

Área del paralelogramo y áreas relacionadas

Area of the parallelogram and related areas

Campo Elias Gonzalez Pineda, Sandra Milena Garcia
 Faculta de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológico de Pereira, Pereira, Colombia
 cegp@utp.edu.co
 tazyotas@utp.edu.co

Resumen— El área del paralelogramo tiene consecuencia interesantes en relación con algunas de figura inscrita en él y en triángulos. En este artículo mostramos algunas de esas relaciones especiales.

Palabras Claves— paralelogramo, triángulo, cuadrilátero, área

Abstract— The area of the parallelogram has interesting consequences in relation to some of ye entered in the triangles. In this article we show some of these special relationships

Keywords— Parallelogram, triangle, quadrilateral, area.

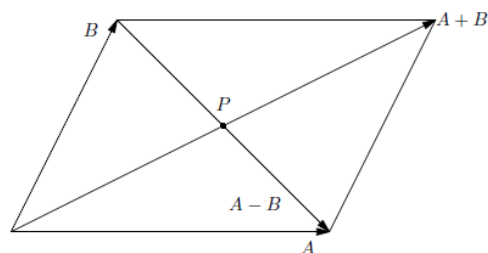
I. INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiamos algunas consecuencias que se derivan del área del paralelogramo en relación con el área de algunas figuras planas. Sean A, B puntos de R^n . El vector dirigido con punto inicial A y final B lo denotamos \overline{AB} , además $\overline{AB} = B - A$. El vector nulo o cero lo denotamos O . En este artículo utilizamos el producto interno usual de R^n . Cuando hablemos del vector o lado A debe entenderse un vector dirigido y no un punto. La expresión L.I significa linealmente independiente.

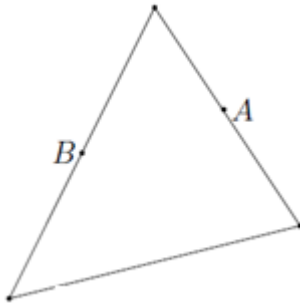
El resultado básico viene dado por:

Teorema 1. El área del paralelogramo de lados A, B viene dada por

$$S = \sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2} \tag{1}$$



La justificación de este resultado puede consultarse en cualquier libro de álgebra vectorial ver [10]. Se deduce entonces que el área de triángulo de lados A y B viene dada por



$$A_{\Delta} = \frac{\sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2}}{2}$$

II. CONTENIDO.

A. **Resultado básico.** Consideremos dos vectores no nulos de \mathbb{R}^n y vectores X, Y que satisfacen la relación (por comodidad $\|X\| = X^2, \|Y\| = Y^2$)

$$X = aA + bB$$

$$Y = cA + dB$$

Entonces,

$$X^2 = a^2A^2 + 2ab A \cdot B + b^2B^2$$

$$Y^2 = c^2A^2 + 2cd A \cdot B + d^2B^2$$

$$\begin{aligned} X^2Y^2 &= a^2c^2A^4 + 2abc^2(A \cdot B)A^2 + b^2c^2A^2B^2 \\ &\quad + 2cda^2(A \cdot B)A^2 + 4abcd(A \cdot B)^2 \\ &\quad + 2cda^2(A \cdot B)B^2 + 2abd^2(A \cdot B)B^2 + b^2d^2B^4 \end{aligned}$$

De otro lado:

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= acA^2 + (ad + cb)(A \cdot B) + bdB^2 \\ (X \cdot Y)^2 &= a^2c^2A^4 + (ad + cb)^2(A \cdot B)^2 + b^2d^2B^4 \\ &\quad + 2ac(ad + bc)(A \cdot B)A^2 + 2abcdA^2B^2 \\ &\quad + 2bd(ad + bc)(A \cdot B)B^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$X^2Y^2 - (X \cdot Y)^2 = (ad - bc)^2(A^2B^2 - (A \cdot B)^2)$$

En términos de norma tenemos

$$\|X\|^2\|Y\|^2 - (X \cdot Y)^2 = (ad - bc)^2(\|A\|^2\|B\|^2 - (A \cdot B)^2) \quad (2)$$

