

# Control global del Péndulo Rotacional Invertido empleando modelos de energía

## Global control of rotational inverted pendulum using energy models

Oscar Danilo Montoya Giraldo, Juan Guillermo Valenzuela Hernández, Didier Giraldo Buitrago

Facultad de Ingenierías, Programa de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

odmontoya@utp.edu.co

jgvalenzuela@utp.edu.co

dgiraldo@utp.edu.co

**Resumen**— Este artículo presenta modelos matemáticos que representan fenómenos físicos y comportamientos de una planta o sistema, dependientes exclusivamente de los requerimientos y necesidades de control y del grado de exactitud necesario determinado por el diseñador. Para esto se desarrollaron modelos del péndulo rotacional invertido a partir de la mecánica de Lagrange y la mecánica de Newton, logrando diseñar una tarea de control en el espacio global, mostrando la rapidez y eficiencia empleando técnicas de regulación de energía para el “Swing Up” y de realimentación de variables de estado para estabilización y posicionamiento alrededor del punto de operación. De esta manera, se demuestra también que conmutación de controladores puede ser una alternativa válida para control global de sistemas físicos, reduciendo la complejidad en su diseño.

**Palabras clave**— Control global, funciones de energía, péndulo rotacional invertido, realimentación de variables de estado, “Swing up”.

**Abstract**— This paper presents mathematical models that represent physical phenomena and behaviors of a plant or system, dependent only on the requirements and needs of control and the degree of accuracy determined by the designer. Models were developed for this rotational inverted pendulum from Lagrangian mechanics and Newtonian mechanics, making design a control task in the global space, showing the speed and performance using energy regulation control technique for the swing up and feedback of state variables for stabilization and positioning around the operating point. Thus, it also shows that switching controllers can be a valid alternative for global control of physical systems, reducing complexity in design task.

**Key Word** —Global control, energy functions, feedback of state variables, rotational inverted pendulum, swing up.

### I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la investigación sobre robótica ha impulsado en gran medida el desarrollo de lo que se conoce como *Ingeniería de Control* debido a la necesidad de automatización existente en todo lo relacionado a procesos industriales que involucran el uso de maquinaria y por tanto, riesgo para las personas. Es por ello que cosas tan comunes hoy en día como el transporte, las

comunicaciones y en general los procesos de producción, han evolucionado aceleradamente hasta alcanzar niveles de seguridad y calidad impensados algunas décadas atrás [5].

Por lo anterior, el componente investigativo de la ciencia se ha enfocado en el desarrollo y la comprensión de sistemas físicos que posean características no lineales dentro de su modelado matemático y en consecuencia un desafío para las técnicas clásicas de control, llevando a que los equipos conocidos como péndulos logren una gran acogida en el campo de la investigación, ya que son sistemas que poseen grandes similitudes con los modelos de equipos comúnmente utilizados en el mundo laboral, creándose así nuevos prototipos y esquemas de control [5,6].

Es de vital importancia para las técnicas de control basadas en modelos matemáticos considerar diferentes eventos físicos presentes en el comportamiento de la planta, con el fin de asegurar un modelado de calidad, sin embargo estas condiciones son imprácticas debido a la excesiva complejidad matemática del modelo, es por esto que se tienen en cuenta algunas simplificaciones, que sin degradar la calidad del modelado, presentan un alto grado de eficiencia en el momento de realizar la tarea de control. Algunas de las técnicas clásicas más destacadas para el modelado de sistemas físicos, son basadas en las mecánicas Lagrangiana, Newtoniana y Hamiltoniana, cada una de las cuales considera diferentes aspectos físicos y en general, encuentran representaciones matemáticas diferentes del mismo sistema bajo estudio.

En la sección II de este artículo se presenta una descripción general del péndulo rotacional invertido y se realiza un modelado utilizando formulación a partir la mecánica de Lagrange. En la sección III se presenta el diseño de un controlador para la planta a partir de un modelo matemático basado en las ecuaciones de Newton para el “Swing up” y otro controlador por realimentación de variables de estado para la región de equilibrio. En la sección IV se presentan las simulaciones y pruebas realizadas al modelo representativo del péndulo de Furuta, donde se evalúa el comportamiento del controlador ante las tareas de control para regulación y seguimiento de trayectoria.

