

Balanceo y Estabilización del Péndulo Invertido Empleando Redes Neuronales Artificiales y un Regulador Lineal Óptimo con Criterio Cuadrático (LQR)

Swing Up and Stabilization of Inverted Pendulum Using Artificial Neural Networks and Optimal Linear Regulator with quadratic criterion (LQR)

Oscar Danilo Montoya Giraldo, Juan Guillermo Valenzuela Hernández, Didier Giraldo Buitrago

Ingeniería eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

odmontoya@utp.edu.co

jgvalenzuela@utp.edu.co

dgiraldo@utp.edu.co

Resumen— En este artículo se presenta el desarrollo de un controlador para el péndulo invertido, basado en realimentación de las variables de estado para la zona de equilibrio a partir de un regulador lineal óptimo con criterio cuadrático y un modelo de energía como esquema de aprendizaje para la implementación de un control inteligente empleando redes neuronales artificiales a través del modelo inverso. Se presenta la integración de los controladores y las pruebas realizadas para el balanceo y la estabilización del sistema físico.

Palabras clave— Control inteligente, Péndulo invertido, Redes neuronales artificiales, Regulador lineal óptimo con criterio cuadrático.

Abstract— This paper presents the development of a state variable feedback controller to inverted pendulum for the equilibrium zone Using a linear quadratic regulator and a model of energy and learning scheme for implementing intelligent control using artificial neural networks through the inverse model. It is presented the integration of the controllers and testing drivers for balancing and stabilizing of the physical system.

Key Word — Intelligent control, inverted pendulum, artificial neural networks, optimal linear regulator with quadratic criterion

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de controladores es una constante en el mundo de la investigación científica, máxime cuando el crecimiento económico de los países junto con la globalización de los mercados son los motores que impulsan en gran medida avance de las empresas, haciendo necesaria la expansión y automatización de los procesos industriales, con el fin de lograr competitividad y así

enfrentar en forma adecuada los retos que impone el crecimiento socioeconómico de los países [7].

Así pues, desarrollar controladores que operen adecuadamente ante sistemas físicos lineales y no lineales, presentes en los procesos productivos, es un reto al cual todo investigador está abocado, más cuando se pretende realizar una integración de la industria con el mundo académico, y de esta forma lograr desarrollos e investigaciones que vayan en pro del avance de la industria, la academia y el país.

La razón por la cual el sistema físico péndulo invertido es tan empleado por los investigadores para probar y desarrollar controladores, es su dinámica no lineal, que permite comprender los fenómenos y comportamientos físicos de plantas y equipos presentes en el mundo industrial y que son de características similares, como es el caso del sector de transportes, las telecomunicaciones y la aeronáutica, entre otros; con lo que los controladores desarrollados para los sistemas pendulares son fácilmente adaptables a este tipo de sistemas físicos [1-2] [5].

En la sección II de este artículo se presenta una descripción general del péndulo invertido y se realiza el modelado global del sistema físico empleando la mecánica de Newton. En la sección III se desarrolla un controlador para la estabilización en la zona de equilibrio utilizando regulador lineal óptimo con criterio cuadrático. En la sección IV se describe modelo simplificado basado en funciones de energía para obtener el balanceo del péndulo invertido. En la sección V se presenta la red neuronal artificial y un modelo inverso como alternativa de control para el “swing up”. En la sección VI se presenta la integración del controlador inteligente y el controlador para la zona de equilibrio. En la sección VII se presentan las simulaciones y pruebas realizadas al modelo representativo del péndulo invertido.

II. MODELO MATEMÁTICO PARA EL PÉNDULO INVERTIDO

A. Descripción del sistema físico

El sistema físico conocido como péndulo invertido simple hace parte del conjunto de sistemas dinámicos pendulares que han sido estudiados desde la década de los 60's, por sus características no lineales que imponen un desafío notable para las técnicas clásicas de control. De la familia de sistemas pendulares que han sido objeto de múltiples investigaciones se pueden destacar los siguientes modelos: péndulo invertido, péndulo de Furuta, péndulo con rueda de reacción y pendubot [1] [7].

Sin embargo, el desarrollo de este sistema de control será realizado usando como sistema dinámico al péndulo invertido, que se compone de un vehículo (carro) que tiene la función de balancear el péndulo, el cual puede moverse en única dimensión y cuyo movimiento está gobernado por un motor DC (actuador) localizado en uno de los extremos de la barra horizontal y que está adherido al carro por medio de un engranaje y una banda de conexión. Sujeto al vehículo se encuentra la barra pendular que en estado de reposo se encuentra en la posición vertical inferior y que se conoce como estado natural. La figura 1 muestra en forma gráfica el sistema físico péndulo invertido [6].

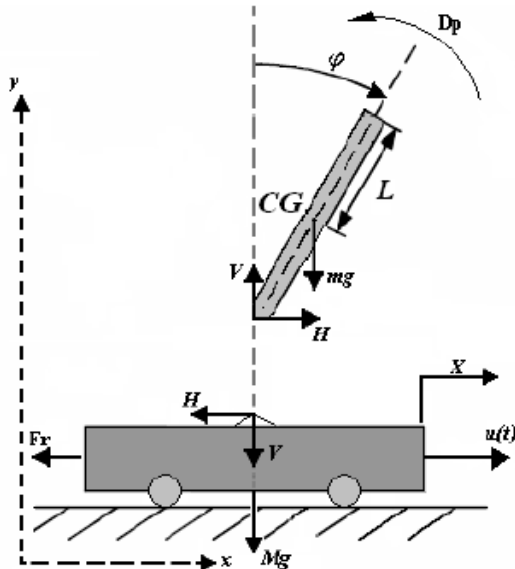


Figura 1. Representación del sistema dinámico péndulo invertido simple.