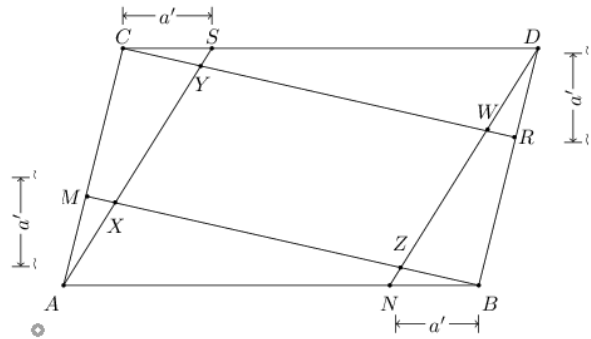
Para denotar el área de un polígono de vértices (o n lados) digamos a_1, a_2, \dots, a_n escribimos $A_{a_1a_2\dots a_n}$

En términos de área la fórmula (2) se escribe

$$A_{XY} = |ad - bc|A_{AB}$$

A la expresión $K=ad - bc$ la llamamos determinante de la relación de áreas.

B. Consideremos el paralelogramo de vértices ABDC



Donde $\overline{CS} = a\overline{CD}, \overline{DR} = a\overline{DB}, \overline{BN} = a\overline{BA}, \overline{AM} = a\overline{AC}$ donde $0 < a < 1$. Es fácil comprobar que el cuadrilátero de vértices X, Y, W, Z es un paralelogramo (ver[10]) y además

$$\begin{aligned} \overline{XY} &= \frac{1-a}{1+a^2} \overline{AC} + \frac{a(1-a)}{1+a^2} \overline{AB} \\ \overline{XZ} &= -\frac{a(1-a)}{1+a^2} \overline{AC} + \frac{1-a}{1+a^2} \overline{AB} \end{aligned}$$

Calculando el determinante de las áreas vemos que

$$ad - bc = \frac{(1-a)^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2(1-a)^2}{(1+a^2)^2} = \frac{(1-a)^2}{1+a^2}$$

Es decir,

$$A_{XYZW} = \frac{(1-a)^2}{1+a^2} A_{ABDC}$$

En particular si $a = \frac{1}{2}$ la relación es $\frac{1}{5}$.

Si hacemos $\overline{CS} = b\overline{CD}$, $\overline{DR} = a\overline{DE}$, $\overline{BN} = b\overline{BA}$,

$\overline{AM} = a\overline{AC}$ donde $0 < a, b < 1$. Encontramos

$$X = A + \frac{a}{1+ab}\overline{AC} + \frac{ab}{1+ab}\overline{AB}$$

$$Y = A + \frac{1}{1+ab}\overline{AC} + \frac{b}{1+ab}\overline{AB}$$

$$Z = D - \frac{a+1}{1+ab}\overline{AC} - \frac{b}{1+ab}\overline{AB}$$

$$W = D - \frac{a}{1+ab}\overline{AC} - \frac{ab}{1+ab}\overline{AB}$$

Vemos que estos cuatro puntos son los vértices de un paralelogramo. Además,

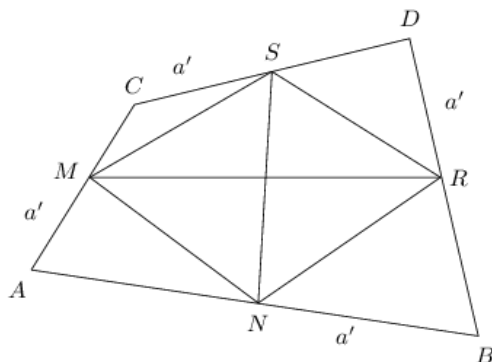
$$\overline{XZ} = \frac{a(b-1)}{1+ab}\overline{AC} + \frac{1-b}{1+ab}\overline{AB}$$

$$\overline{XY} = \frac{1-a}{1+ab}\overline{AC} + \frac{b(1-a)}{1+ab}\overline{AB}$$

De donde

$$A_{XYZW} = \frac{(1-a)(1-b)}{1+ab} A_{ABDC}$$

C. Consideremos el cuadrilátero de vértices ABDC como se indica en la figura:



Donde $\overline{CS} = a\overline{CD}$, $\overline{DR} = a\overline{DE}$,

$\overline{BN} = a\overline{BA}$, $\overline{AM} = a\overline{AC}$ donde $0 < a < 1$ Es fácil ver

que

$$\overline{MR} = (1-a)\overline{AD} - a\overline{BC}$$

$$\overline{NS} = a\overline{AD} + (1-a)\overline{BC}$$

Calculando el discriminante tenemos

$$ad - bc = (1-a)^2 + a^2$$

En conclusión

$$A_{MNRS} = [(1-a)^2 + a^2]A_{ABDC}$$

En particular si $a = \frac{1}{2}$ la relación de las áreas es $\frac{1}{2}$. Si hacemos

