando cada polígono triangular isósceles durante la geometrización posee iguales ángulos menores, de tal manera que  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 \dots \dots \beta_{n-2} = \beta_{n-1} = \beta_n$ ; se forman una serie de medias circunferencias que seccionan el cuarto de circunferencia de radio  $R_1$ , generando una serie de longitudes.
- El ángulo  $\beta_1$  formará la media circunferencia  $C_2$   
El ángulo  $\beta_n$  formará la media circunferencia  $C_{n+1}$

(Ver figura 8)



**Figura 8.**  
**Nominación de las medias circunferencias**

- En el primer cuarto de circunferencia de radio  $R_1$  es posible encontrar  $90^\circ/\beta$  polígonos triangulares isósceles ( $N_{POLIGONOS} = 90^\circ/\beta$ ), de manera completa, siempre y cuando el ángulo  $\beta = \angle$  divisor comprendido entre  $[0^\circ \ 90^\circ] \wedge \beta \leq 45^\circ$ ; además los ángulos menores de cada polígono triangular isósceles deben garantizar la igualdad  $(\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 \dots \dots \beta_{n-2} = \beta_{n-1} = \beta_n)$



**Figura 9.**

**Polígonos triangulares en el interior del cuarto de circunferencia de radio  $R_1$ .**

En el caso de esta figura, se utilizó un  $\beta = 10^\circ$ , luego  $N_{POLIGONOS} = 90^\circ/\beta$  polígonos triangulares isósceles, equivalen de manera completa a  $90^\circ/10^\circ$  "o"  $N_{POLIGONOS} = 9$  polígonos triangulares dentro del cuarto de circunferencia formado por  $R_1$ .

- Cuando se geometriza cada polígono triangular isósceles (dos ángulos menores e iguales llamados  $\beta$  con respecto al tercer ángulo) con diferentes ángulos  $\beta$  respectivamente, de tal manera que  $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_4 \dots \beta_{n-2} \neq \beta_{n-1} \neq \beta_n$ ; se forman una serie de medias circunferencias que seccionan el cuarto

de circunferencia de radio  $R_1$ , generando una serie de longitudes que aparentemente no tienen una razón.

- Existe una relación entre la vertical trazada en el primer polígono isósceles inscrito en la primera media circunferencia  $C_1$  que generó la revolución del radio  $R_2$ ; con respecto a el corte que suscitó la segunda media circunferencia  $C_2$  con el radio  $R_1$ ; esa relación es sucesiva, puesto que se repite continuamente la intersección de una vertical trazada desde el  $n$ -polígono isósceles inscrito en la  $n$ -media circunferencia  $C_n$  generada por la revolución del radio,  $R_{z_{n+1}}$ ; con la  $(n+1)$ media circunferencia  $C_{n+1}$  que corta conjuntamente (vertical, radio  $R_1$  y media circunferencia  $C_{n+1}$ ) el radio  $R_1$  ver figuras 10 y 11

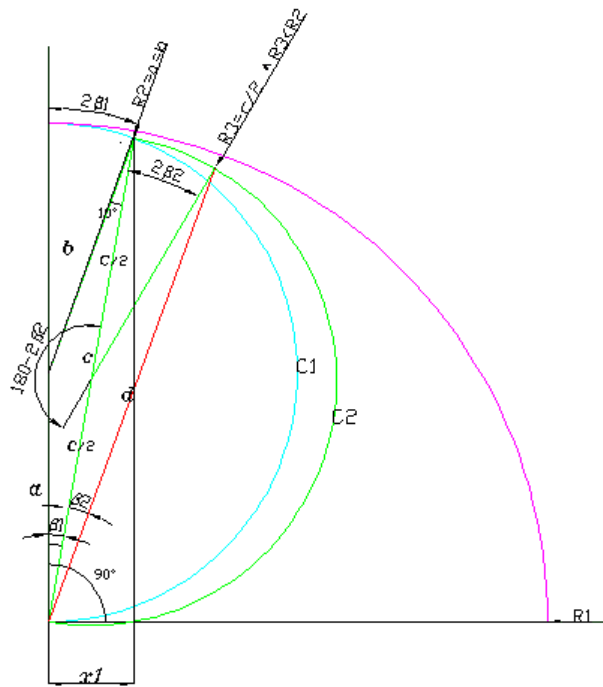


Figura 10.