La figura 1 muestra el diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido con sus respectivas variables y parámetros asociados a la dinámica del sistema.

B. Modelado matemático de la planta

El modelo matemático del sistema péndulo invertido se obtiene a través de la aplicación de la segunda ley de

Newton a cada uno de los elementos que componen el sistema (carro y péndulo) y la suma de momentos en el punto de apoyo o conexión; con lo que se tiene el conjunto de ecuaciones (1)-(4) que describen la dinámica del sistema:

$$H = u - F_r - M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1)$$

$$H = m \frac{d^2}{dt^2} (x + L \sin \varphi) \quad (2)$$

$$V = mg + m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \varphi) \quad (3)$$

$$VL \sin \varphi - HL \cos \varphi - D_p = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (4)$$

Donde:

Parámetro	Descripción
M	Masa del carro
m	Masa de la barra
L	Longitud desde el apoyo hasta el centroide de la barra
J	Momento de inercia de la barra
F_r	Fricción de los rodamientos del carro ($F_r = f_c \dot{x}$)
D_p	Fricción rotacional de la barra ($D_p = f_p \dot{\varphi}$)

Tabla 1. Parámetros físicos del péndulo de Furuta.

Eliminando las fuerzas de reacción H y V y haciendo las respectivas derivadas, se obtienen las ecuaciones (5) y (6) que corresponden al modelo no lineal del péndulo invertido [6].

$$mgL \sin \varphi - (J + ML^2) \ddot{\varphi} - mL\ddot{x} \cos \varphi + f_p \dot{\varphi} = 0 \quad (5)$$

$$(M + m) \ddot{x} + mL\ddot{\varphi} \cos \varphi - mL\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + f_c \dot{x} = u \quad (6)$$

C. Linealización del modelo alrededor del punto de operación

Considerando que en la región próxima a la posición vertical superior o punto de equilibrio inestable, el modelo dinámico presentado en (5) y (6) puede ser linealizado bajo las siguientes consideraciones:

$$\cos \varphi \approx 1, \sin \varphi \approx \varphi, \dot{\varphi}^2 \approx 0$$

El conjunto de ecuaciones (7) y (8) representa el modelo matemático linealizado del péndulo invertido [6].

$$(J + ML^2) \ddot{\varphi} + mL\ddot{x} - f_p \dot{\varphi} - mgL\varphi = 0 \quad (7)$$

$$(M + m) \ddot{x} + mL\ddot{\varphi} + f_c \dot{x} = u \quad (8)$$

Para obtener una representación de (7) y (8) como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se definen las variables de estado como: x_1 posición del carro, x_2 posición angular del péndulo, x_3 velocidad del carro y x_4 velocidad angular del péndulo [6].

Realizando una representación matricial del conjunto de ecuaciones que representan la dinámica lineal del sistema físico empleando variables de estado se tienen las ecuaciones (9) y (10) [2] [6].

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = A\delta x + B\delta u \quad (9)$$

$$y = C\delta x + D\delta u \quad (10)$$

Las matrices de relación A , B , C y D son determinadas como se muestra en (11) y (12).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\gamma\varepsilon}{1-\gamma\lambda} & -\frac{\beta}{1-\gamma\lambda} & \frac{\gamma\sigma}{1-\gamma\lambda} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{1-\gamma\lambda} & \frac{\beta\lambda}{1-\gamma\lambda} & -\frac{\sigma}{1-\gamma\lambda} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha}{1-\gamma\lambda} \\ -\frac{\alpha\lambda}{1-\gamma\lambda} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Donde las letras griegas α , β , γ , λ , ε y σ están definidas en función de los parámetros físicos de la planta y se calculan como:

$$\alpha = \frac{1}{M+m} \quad \gamma = \frac{mL}{M+m} \quad \varepsilon = \frac{mgL}{J+mL^2}$$

$$\beta = \frac{f_c}{M+m} \quad \lambda = \frac{mL}{J+mL^2} \quad \sigma = \frac{f_p}{J+mL^2}$$

III. REGULADOR LINEAL ÓPTIMO CON CRITERIO CUADRÁTICO (LQR)

Para un sistema físico definido en espacio de estados como se presentó en las ecuaciones (7) y (8) es posible

determinar las ganancias de realimentación considerando algunos criterios de optimización, tales como la ubicación de polos y magnitudes máximas permisibles en la señal de control y las variables de estado; razón por la cual es necesario formular un problema de optimización que tenga en cuenta la rapidez de convergencia al estado cero y en general las restricciones físicas de los elementos a controlar. Uno de los criterios de optimización más ampliamente empleado en la literatura es el denominado criterio de la integral cuadrática, ya que presenta excelentes resultados y su concepción matemática es fácil de entender [2] [8].

A. Formulación general del LQR

Considerando el modelo de espacio de estados definido en (7) y (8), en el cual se supone que la matriz de controlabilidad C_o es de rango n , se plantea la integral cuadrática dada por la ecuación (13).

$$J_L = \frac{1}{2} x^T(t_f) P x^T(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (13)$$

La ecuación (13) puede ser simplificada si se considera que $t_f \rightarrow \infty$, entonces el estado $x(t_f) \rightarrow 0$ para sistemas de regulación. Con estas simplificaciones se obtiene (14) que es conocida como la función de costo [8].

Donde Q y R son matrices de $(n * n)$ y $(m * m)$ definidas positivas, con n el número de estados y m el número de entradas.

$$J_L = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (14)$$

La cantidad $x^T Q x$ es una medida de la desviación del estado, con respecto al estado cero en un tiempo t y $u^T R u$ es una medida del esfuerzo de la señal de control en el mismo tiempo; la integral obtiene como resultado el acumulado de las medidas anteriores.