$\overline{CS} = b\overline{CD}$, $\overline{DR} = a\overline{DE}$, $\overline{BN} = b\overline{BA}$, $\overline{AM} = a\overline{AC}$ donde

$$0 < a, b < 1$$

Y por un procedimiento similar encontramos

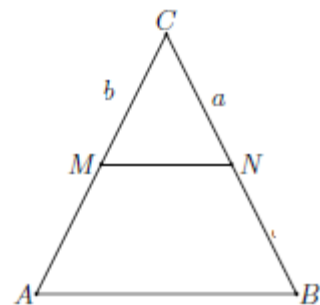
$$\overline{MR} = (1-a)\overline{AD} - a\overline{BC}$$

$$\overline{SN} = -b\overline{AD} + (1-b)\overline{BC}$$

Por lo que

$$A_{MNRS} = [(1-a)(1-b) + ab]A_{ABDC}$$

D. Consideremos el triángulo de la figura



Donde

$$\overline{CM} = t\overline{AC} \rightarrow \|\overline{AM}\| = t\|\overline{AC}\| = a$$

$$\overline{AN} = r\overline{AC} \rightarrow \|\overline{AN}\| = t\|\overline{AC}\| = b$$

Luego,

$$A_{AMN} = \frac{\sqrt{\|\overline{AM}\|^2 \|\overline{AN}\|^2 - (\overline{AM} \cdot \overline{AN})^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{t^2 \|\overline{AB}\|^2 r^2 \|\overline{AC}\|^2 - (t\overline{AB} \cdot r\overline{AC})^2}}{2}$$

$$= tr A_{ABC}$$

Si hacemos $\|\overline{AB}\| = l_1, \|\overline{AC}\| = l_2$ podemos

escribir

$$A_{AMN} = \frac{ab}{l_1 l_2} A_{ABC}$$

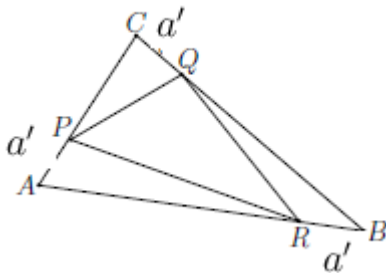
5. Consideremos el triángulo $\triangle ABC$ de la figura y

hagamos

$$\overline{AP} = t\overline{AC} \rightarrow P = A + t\overline{AC}$$

$$\overline{BR} = r\overline{BA} \rightarrow R = B + r\overline{BA}$$

$$\overline{CQ} = l\overline{CB} \rightarrow Q = C + l\overline{CB}$$



Ahora.

$$\overline{PQ} = Q - P = C + l\overline{CB} - A - t\overline{AC}$$

$$= (1 - t)\overline{AC} + l\overline{CB}$$

$$\overline{PR} = R - P = B + r\overline{BA} - A - t\overline{AC}$$

$$= (1 - r)\overline{AB} + t\overline{AC}$$

Pero, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ es decir, $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$

Luego,

$$\overline{PR} = (1 - r - t)\overline{AC} - (1 - r)\overline{CB}$$

En resumen,

$$\overline{PQ} = (1 - t)\overline{AC} + l\overline{CB}$$

$$\overline{PR} = (1 - r - t)\overline{AC} + (1 - r)\overline{CB}$$

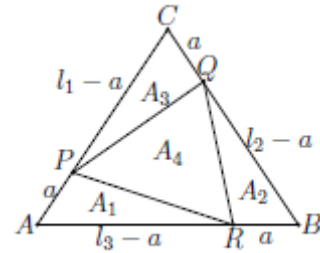
En este caso el determinante de las áreas es:

$$(1 - t)(1 - r) - l(1 - r - t)$$

Haciendo $l = \frac{a}{l_2}, r = \frac{a}{l_3}, t = \frac{a}{l_1}$ obtenemos

$$A_{PQR} = \left(\left(\frac{1}{l_1 l_2} + \frac{1}{l_1 l_3} + \frac{1}{l_2 l_3} \right) a^2 - \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) a + 1 \right) A_{ABC}$$