## II. MODELO MATEMÁTICO PARA EL PÉNDULO ROTACIONAL INVERTIDO

### A. Descripción del sistema físico

El péndulo de Furuta, también conocido como péndulo rotacional invertido, fue diseñado por el Doctor Katsuhisa Furuta del Instituto Tecnológico de Tokio en el año de 1992, como una variación del péndulo invertido, con el fin de eliminar la limitante física de movimiento que impone el riel sobre el cual el carro se desliza, a través de la inclusión en el sistema de una trayectoria de giro circular infinita.

El péndulo rotacional invertido es un mecanismo sub-actuado con dos (2) grados de libertad y constituido por dos (2) eslabones o brazos y dos (2) articulaciones. El primer brazo tiene la posibilidad de girar libremente en el plano horizontal; en uno de sus extremos se encuentra ubicado el actuador o motor, quien es el elemento activo que imprime sobre la barra la capacidad de movimiento, en el extremo restante, a través de una articulación, se encuentra sujeto el péndulo que puede girar libremente en un plano vertical formando una trayectoria cilíndrica con respecto al eje  $z$ .

La característica de sistema sub-actuado está determinada porque solo posee un elemento activo y cuenta con dos brazos que pueden moverse en dos planos diferentes y perpendiculares entre sí.

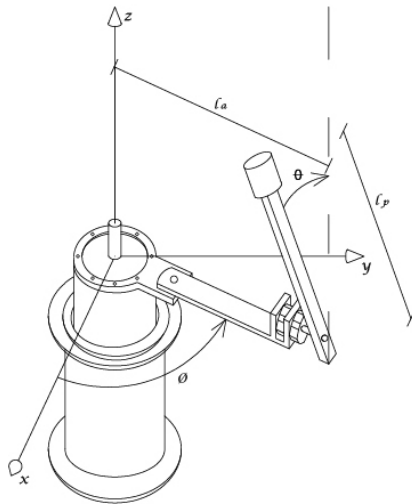


Figura 1. Representación tridimensional del péndulo rotacional invertido.

La figura 1, muestra una representación tridimensional del péndulo de Furuta, compuesta por dos cuerpos inerciales conectados a través de una articulación. Un pilar central (eje del motor) con un momento de inercia  $J$ , conectado al brazo horizontal de longitud  $l_a$  y masa  $m_a$  en uno de sus extremos, en el otro extremo se articula un eslabón o péndulo de longitud  $l_p$  y masa  $m_p$  y adicionalmente se

considera una masa de balance en el extremo restante del péndulo de magnitud  $M$ . La posición angular  $\theta$  del péndulo se ha definido como cero en la posición vertical superior y con sentido de giro positivo en la dirección de las manecillas del reloj. El ángulo de la barra horizontal se ha definido con sentido de giro positivo en la dirección opuesta a las manecillas del reloj.

La Tabla 1, contiene los parámetros físicos del péndulo de Furuta disponible en el *Laboratorio de Investigación es Sistemas Control* de la *Universidad Tecnológica de Pereira*.

Parámetro	Valor	Unidades (SI)
Masa brazo horizontal ( $m_a$ )	0,077752	kg
Masa péndulo ( $m_p$ )	0,013968	kg
Longitud brazo horizontal ( $l_a$ )	0,084	m
Longitud péndulo ( $l_p$ )	0,203	m
Gravedad ( $g$ )	9,80665	m/s <sup>2</sup>

Tabla 1. Parámetros físicos del péndulo de Furuta.

### B. Modelado matemático del sistema

El modelo matemático del sistema puede ser representado mediante una ecuación diferencial vectorial de segundo orden, definida en las posiciones articulares  $q$  o cartesianas  $x$ , como se observa en las ecuaciones (1) y (2). [5]

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0 \quad (1)$$

$$g(x, \dot{x}, \ddot{x}, \tau) = 0 \quad (2)$$

Donde  $\tau$  representa el vector de pares y fuerzas aplicadas por los actuadores en las articulaciones.