Las matrices Q y R son definidas por el diseñador en forma empírica y cuyos elementos deben ser positivos o cero. En general, el diseño de un controlador LQR óptimo, depende de la habilidad en la minimización de la función de costo dada en (14), lo cual supone que para tener un mayor grado de fidelidad con respecto a los requerimientos del sistema, es necesario un mayor conocimiento del sistema bajo estudio [2] [8].

B. Reformulación del espacio de estados para seguimiento de referencia con ganancia integral

Para el sistema definido en espacio de estados dado por las ecuaciones (7) y (8), es posible definir una ley de control que

permita seguimiento de referencia para una de las variables de estado que lo permita y regular el resto del sistema. La figura 2 muestra un esquema de control en lazo cerrado para la planta con la posibilidad de seguimiento de referencia [3] [10].

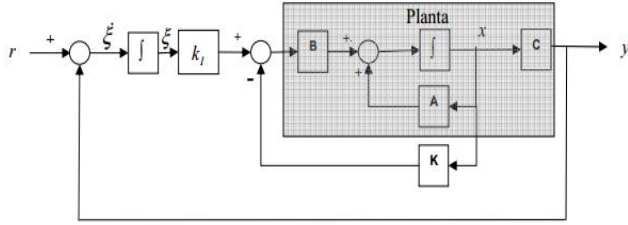


Figura 2. Esquema de control en lazo cerrado.

Del diagrama de bloques presentado en la figura 2, es posible determinar el conjunto de ecuaciones que logran regulación y seguimiento de referencia para el sistema físico péndulo invertido, siempre que sea posible seguir una señal de referencia [10].

Sea el espacio de estados redefinido en (15) y (16), con una señal de control dada por (17) y un error que se puede determinar a partir de (18).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (15)$$

$$y = C_r x \quad (16)$$

$$u = -Kx + K_I \xi \quad (17)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - C_r x \quad (18)$$

Donde C_r es la fila de la matriz C correspondiente a la variable de estado que permite realizar seguimiento de referencia. Así las variables de estado para el nuevo sistema podrán ser reescritas como:

$\dot{e} = \tilde{A}e + \tilde{B}u_e$	(19)
$u_e = -\tilde{K}e$	(20)

Con el siguiente conjunto de matrices y vectores ampliados.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K} = [K \quad \vdots \quad K_I] \quad C_r = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

C. Cálculo de la ganancia de realimentación \tilde{K} y la ecuación de Riccati

Definiendo la ley de control óptima como (21) para el sistema de espacio de estados dado en (19) y teniendo en

cuenta que la ganancia de realimentación $\tilde{K}(t)$ para un controlador LQR tiene la forma (22), es posible encontrar la ganancia de realimentación mediante el previo conocimiento de la matriz $P(t)$, cuya solución se determina resolviendo la ecuación diferencial matricial de Riccati dada en (23).

$$u_e(t) = -\tilde{K}(t)e(t) \quad (21)$$

$$\tilde{K}(t) = R^{-1}\tilde{B}^T P(t) \quad (22)$$

$$\dot{P} + P\tilde{A} - P\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T P + Q + \tilde{A}^T P = 0 \quad (23)$$

Si para la ecuación (23), las matrices \tilde{A} , \tilde{B} , Q y R , son independientes del tiempo y $t_f \rightarrow \infty$, entonces $\dot{P} = 0$, con lo que la ecuación diferencial matricial de Riccati se convierte en la ecuación algebraica de Riccati, como se muestra en (24).

$$P\tilde{A} - P\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T P + Q + \tilde{A}^T P = 0 \quad (24)$$

Al resolver la ecuación algebraica de Riccati, es posible encontrar la ganancia de realimentación \tilde{K} , que será más o menos óptima en la medida que las matrices Q y R , hayan sido bien escogidas por el diseñador [2] [8].

IV. MODELO SIMPLIFICADO DEL PÉNDULO PARA "SWING UP"

A. Función de energía y señal de control para la lograr el "swing up" del péndulo

Dado que las variables de estado en modelos matemáticos linealizados solo pueden realizar acciones de control en regiones muy cercanas al punto de equilibrio, será necesario realizar una maniobra de control que permita llegar a zonas muy cercanas al punto de equilibrio inestable. Con este fin es necesario definir una función que permita la regulación de energía en la planta, hasta alcanzar así un valor energético deseado y que se define a partir de los requerimientos del control. La primera aplicación de esta metodología fue mostrada en 1996 por Astrom y Furuta [2], y aún hoy en día por su eficiencia sigue siendo ampliamente implementada [7].

En la figura 3, se considera un modelo simplificado del péndulo donde se desprecia la fricción en el punto de pivote.

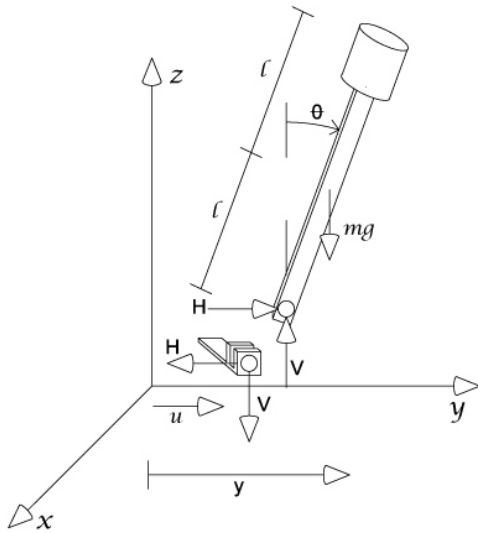


Figura 3. Esquema simplificado del péndulo invertido.