6. Resolvamos el problema anterior mediante sumas de áreas. Consideremos el triángulo como se ilustra en la figura.



Hagamos

$$a(A_1) = \frac{a}{l_1} \frac{l_2 - a}{l_3} A_{ABC}$$

$$a(A_2) = \frac{a}{l_3} \frac{l_2 - a}{l_2} a(\triangle ABC)$$

$$a(A_3) = \frac{a}{l_2} \frac{l_1 - a}{l_1} a(\triangle ABC)$$

Es claro que

$$a(A_1) + a(A_2) + a(A_3) + a(A_4) = a(\triangle ABC)$$

Por lo que

$$a(A_4) = A_{ABC} - \left[\frac{a}{l_1} \frac{l_2 - a}{l_3} + \frac{a}{l_3} \frac{l_2 - a}{l_2} + \frac{a}{l_2} \frac{l_1 - a}{l_1} \right] A_{ABC}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{a}{l_1} \left(1 - \frac{a}{l_3} \right) + \frac{a}{l_3} \left(1 - \frac{a}{l_2} \right) + \frac{a}{l_2} \left(1 - \frac{a}{l_1} \right) \right) \right] A_{ABC}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{l_1 l_2} + \frac{1}{l_1 l_3} + \frac{1}{l_2 l_3} \right) a^2 - \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) a + 1 \right) A_{ABC}$$

7. El caso general del ejemplo anterior, viene dado por

$$\alpha(A_1) = \frac{a l_2 - c}{l_1 l_3} A_{ABC}$$

$$\alpha(A_2) = \frac{c l_2 - b}{l_3 l_2} A_{ABC}$$

$$\alpha(A_3) = \frac{b l_1 - a}{l_2 l_1} A_{ABC}$$

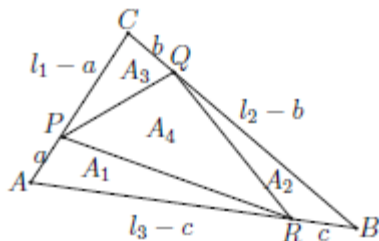
Como

$$\alpha(A_1) + \alpha(A_2) + \alpha(A_3) + \alpha(A_4) = A_{ABC}$$

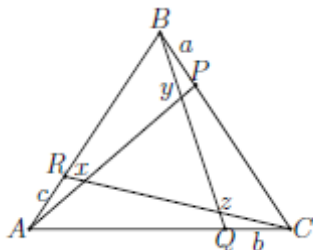
Entonces,

$$\alpha(A_4) = \left[1 - \left(\frac{a}{l_1} \left(1 - \frac{c}{l_3} \right) + \frac{c}{l_3} \left(1 - \frac{b}{l_2} \right) \right) \right] A_{ABC} \text{ o}$$

$$\alpha(A_4) = \left[1 - \left(\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_2} + \frac{c}{l_3} \right) + \left(\frac{ab}{l_1 l_2} + \frac{ac}{l_1 l_3} + \frac{bc}{l_2 l_3} \right) \right] A_{ABC}$$



8. Por último consideremos el triángulo como ilustra



la figura.

$$X = A + t\overline{AP} = A + t\overline{AB} + ta\overline{BC}$$

$$X = A + r\overline{CR} = A + r\overline{CA} + rc\overline{AB}$$

Iguando y reordenando los términos tenemos

$$(1-r)\overline{CA} + (t-rc)\overline{AB} + ta\overline{BC} = 0$$

Como $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$, encontramos

$$(1-r-ta)\overline{CA} + (t-rc-at)\overline{AB} = 0$$

Como \overline{CA} y \overline{AB} son *L.I* tenemos que

$$\begin{cases} 1-r-ta = 0 \\ t-rc-at = 0 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos

$$t = \frac{c}{1-a-ac}, r = \frac{1-a}{1-a-ac}$$

De igual forma

$$Y = A + m\overline{AP} = A + m\overline{AB} + ma\overline{BC}$$

$$Y = B + n\overline{BQ} = B + n\overline{BC} + nb\overline{CA}$$

Iguando encontramos

$$(m-1)\overline{AB} + (ma-n)\overline{BC} - nb\overline{CA} = 0$$

Pero $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = -\overline{CA}$, reemplazando

$$(m-1+nb)\overline{AB} + (ma-n+nb)\overline{BC} = 0$$

Como \overline{AB} y \overline{BC} son *L.I* debe ser que

$$m-1+nb = 0$$

$$ma-n+nb = 0$$

Resolviendo tenemos,

$$n = \frac{a}{ab+1-b}, m = \frac{1-b}{ab+1-b}$$

Encontremos ahora a *Z*. Notemos que

$$Z = C + p\overline{CR} = C + p\overline{CA} + pc\overline{AB}$$

$$Z = B + q\overline{BQ} = B + q\overline{BC} + qb\overline{CA}$$

Iguando encontramos

$$(1 - q)\overline{BC} + (p - qb)\overline{CA} + pc\overline{AB} = 0$$

Pero

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = -\overline{CA} \rightarrow \overline{AB} = -\overline{CA} - \overline{BC}.$$