El modelo descrito por (1), es conocido como modelo dinámico articular de coordenadas generalizadas, mientras que (2), se denomina modelo dinámico cartesiano y es el que será considerado para el desarrollo matemático presentado en este artículo.

Cabe resaltar que un modelo matemático para un sistema físico no es único, es decir, que depende exclusivamente de las consideraciones hechas por el diseñador, la rigurosidad del estudio que se realice y la precisión requerida en el análisis.

#### 1. Cinemática del sistema

La localización de un punto  $p$  en el espacio puede ser descrito como se muestra en la ecuación (3).

$$r(r_a, r_p) = (r_x(r_a, r_p), r_y(r_a, r_p), r_z(r_a, r_p))^T \quad (3)$$

Donde  $r_x$ ,  $r_y$  y  $r_z$  son las posiciones en coordenadas cartesianas y están definidas en función de las variables de  $r_a$  y  $r_p$ , que representan las coordenadas cilíndricas de los brazos horizontal y vertical respectivamente, y son medidas a partir de los centros de rotación de los cuerpos.

Tomando la derivada parcial, de la ecuación vectorial de posición (3), se obtiene la ecuación vectorial de velocidad (4).

$$v(r_a, r_p) = (v_x(r_a, r_p), v_y(r_a, r_p), v_z(r_a, r_p))^T \quad (4)$$

De la figura 1, al realizar una descomposición sobre los ejes coordenados, se obtienen las ecuaciones vectoriales de posición (5), (6) y (7).

$$r_x(r_a, r_p) = r_a \cos \phi + r_p \sin \phi \sin \theta \quad (5)$$

$$r_y(r_a, r_p) = r_a \sin \phi - r_p \cos \phi \sin \theta \quad (6)$$

$$r_z(r_a, r_p) = r_p \cos \theta \quad (7)$$

Obteniendo la derivada temporal de las ecuaciones (5), (6) y (7), se halla la velocidad vectorial del sistema como (8), (9) y (10).

$$v_x(r_a, r_p) = -r_a \dot{\phi} \sin \phi + r_p \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta + r_p \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \quad (8)$$

$$v_y(r_a, r_p) = r_a \dot{\phi} \cos \phi + r_p \dot{\phi} \sin \phi \sin \theta - r_p \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta \quad (9)$$

$$v_z(r_a, r_p) = -r_p \dot{\theta} \sin \theta \quad (10)$$

Para calcular la energía cinética de un sistema físico es necesario conocer la magnitud de su velocidad general, para un sistema de tres dimensiones la ecuación (11), representa la magnitud de la velocidad general del péndulo invertido [4,6].

$$v^2(r_a, r_p) = v_x^2(r_a, r_p) + v_y^2(r_a, r_p) + v_z^2(r_a, r_p) \quad (11)$$

Como consecuencia de aplicar (11) a las ecuaciones (8), (9) y (10), y tras una manipulación algebraica de simplificación, se obtiene el cuadrado de la magnitud de la velocidad general del sistema como (12).

$$v^2(r_a, r_p) = (r_a^2 + r_p^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 + 2r_a r_p \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + r_p^2 \dot{\theta}^2 \quad (12)$$

## 2. Análisis energético del sistema

Para desarrollar un modelo energético de un sistema físico es necesario conocer las energías que puede presentar un cuerpo, y que pueden ser calculadas en su forma integral como (13) y (14).

$$K = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad (13)$$

$$U = g \int r_z dm \quad (14)$$

Las letras  $K$  y  $U$  denotan las energías cinética y potencial, respectivamente;  $dm$  representa el diferencial de masa y  $g$  es la constante de gravedad [5].

Para determinar la energía total de la planta, se dividirá el sistema en cuatro secciones y se calcula la energía cinética y potencial para cada una de ellas, aplicando las definiciones (13) y (14).