Realizando una descomposición de fuerzas sobre los ejes coordenados y suponiendo que la entrada activa del sistema, es la aceleración (u) en el punto de pivote, se hallan las ecuaciones (25) y (26).

$$\sum F_y = H = m \frac{d^2}{dt} (y + l \sin \theta) \quad (25)$$

$$\sum F_z = V - mg = m \frac{d^2}{dt} (l \cos \theta) \quad (26)$$

Aplicando una suma de momentos alrededor del centro de masa del péndulo se obtiene la ecuación (27).

$$\sum M_{cm} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta = I \ddot{\theta} \quad (27)$$

Con una combinación lineal de las ecuaciones (25), (26) y (27), y definiendo como $J_p = I + ml^2$ y $u = \ddot{y}$, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden (28) para el modelo simplificado del péndulo. [7]

$$J_p \ddot{\theta} + mlu \cos \theta - mgl \sin \theta = 0 \quad (28)$$

La expresión correspondiente a la energía del péndulo invertido se define como cero en la posición vertical superior ($\theta = 0$) y para una señal de control nula, es decir, $u = 0$ como se observa en la ecuación (29).

$$E = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + mgl (\cos \theta - 1) \quad (29)$$

De (29) es evidente que para llevar el péndulo a la posición vertical superior, es necesario que la posición y velocidad angular del eslabón pendular sean cero [7].

La influencia de una señal de control (u), en el comportamiento energético de la planta se puede notar, al diferenciar con respecto al tiempo la ecuación (29), obteniéndose como resultado (30).

$$\frac{dE}{dt} = J_p \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = mgu \dot{\theta} \cos \theta \quad (30)$$

Al observar (29), es posible inferir que una variación en la señal de control, tendrá repercusión directa sobre la energía de la planta, sin embargo, existen dos condiciones que son ajenas a

este comportamiento, y se presentan cuando $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$,

condiciones para las cuales no existe señal de control que influya la variación energética, pero no son críticas, ya que la planta solo estará allí por un lapso de tiempo muy corto [2].

Es posible mediante la aplicación de la teoría desarrollada por el matemático y físico Ruso *Aleksandr Lyapunov* encontrar una señal de control que permita llevar la función correspondiente a la posición del péndulo a una región de operación deseada; lo que en consecuencia tiene como un posible resultado la ley de control (31).

$$u = k (E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (31)$$

Donde la función $\text{sign}(x)$ representa la dirección que debe ser implementada para llevar la función de energía al valor deseado y k es un parámetro de diseño [2] [7].

Con el fin de asociar la aceleración del carro con el voltaje aplicado en los terminales del motor DC, se define ley de control (32) que relaciona la tensión DC aplicada al motor con la aceleración del carro.

$$v = \frac{k_t}{R * r} u \quad (32)$$

Donde k_t es la constante de torque del motor, R es la resistencia de los bobinados del motor y r es la relación de acople entre el eje del actuador y la banda.

V. REDES NEURONALES ARTIFICIALES

Las redes neuronales artificiales son una herramienta de control que ha estado presente desde hace más de tres décadas, por su habilidad de aprender del entorno que la rodea y su capacidad de generalización, es decir, que no requieren que la tarea de control sea programada sino que a partir del aprendizaje guiado es capaz de realizar tareas y acciones para las que no habían sido

preparadas, y esto es gracias las redes neuronales artificiales que tienen la capacidad de aprender de la experiencia tal y como sucede con las redes neuronales de los seres vivos [2] [9].

Las redes neuronales biológicas están constituidas por tres partes principales: dendritas, cuerpo de la célula o soma y axón. Las dendritas son fibras nerviosas que se encargan de recibir las señales eléctricas para luego conducir las al soma, el cual cumple la función de acumular estas señales de entrada para luego transferirlas al axón que finalmente las entregará a las neuronas adyacentes. El punto de contacto entre el axón de una neurona y una dendrita de otra es conocido como sinapsis [11].

A partir de las características de una red neuronal biológica se plantea el modelo equivalente para la red neuronal artificial, la cual está constituida principalmente por un vector de entradas p_i que representa las señales que provienen de otras neuronas y que son capturadas por las dendritas, una matriz de pesos W_i que representan la intensidad de la sinapsis que conecta dos neuronas y una función suma que representa la función umbral que la neurona debe sobrepasar para activarse. Éste último proceso ocurre en el cuerpo de la célula [2].

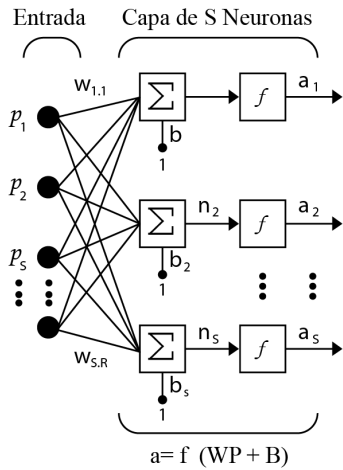


Figura 4. Representación de una red neuronal artificial de una sola capa, con múltiples entradas y s neuronas.

En la figura 4, se puede observar la representación de una red neuronal artificial de una sola capa, con múltiples entradas y neuronas, donde b es una ganancia escalar que refuerza la salida del sumador n , este último representa la salida neta de la red neuronal. La salida total a está determinada por la función de transferencia f la cual puede ser una función lineal o no lineal de n , y es escogida dependiendo de las especificaciones del problema que la neurona tenga que resolver [2] [4].

A. Redes neuronales artificiales multicapa

Este tipo de topologías se desarrolla a partir de la conexión en cascada de un conjunto de capas de que contienen a su vez conjuntos de redes neuronales con funciones de transferencia propias y que son seleccionadas según las características del problema tratado. Es de notar que las salidas de la primera capa son las entradas de la segunda capa y las salidas de la segunda capa son las entradas de la tercera capa y así sucesivamente [11].

Al final del proceso se tendrá una red acoplada en la cual la salida resultante depende de las entradas externas y de cada una de las capas que conforman la red neuronal artificial como se muestra en la figura 5.