Tenemos que

$$(1 - q - pc)\overline{BC} + (p - qb - pc)\overline{CA} = 0.$$

Como \overline{BC} y \overline{CA} son *L.I* tenemos

$$1 - q - pc = 0$$

$$p - qb - pc = 0$$

Resolviendo,

$$p = \frac{b}{1 + bc - c} \quad q = \frac{1 - c}{1 + bc - c}$$

EN RESUMEN TENEMOS,

$$X = A + \frac{c}{1 - a + ac}\overline{AB} + \frac{ac}{1 - a + ac}\overline{BC}$$

$$Y = A + \frac{1 - b}{ab - b + 1}\overline{AB} + \frac{a(1 - b)}{ab - b + 1}\overline{BC}$$

$$Z = C + \frac{b}{1 + bc - c}\overline{CA} + \frac{bc}{1 + bc - c}\overline{BC}$$

AHORA,

$$\overline{XY} = \left(\frac{1 - b}{ab - b + 1} - \frac{c}{1 - a + ac} \right) \overline{AB} + \left(\frac{a(1 - b)}{ab - b + 1} - \frac{ac}{1 - a + ac} \right) \overline{BC}$$

$$\overline{XZ} = \left(1 + \frac{bc - b}{1 - bc + c} - \frac{c}{1 - a + ac} \right) \overline{AB} + \left(1 - \frac{b}{1 + bc - c} - \frac{ac}{1 - a + ac} \right) \overline{BC}$$

DEL RESULTADO ANTERIOR TENEMOS

$$A_{XYZ} = K A_{ABC}$$

DONDE,

$$K = \left(\frac{1 - b}{ab - b + 1} - \frac{c}{1 - a + ac} \right) \left(1 - \frac{b}{1 + bc - c} - \frac{ac}{1 - a + ac} \right) - \left(1 + \frac{bc - b}{1 - bc + c} - \frac{c}{1 - a + ac} \right) \left(\frac{a(1 - b)}{ab - b + 1} - \frac{ac}{1 - a + ac} \right)$$

COMO CASO PARTICULAR $a = b = c$.

$$\overline{XY} = \frac{1 - 2a}{a^2 - a + 1} \overline{AB} + \frac{a - 2a^2}{a^2 - a + 1} \overline{BC}$$

$$\overline{XZ} = \frac{(a - 1)(2a - 1)}{a^2 - a + 1} \overline{AB} + \frac{1 - 2a}{a^2 - a + 1} \overline{BC}$$

VEMOS,

$$K = \frac{(1 - 2a)^2}{a^2 - a + 1}$$

III. CONCLUSIONES

El área del paralelogramo permite encontrar ciertas áreas relacionadas de una manera relativamente fácil. Pueden encontrarse otras relaciones interesantes utilizando los vectores en la geometría euclidiana, ver [10].

REFERENCIAS

- [1]. JUAN A. VIEDMA. introducción a la geometría analítica. editorial norma 1962
- [2]. AGUSTÍN ANFOSSI. geometría analítica. editorial progreso. 1949
- [3]. PAUL. R. RIDER. geometría analítica. Montaner y Simón. 1962
- [4]. CHARLES WEXLER. geometría analítica. un enfoque vectorial. montaner y simon. 1968
- [5]. CHARLES H. LEHMANN. geometría analítica. unión tipográfica hispano americana. 1968
- [6]. APOSTOL M. TOM. calculus vol .I. edit reverté 1973
- [7]. EDGAR OBONAGA, JORGE A. PÉREZ, VÍCTOR E. CASTRO. matemática 3, 4 álgebra y geometría. pime editores. 1984
- [8]. EDGAR OBONAGA, JORGE A. PÉREZ, VÍCTOR E. CASTRO. matemática 5 trigonometrías y geometría analítica. pime editores. 1984
- [9]. NIETO RUBÉN DARÍO, algebra vectorial. universidad del valle 1997
- [10]. CAMPO ELÍAS GONZÁLEZ PINEDA. geometría vectorial. Universidad Tecnológica de Pereira 2009.