### Centro de rotación o eje del pilar central (CR)

La ecuación (16), evidencia que la energía potencial gravitacional es cero, porque el centro de rotación se encuentra en el origen de coordenadas.

$$K_{CR} = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 \quad (15)$$

$$U_{CR} = 0 \quad (16)$$

### Eslabón o barra horizontal (BH)

Al igual que el caso anterior, la energía potencial gravitacional del eslabón horizontal es cero porque se encuentra localizado sobre el plano  $xy$ , es decir, está sobre el mismo plano coincidente del eje del pilar central.

$$K_{BH} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m_a l_a^2 \dot{\phi}^2 \right) \quad (17)$$

$$U_{BH} = 0 \quad (18)$$

### Barra vertical (BV)

$$K_{BV} = \frac{1}{2} \left[ m_p \left( l_a^2 + \frac{1}{3} l_p^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\phi}^2 + m_p l_a l_p \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{3} m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 \right] \quad (19)$$

$$U_{BV} = \frac{1}{2} g m_p l_p \cos \theta \quad (20)$$

### Masa de balance (MB)

$$K_{MB} = \frac{1}{2} \left[ M \left( l_a^2 + \frac{1}{3} l_p^2 \sin^2 \theta \right) + 2M l_a l_p \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + M l_p^2 \dot{\theta}^2 \right] \quad (21)$$

$$U_{MB} = M g l_p \cos \theta \quad (22)$$

Finalmente al tener descritas las energías cinética y potencial de cada uno de los componentes del péndulo rotacional invertido, se calculan las energías totales del sistema como (23) y (24).

$$K = \frac{1}{2} \left[ J + \left( \frac{1}{3} m_a + m_p + M \right) l_a^2 \dot{\phi}^2 + \left( \frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + 2 \left( \frac{1}{2} m_p + M \right) l_a l_p \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + \left( \frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2 \dot{\theta}^2 \right] \quad (23)$$

$$U = \left( \frac{1}{2} m_p + M \right) g l_p \cos \theta \quad (24)$$

### 3. Mecánica de Lagrange

La mecánica de Lagrange describe el comportamiento de las posiciones y velocidades articulares (angulares) de un sistema físico. Este modelo puede ser descrito en forma compacta como (25).

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (25)$$

Donde  $M(q)$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q})$  es la matriz centrífuga y de Coriolis,  $g(q)$  es el vector de pares gravitacionales y  $\tau$  representa el vector de torques y fuerzas externas que actúan sobre el sistema, como se muestra en [5].

Las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento de un sistema físico en función de sus entradas activas (torques y fuerzas) se define como (26) y (27).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau_\phi \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (27)$$

Donde  $L$  representa el Lagrangiano del sistema que puede ser determinado como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial presentadas en las ecuaciones (23) y (24), obteniendo como resultado la ecuación (28).

$$L = \frac{1}{2} \left[ J \dot{\phi}^2 + \left( \frac{1}{3} m_a + m_p + M \right) l_a^2 \dot{\phi}^2 + \left( \frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \left( \frac{1}{2} m_p + M \right) l_a l_p \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2 \dot{\theta}^2 - \left( \frac{1}{2} m_p + M \right) g l_p \cos \theta \right] \quad (28)$$

Para simplificar la ecuación (28), se definen unas constantes, en función de los parámetros propios de la planta como se muestra en el sistema de ecuaciones (29).

$$\begin{aligned} \alpha &= J + \left( \frac{1}{3} m_a + m_p + M \right) l_a^2 \\ \beta &= \left( \frac{1}{3} m_p + M \right) l_p^2 \\ \gamma &= \left( \frac{1}{2} m_p + M \right) l_a l_p \\ \delta &= \left( \frac{1}{2} m_p + M \right) g l_p \end{aligned} \quad (29)$$

Al aplicar esta reducción de términos a la ecuación del Lagrangiano, se obtiene (30).

$$L = \frac{1}{2} \left[ (\alpha + \beta \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 + 2\gamma \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + \beta \dot{\theta}^2 \right] - \delta \cos \theta \quad (30)$$

Finalmente usando las ecuaciones de Lagrange para movimiento definidas por (26) y (27), sobre el Lagrangiano (30) y una reducción algebraica se llega a las ecuaciones (31) y (32), que describen en forma diferencial el comportamiento global del sistema físico péndulo de Furuta.