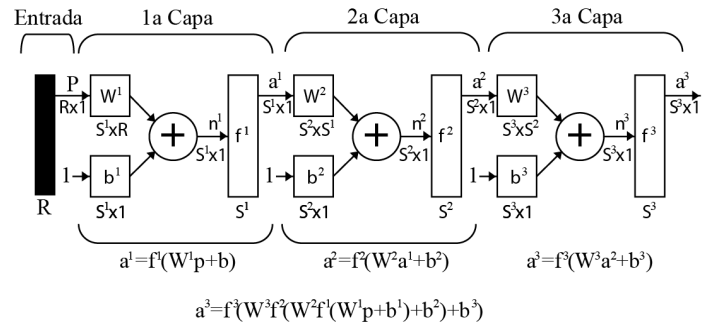


Figura 5. Red neuronal artificial de tres capas.

B. Red neuronal Backpropagation

La red Backpropagation trabaja bajo aprendizaje supervisado, es decir, ésta necesita conocer la salida que se desea obtener. Una vez aplicado un estímulo a la entrada de la red, éste se propaga capa por capa hasta generar una salida. La señal de salida obtenida se compara con la salida deseada calculando así una señal de error para cada componente de la salida total [9] [11].

Una vez determinada dicha señal de error, ésta se propaga hacia atrás desde la salida, a través de todas las capas, hasta que todas las neuronas hayan recibido la señal de error que describe su contribución a la señal de error total. Basándose en la minimización del error medio cuadrático, el algoritmo Backpropagation actualiza los valores de las ganancias y de los pesos con el fin de que la red converja hacia un estado que le permita aprender los patrones de entrenamiento [2] [9].

C. Modelo inverso de aprendizaje

El modelo inverso de aprendizaje es uno de los mecanismos que se emplea para realizar el entrenamiento de una red neuronal artificial, en donde las salidas de la planta se constituyen en las entradas del modelo y la señal de control dada por la ley de control (31) se considera el objetivo de aprendizaje para la red neuronal artificial [4]; una representación típica del modelo inverso de aprendizaje para redes neuronales y controladores inteligentes, es la que se observa en la figura 6.

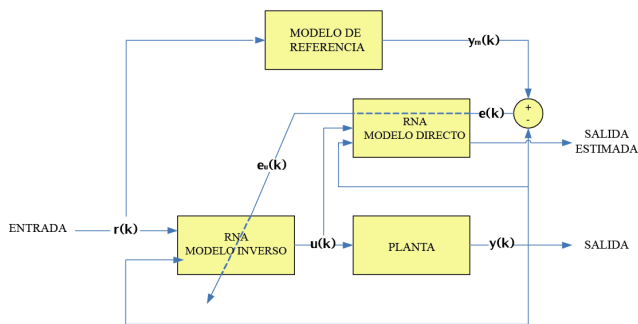


Figura 6. Esquema de aprendizaje supervisado empleando el modelo inverso.

VI. INTEGRACIÓN DEL CONTROLADOR LQR Y LA RED NEURONAL ARTIFICIAL

Con el fin de realizar la integración de los controladores, es necesario definir todos los parámetros asociados al sistema físico péndulo invertido simple y los controladores desarrollados.

A. Parámetros físicos del sistema péndulo invertido y matrices del controlador LQR

Parámetro	Valor	Unidades (SI)
Masa del carro (M)	1.12	kg
Masa del péndulo (m)	0.12	kg
Gravedad (g)	9,80665	m/s ²
Momento de inercia (J)	0,0136	Kg*m ²
Coefficiente de fricción (f_c)	0.05	N*s/m
Coefficiente de fricción rotacional (f_p)	0.007	Kg*m ² /rad*s
Distancia del eje de rotación al centro de masa (L)	0.3434	m
Límites del riel (Longitud de desplazamiento del carro)	±0.50	m

Tabla 2. Parámetros del sistema físico péndulo invertido simple.

Los parámetros del sistema dinámico péndulo invertido con los que se realizan las pruebas y simulaciones se encuentran en la tabla 2 y corresponden a los datos del modelo del péndulo de invertido simple disponible en el *Laboratorio de Investigación en Sistemas Control* de la *Universidad Tecnológica de Pereira* [6].

B. Matrices del control lineal óptimo con criterio cuadrático (LQR)

Una vez determinadas las matrices que corresponde al modelo de espacio de estados ampliado definido por el

conjunto de ecuaciones (15)-(18) con los datos de la tabla 2, se realiza la selección de las matrices Q y R según los requerimientos del sistema físico bajo estudio, teniendo especial cuidado en que la señal de control generada presente comportamientos dentro de un rango aceptable [1]. Así $Q = \text{diag}[650 \ 100 \ 20 \ 10 \ 100]$ y $R = [1]$.

Una vez se definen las matrices Q y R se resuelve la ecuación algebraica de *Riccati* dada en (24) y se hallan los valores de las ganancias de realimentación definidas en la ecuación (22).

Hecho esto, se obtienen las ganancias de realimentación:

$$\tilde{K} = -[35.483 \ 30.810 \ 207.942 \ 55.856 \ 10.000].$$

C. Parámetros de ajuste para el controlador con función de energía para “swing up”

Para la ley de control (31), como se mencionó anteriormente es necesario definir algunos parámetros de diseño que hacen parte de la implementación de la ley de control, tales como el parámetro k y la energía de referencia E_0 .

Después de haber realizado múltiples pruebas variando estos factores, se encontró que para el sistema dinámico péndulo invertido los factores más adecuados son $k = 9$ y $E_0 = 0.05$.