Distancia  $x_1$  generada por relación entre la vertical trazada en el primer polígono isósceles inscrito en la primera media circunferencia  $C_1$ ; con respecto a el corte que suscitó la segunda media circunferencia  $C_2$  con el radio  $R_1$

- La relación sucesiva (vertical del  $n$ -polígono inscrito en  $C_n$ , radio  $R_1$  y media circunferencia  $C_{n+1}$ ) se ve plasmada en la siguiente ecuación, que es la síntesis de las sumatorias de cada sector generado por la intersección.

$$\sum_{i=1}^n \frac{2^{(i-3)/2} az^{i/2} \sin(i\beta) - 2^{(i-2)/2} az^{(i-1)/2} \sin[(i-1)\beta]}{2^{(2i-5)/2}} = \frac{az^{n/2} \sin(n\beta)}{2^{(n-2)/2}} \quad z = [1 - \cos(180^\circ - 2\beta)]$$

$a$  = Radio del primer polígono triangular

$\beta$  =  $\angle$  Divisor comprendido entre  $[0^\circ \ 90^\circ] \wedge \beta \leq 45^\circ$

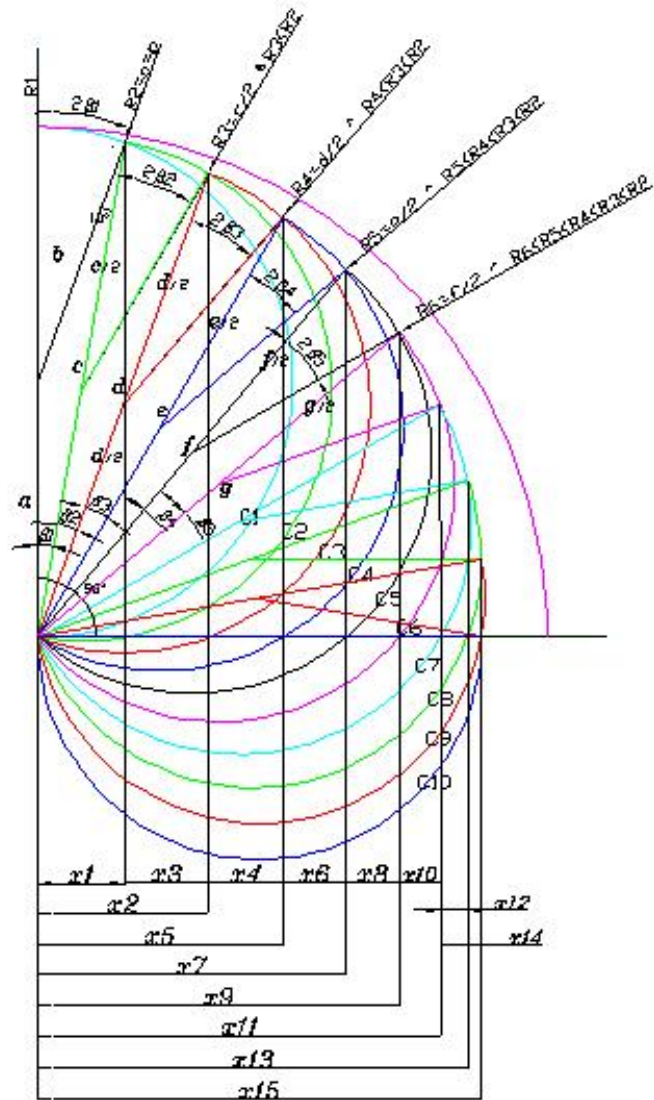


Figura 11.

Distancias de  $x_1$  a  $x_{14}$  generadas por el corte entre las verticales trazadas en los nueve primeros polígonos isósceles; con respecto a las medias circunferencias  $C_1$  a  $C_9$  y el radio  $R_1$



- Los resultados iniciales de esta investigación, desde el punto de vista geométrico han contribuido con la construcción de caracoles y geometrización de letras.