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta \sin^2 \theta) \ddot{\phi} + 2\beta \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\ + \gamma \ddot{\theta} \cos \theta - \gamma \dot{\theta}^2 \sin \theta = \tau_\phi \end{aligned} \quad (31)$$

$$\gamma \ddot{\phi} \cos \theta + \beta \ddot{\theta} - \beta \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - \delta \sin \theta = 0 \quad (32)$$

### C. Modelado del motor de corriente continua

Los motores son los elementos activos que imprimen capacidad de movimiento o giro a un sistema físico determinado; en el caso del péndulo de Furuta es necesario determinar las características del circuito equivalente de un motor de corriente continua, para encontrar las relaciones existentes entre las variables eléctricas y las variables mecánicas [6].

El circuito equivalente de un motor de corriente continua, puede expresarse en función del voltaje, la corriente y la velocidad de giro de su eje, como se observa en la ecuación (33).

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + k_e \dot{\phi} \quad (33)$$

Donde los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $k_e$  son las constantes eléctricas del motor.

De la ecuación (33) y despreciando el efecto inductivo (por ser muy pequeño), se puede hallar la corriente circulante como (34), y además conociendo que en un motor el torque de salida en el eje es proporcional a la corriente que circula por sus devanados, se obtiene (35).

$$i = \frac{1}{R} v - \frac{k_e}{R} \dot{\phi} \quad (34)$$

$$\tau_\phi = k_t i \quad (35)$$

Sustituyendo la ecuación (35) en (34) y considerando que las constantes  $k_t$  y  $k_e$  son idénticas en magnitud en el sistema internacional de unidades (MKS), se determina la relación existente entre el torque neto de salida y la tensión continua aplicada en los terminales de conexión del motor, como (36).

$$\tau_\phi = \frac{K_t}{R} v - \frac{K_t^2}{R} \dot{\phi} \quad (36)$$

La tabla 2, presenta los parámetros eléctricos del motor de corriente continua *Pittman locog 8xx2*, que opera como actuador del péndulo de Furuta.

Constantes del motor	Valor	Unidades (SI)
Resistencia ( $R$ )	12,1	$\Omega$
Inercia ( $J$ )	9,89E-07	kg.m <sup>2</sup>
Constante de Torque ( $K_t$ )	2,74E-02	N.m/A
Constante de FEM ( $K_e$ )	2,74E-02	V.s/rad
Voltaje Máximo ( $V_{\max}$ )	24	V

Tabla 2. Parámetros eléctricos del motor de corriente continua.

### D. Representación en espacio de estados

Con base en el modelo matemático que se presentó en las ecuaciones (31) y (32), para el péndulo rotacional invertido, es posible construir un espacio de estados no lineal, con ecuaciones diferenciales de primer orden [7]. Se introducen las variables de estado  $x_1 = \phi$ ,  $x_2 = \dot{\phi}$ ,  $x_3 = \theta$ ,  $x_4 = \dot{\theta}$  y se determina el espacio de estados no lineal como (37), (38), (39) y (40), las cuales representan el comportamiento del sistema físico en cualquier punto de operación, y pueden ser linealizadas alrededor de un punto de operación de interés particular [6].

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{1}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3} \left[ \beta\tau_\phi \right. \\ & - \beta\gamma x_2^2 \cos^2 x_3 \sin x_3 \\ & - 2\beta^2 x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 \\ & \left. + \beta\gamma x_4^2 \sin x_3 - \gamma\delta \cos x_3 \sin x_3 \right] \quad (38) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \frac{2\beta\gamma x_2 x_4 \cos^2 x_3 \sin x_3 - \gamma^2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3} \\ & + \frac{\delta(\alpha + \beta \sin^2 x_3) \sin x_3 - \gamma\tau_\phi \cos x_3}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3} \\ & + \frac{\beta x_2^2 (\alpha + \beta \sin^2 x_3) \cos x_3 \sin x_3}{\alpha\beta - \gamma^2 + (\beta^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3} \quad (40) \end{aligned}$$

#### 1. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del péndulo de Furuta se determinan igualando a cero las ecuaciones no lineales del modelo de espacio de estados, obteniendo el sistema de ecuaciones (41).

$$x_2 = 0, \cos x_3 \sin x_3 = 0 \quad (41)$$

$$x_4 = 0, (\alpha + \beta \sin^2 x_3) \sin x_3 = 0$$

Al resolver este sistema de ecuaciones (41), es posible determinar los puntos de equilibrio de la planta como  $(x_1, 0, x_3, 0)$ , donde  $x_1 \in R$  y  $x_3 = k\pi$ , con  $k \in Z$ .