D. Obtención de los datos para el entrenamiento de la red neuronal artificial

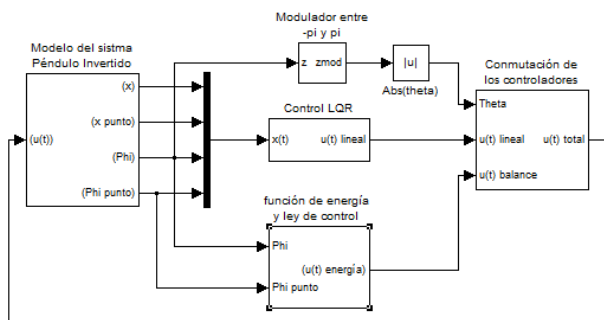


Figura 7. Diagrama de bloques para el control del péndulo invertido.

Para realizar la implementación del controlador inteligente por medio del modelo inverso para balanceo del péndulo, se implementó el controlador usando el modelo para regulación energía definido por las ecuaciones (29) y (31) y el regulador lineal óptimo con criterio cuadrático como se muestra en el diagrama de bloques de la figura 7.

Una vez implementando el controlador en lazo cerrado para el sistema dinámico, es necesario extraer la información de entrada para el modelo inverso de aprendizaje para las redes neuronales que se mostró en la figura 6. La información de entrada para el entrenamiento de la red neuronal artificial *backpropagation* son la posición y velocidad angular del péndulo, así como la señal de control definida por las funciones de energía, con la cual se logra el balanceo del sistema [2].

La figuras 8 y 9 muestran el comportamiento dinámico del sistema y los datos de interés para el entrenamiento de la red neuronal artificial.

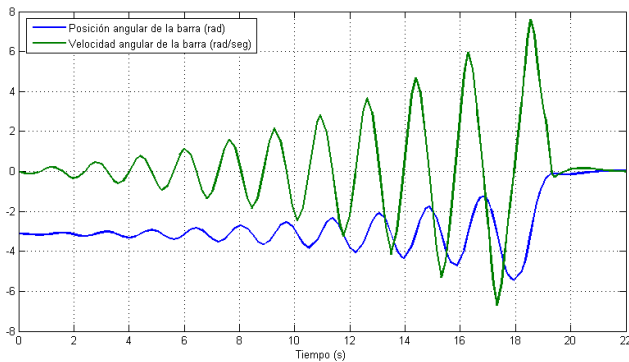


Figura 8. Posición y velocidad angular del péndulo en función del tiempo.

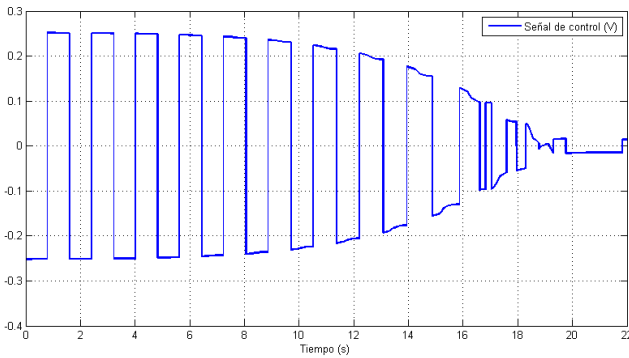


Figura 9. Señal de control para balanceo de sistema.

Los datos necesarios para el entrenamiento de la red neuronal artificial son aquellos que corresponden a la zona de balance o donde actúa la señal de control definida en (31) y terminan cuando las variables de estado mostradas en la figura 8 alcanzan el estado de regulación, es decir, tienden a cero y esto sucede alrededor de los 20s tiempo para el cual entra en operación el controlador LQR.

E. Entrenamiento de la red neuronal artificial backpropagation

Se implementa una red neuronal artificial de tres capas y su entrenamiento se realiza empleando el software MATLAB. La primera capa consta de dos neuronas y una función de transferencia tipo *tansig* (tangente sigmoial), la segunda capa está compuesta por 10 neuronas e igual función de transferencia que la anterior capa, finalmente la tercera capa o capa de salida se compone de una neurona y una función de transferencia tipo *logsig* (sigmoial logarítmico).

Para su entrenamiento se empleó el algoritmo de entrenamiento Levenberg – Marquardt y a través de la minimización del error medio cuadrático [2] [9].

La figura 10 permite observar la interconexión entre las tres capas que conforman la red neuronal artificial y la figura 11 muestra el diagrama de bloques con la red neuronal implementada, que es la encargada de realizar el balanceo del sistema, hasta llegar al punto de equilibrio en la posición vertical superior.

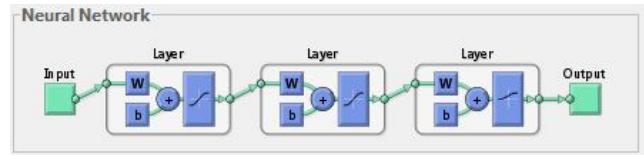


Figura 10. Interconexión de las capas en la red neuronal backpropagation.

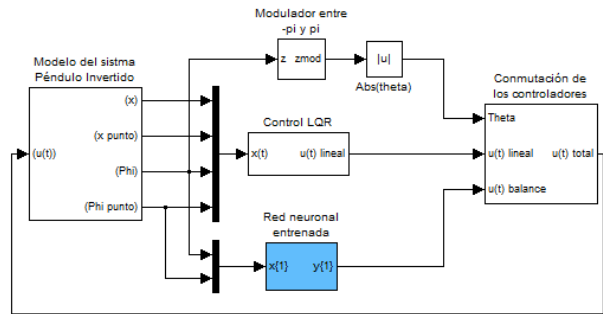


Figura 11. Diagrama de bloques para el control del péndulo invertido con red neuronal artificial y control LQR.

VII. RESULTADOS

Esta sección presenta las simulaciones correspondientes al diseño del controlador empleando redes neuronales artificiales y un regulador lineal óptimo con criterio cuadrático (LQR). Para este propósito se utilizó MATLAB 2010a en un computador Intel Celeron, sistema operativo Windows 7 y 2GB RAM.