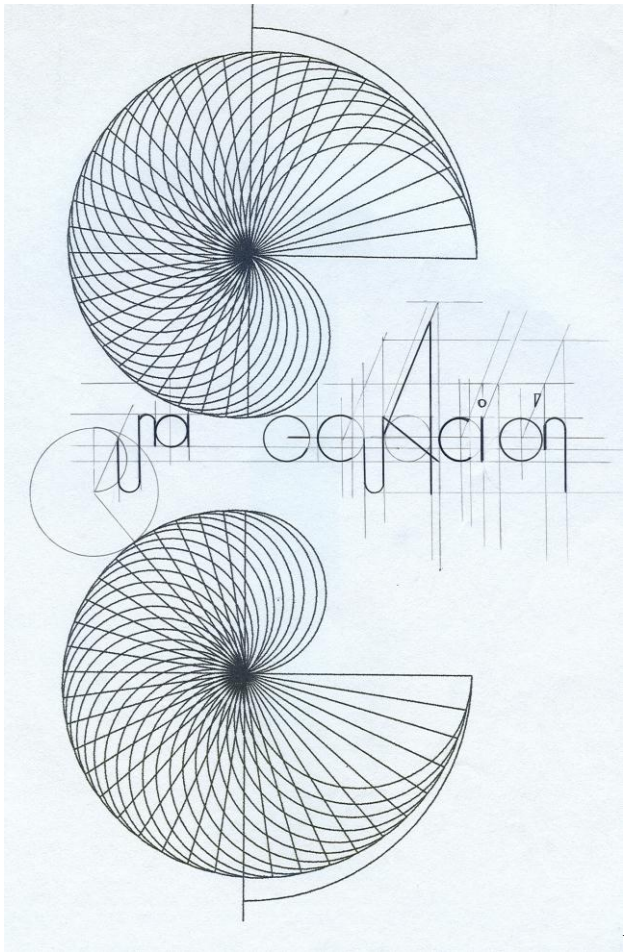
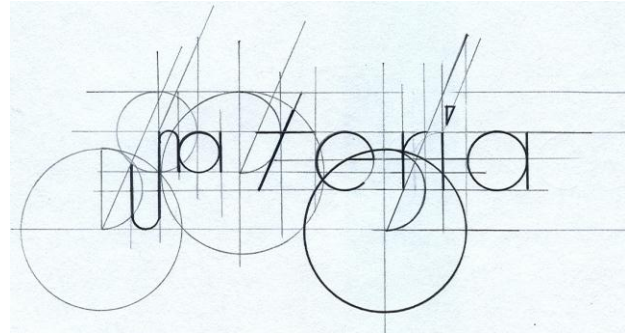


figura 12.

**Construcción de caracoles siguiendo los parámetros de geometrización establecidos**

- La próxima etapa de la investigación buscará:
  - a. aplicaciones y conclusiones de la ecuación anteriormente descrita; con respecto a la proporción aurea.
  - b. Lecturas correlacionadas entre el hombre de Vitruvio, la relación aurea y el modelo propuesto.
  - c. Mostrar en un reporte de investigación, donde se visualice la demostración inductiva matemática de la ecuación anteriormente mostrada.

- d. Modelar en LabView una aplicación para obtener la relación sucesiva (vertical del  $n$ -polígono inscrito en  $C_n$ , radio  $R_1$  y media circunferencia  $C_{n+1}$ ) en la ecuación visualizada anteriormente, y que es la síntesis de las sumatorias de cada sector generado por la intersección.



Figur

a 13.

**Construcción de letras por medio de la modulación geométrica siguiendo los parámetros de geometrización establecidos**

#### REFERENCIAS

- [1] **CARRERA, J.**, "Las matemáticas una historia de sus conceptos", pp. 11-34, Barcelona (1984)
- [2]. **REYES E., RIO P.**, Estudio y desarrollo geométrico del Modulor de Le Corbusier, VIII JAEM, (1997).
- [3]. **SPINADEL, V.**, "The Metallic Means and Design", en *Kim Williams (Ed.) Nexus II, Architecture and Mathematic*, Edizioni dell'Erba, Florencia. (1998).
- [4]. **SPINADEL, V.**, "The metallic means family and multifractal spectra, *Nonlinear Analysis*" 36, pp 721-745, (1999).
- [5]. **REDONDO A., DELICADO J.**, "Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci" pp. 53-63. Albacete. Noviembre (2005).
- [6]. **FINCH, S. R.**, "The Golden Mean." *Mathematical Constants*. Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 5-12, 2003.