## 2. Linealización alrededor del punto de equilibrio

Sea un modelo matemático definido en espacio de estados como (42).

$$\dot{x} = f(x, \tau, t) \quad (42)$$

Sea la trayectoria nominal de operación (punto de operación) denotado por  $x_0(t)$ , la cual corresponde a una entrada nominal  $\tau_0(t)$ . Expandiendo la ecuación de estado no lineal (42) en Series de Taylor alrededor del punto de equilibrio y despreciando los términos de orden superior a 1, se obtiene la expresión (43)

$$\begin{aligned} x_i(t) = & f_i(x_0, \tau_0) \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i(x, \tau)}{\partial x_j} \Big|_{x_0, \tau_0} (x_j - x_{0j}) \\ & + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i(x, \tau)}{\partial \tau_j} \Big|_{x_0, \tau_0} (\tau_j - \tau_{0j}) \end{aligned} \quad (43)$$

En donde  $i = 1, 2, \dots, n$  y por simplicidad se definen unas variables auxiliares (44), para reducir términos. [7]

$$\begin{aligned} \delta x_i & \square x_i - x_{0i}, \quad \delta \tau_j \square \tau_j - \tau_{0j}, \\ \delta \dot{x}_i & \square \dot{x}_i - \dot{x}_{0i}, \quad \dot{x}_{0i} = f(x_0, \tau_0) \end{aligned} \quad (44)$$

Remplazando el conjunto de ecuaciones (44) en (43) y rescribiendo la ecuación de expansión en Series de Taylor en forma matricial se llega a (45).

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = A\delta x + B\delta \tau \quad (45)$$

De la misma manera, la ecuación que representa las salidas de interés puede ser descrito como una función matricial de las variables de estado y la salida, como se muestra en la ecuación (46).

$$y = C\delta x + D\delta \tau \quad (46)$$

Siendo consecuentes con la entrada de interés, al linealizar el modelo de espacio de estados no lineal y con ayuda de las expresiones (45) y (46), se obtienen las matrices de relación  $A, B, C$  y  $D$ , cuyos parámetros están en función de las constantes propias del sistema físico. El sistema de ecuaciones (47), se ha obtenido considerando el punto de equilibrio en la posición vertical superior [4,6].

$$\begin{aligned} A = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{\delta\gamma}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\gamma K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} & \frac{-\delta\alpha}{\gamma^2 - \beta\alpha} & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ B = & \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\beta K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} \\ 0 \\ \frac{\gamma K_t^2}{R(\gamma^2 - \beta\alpha)} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

Finalmente es importante resaltar que las salidas de interés son las posiciones angulares de la barra horizontal y vertical, respectivamente.

## III. DISEÑO DEL CONTROLADOR

### A. Controlador para "Swing up"

Dado que las variables de estado en modelos matemáticos linealizados solo pueden realizar acciones de control en regiones muy cercanas al punto de equilibrio, será necesario realizar una maniobra de control que permita llegar a zonas muy cercanas al punto de equilibrio inestable. Con este fin es necesario definir una función que permita la regulación de energía en la planta, hasta alcanzar así un valor energético deseado y que se define a partir de los requerimientos del control. La primera aplicación de esta metodología fue mostrada en 1996 por Astrom y Furuta [2], y aún hoy en día por su eficiencia sigue siendo ampliamente implementada [3].

En la figura 2, se considera un modelo simplificado del péndulo donde se desprecia la fricción en el punto de pivote.