A. Operación integrada del controlador LQR y la red neuronal artificial.

Una vez realizado el entrenamiento de la red neuronal artificial e integrados los controladores, tal y como se observó en el diagrama de bloques de la figura 11, se realizaron las pruebas para verificar del comportamiento de la red neuronal artificial y el acople con el regulador lineal cuadrático a través del arranque del modelo representativo del péndulo invertido desde la posición vertical inferior o de equilibrio natural, hasta el punto de equilibrio inestable en la posición vertical superior.

La figura 12 muestra la evolución de la señal de control y las figuras 13 y 14 presentan el comportamiento de las variables de estado correspondientes a la posición del carro y del péndulo, respectivamente.

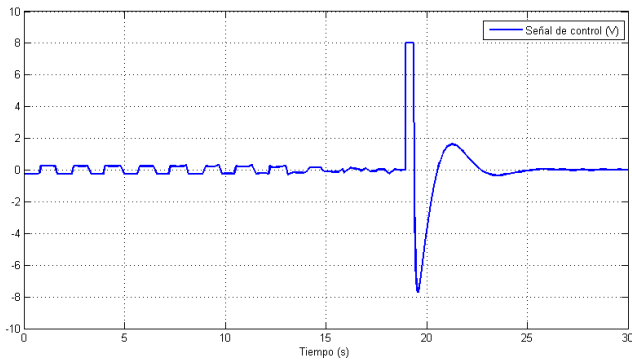


Figura 12. Señal de control global para el balanceo y estabilización del péndulo invertido simple.

En la figura 12 se puede observar que la señal alrededor de cero corresponde a la señal de control enviada por la red neuronal durante el periodo de balanceo del péndulo y que el pico observado alrededor de los 18s sucede en el momento en que se conmutan los controladores y entra en operación el LQR.

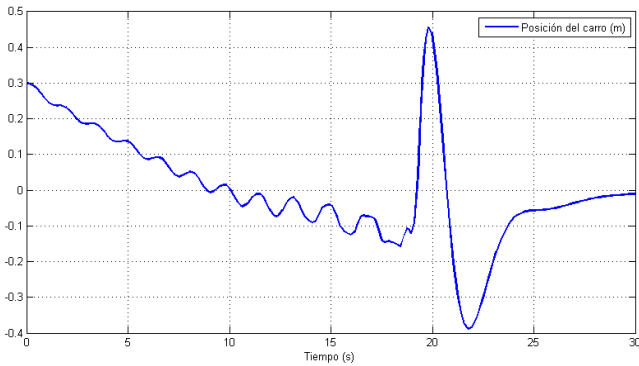


Figura 13. Comportamiento de la variable de estado correspondiente a la posición del carro en el riel.

La figura 13 muestra claramente que la posición del carro está en los límites operativos del sistema y es considerada una condición inicial diferente de cero.

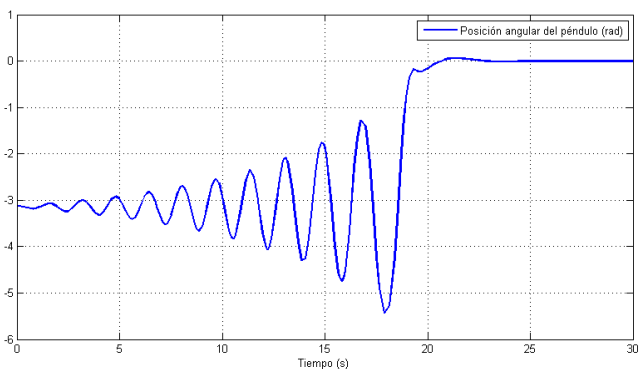


Figura 14. Posición angular del péndulo en función del tiempo.

Finalmente la figura 14 muestra el comportamiento de la barra pendular desde su posición de equilibrio natural hasta el punto de operación y se puede ver que la red neuronal artificial lleva el péndulo al estado deseado en un tiempo muy similar al mostrado en la figura 8 que se obtuvo con el controlador basado en funciones de energía de la figura 7.

B. Perturbación en la señal de control y seguimiento de referencia

Es común encontrar alteraciones en la señal de control debido a ruidos externos o alteraciones en los sensores, es por esto que es necesario realizar pruebas para observar el comportamiento del sistema ante alteraciones aleatorias de la señal de control y adicional a esto se puede considerar un estado en el cual una de las variables de estado permita seguir una referencia en la región de operación lineal (posición vertical superior), mientras las otras siguen en el estado de regulación.

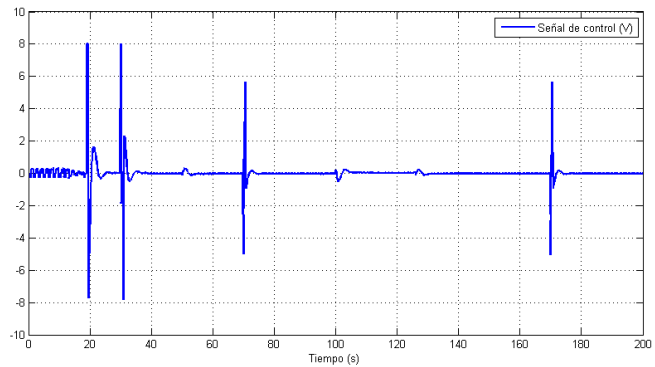


Figura 15. Señal de control con perturbaciones.

La figura 15 presenta la señal de control para seguimiento de referencia incluyendo perturbaciones de tipo pulso en diferentes intervalos de tiempo. La figura 16 muestra el comportamiento de la posición del carro ante seguimiento de referencia tipo escalón y las variaciones asociadas a las perturbaciones en la señal de control y la figura 17 presenta la posición del péndulo y las pequeñas variaciones asociadas al seguimiento de referencia y las perturbaciones.

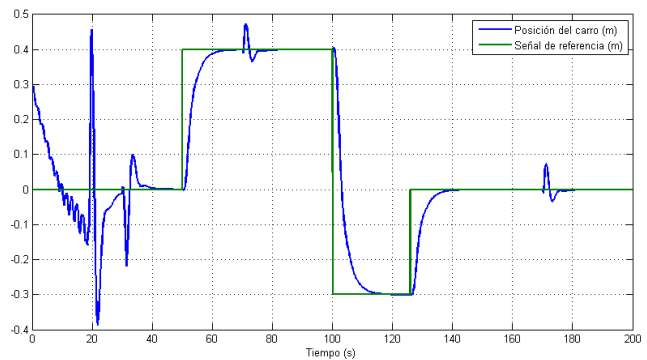


Figura 16. Comportamiento de la variable de estado correspondiente a la posición del carro en el riel.

Las alteraciones de la figura 16 cuando llega al estado de equilibrio se deben a las perturbaciones de la señal de control que varían la posición del carro ya que la prioridad es mantener el péndulo en la posición vertical superior.

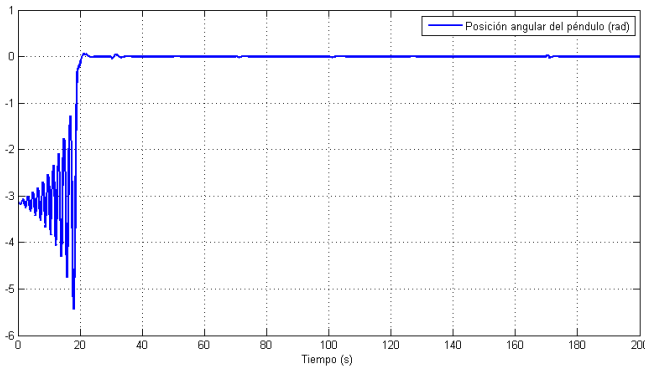


Figura 17. Posición angular del péndulo ante perturbaciones en la señal de control y seguimiento de referencia.

Finalmente la figura 17 permite observar como el péndulo permanece en la zona de equilibrio inestable a pesar de que existen perturbaciones en la señal de control y adicional a esto la posición del carro no es fija dado que se encuentra siguiendo una referencia tipo escalón.

VIII. CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo matemático del péndulo invertido considerando fricciones entre las superficies de contacto, se obtiene un modelo de espacio de estados con base en las ecuaciones que definen la dinámica global del sistema alrededor del punto de operación en la posición vertical superior y se presenta un modelo de energía simplificado para realizar un controlador de “swing up” basado en funciones de energía.

La técnica de control por realimentación de las variables de estado empleando un regulador lineal óptimo con criterio cuadrático (LQR) adaptado para seguimiento de referencia mostró ser eficiente y capaz de realizar con éxito la tarea de control sin grandes esfuerzos en la señal de control.

Se implementó una red neuronal artificial multicapa capaz de aprender un comportamiento típico de patrones a través del modelo inverso de aprendizaje, la cual presentó un comportamiento eficiente al ser comparado con el modelo guía logrando realizar la tarea de control sin mayores dificultades.

La integración de dos controladores de diferente naturaleza para formar un controlador global de características híbridas muestra ser una alternativa exitosa y eficiente para el control de sistemas dinámicos no lineales.

REFERENCIAS

- [1] F. Castaños, and R. Carreras. “Levantamiento y control de un péndulo invertido con un esquema de control, reconfigurable,” *XI Congreso Latinoamericano de Control Automático*, May, 2004.
- [2] L. F. Escobar and O. D. Montoya, “Control híbrido del péndulo de Furuta,” Bsc. Dissertation. Dept. Elec. Eng. Univ. Tecnológica de Pereira, Mar, 2012.
- [3] C. A. Sanabria, and O. M. Hernández. “Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados,” *Revista Conciencias*, Sep, 2009.
- [4] V. A. Rodríguez-Toro, J. E. Garzón, and J. A. López, “Control neuronal por modelo inverso de un sistema usando algoritmos de aprendizaje Levenberg – Marquardt y Bayesiano,” *VIII Congreso de la Asociación Colombiana de Automática*, Univ. Tecnológica de Bolívar, Apr, 2009.
- [5] J. Aracil, and F. Gordillo, “El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 2, a. 8-19, Apr, 2005.
- [6] C. A. Saldarriaga, and J. D. Henao “Identificación de parámetros y control de un péndulo invertido,” Bsc. dissertation. Dept. Elec. Eng. Univ. Tecnológica de Pereira, 2009.
- [7] O. D. Montoya, J. G. Valenzuela, and D. Giraldo “Control global del Péndulo Rotacional Invertido empleando modelos de energía” *Revista Scientia et Technica*, No. 52, Dec, 2012.
- [8] S. A. Menéndez, “Aportación al control del convertidor CC/CA de tres niveles” Ph.D thesis, Univ. Politècnica de Catalunya. Nov, 2004.
- [9] C. Vieira, “Realização de um controlador utilizando Redes Neurais para o controle de estabilização do Péndulo de Furuta,” Bsc. Dissertation. Dept. Tec. Univ. Federal de Amazonas, 2010.
- [10] M. M. Juan, “Control lineal y no lineal de un levitador magnético,” Bsc. Dissertation, Univ. Politècnica de Catalunya. 2010.
- [11] M. I. Acosta and C. A. Zuluaga, “Tutorial sobre redes neuronales aplicadas en ingeniería” Dept. Elec. Eng. Univ. Tecnológica de Pereira, 2000.