Realizando una descomposición de fuerzas sobre los ejes coordenados y suponiendo que la entrada activa del sistema, es la aceleración ( $u$ ) en el punto de pivote, se hallan las ecuaciones (48) y (49) [6].

$$\sum F_y = H = m \frac{d^2}{dt} (y + l \sin \theta) \quad (48)$$

$$\sum F_z = V - mg = m \frac{d^2}{dt} (l \cos \theta) \quad (49)$$

Aplicando una suma de momentos alrededor del centro de masa del péndulo se obtiene la ecuación (50).

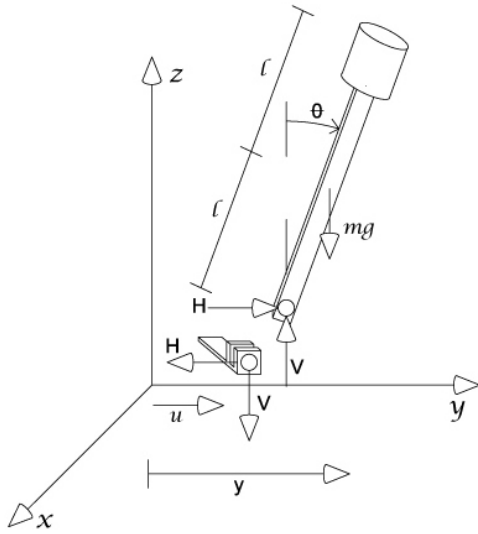


Figura 2. Esquema simplificado del péndulo invertido rotacional

$$\sum M_{cm} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta = I \ddot{\theta} \quad (50)$$

Con una combinación lineal de las ecuaciones (48), (49) y (50), y definiendo como  $J_p = I + ml^2$  y  $u = \ddot{y}$ , se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden (51) para el modelo simplificado del péndulo. [6]

$$J_p \ddot{\theta} + mlu \cos \theta - mgl \sin \theta = 0 \quad (51)$$

La expresión correspondiente a la energía del péndulo invertido se define como cero en la posición vertical superior ( $\theta = 0$ ) y para una señal de control nula, es decir,  $u = 0$  como se observa en la ecuación (52).

$$E = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + mgl (\cos \theta - 1) \quad (52)$$

De (52), es evidente que para llevar el péndulo a la posición vertical superior, es necesario que la posición y velocidad angular del eslabón pendular sean cero [1,2,3].

La influencia de una señal de control ( $u$ ), en el comportamiento energético de la planta se puede notar, al diferenciar con respecto al tiempo la ecuación (52), obteniéndose como resultado (53).

$$\frac{dE}{dt} = J_p \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = mgu \dot{\theta} \cos \theta \quad (53)$$

Al observar (52), es posible inferir que una variación en la señal de control, tendrá repercusión directa sobre la energía de la planta, sin embargo, existen dos condiciones que son ajenas a

este comportamiento, y se presentan cuando  $\dot{\theta} = 0$  y  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ,

condiciones para las cuales no existe señal de control que influya la variación energética, pero no son críticas, ya que la planta solo estará allí por un lapso de tiempo muy corto [1,2,3,6].

Es posible mediante la aplicación de la teoría desarrollada por el matemático y físico Ruso *Aleksandr Lyapunov* encontrar una señal de control que permita llevar la función correspondiente a la posición del péndulo a una región de operación deseada; lo que en consecuencia tiene como un posible resultado la ley de control (54). [1-3]

$$u = k (E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (54)$$

Donde la función  $\text{sign}(x)$  representa la dirección que debe ser implementada para llevar la función de energía al valor deseado y  $k$  es un parámetro de diseño.

La relación que existe entre el torque aplicado al eje del motor ( $\tau_\phi$ ) y la aceleración ( $u$ ) producida en el punto de pivote puede ser descrita como (55).

$$\tau = \frac{J}{l_a} u \quad (55)$$

Siendo así, combinando linealmente las ecuaciones (36), (54) y (55), se obtiene la ley de control para "Swing up" mediante regulación de energía (56), en función de la entrada activa de tensión continua en terminales del actuador.

$$v = \frac{R}{K_t} \left[ \frac{J}{l_a} k (E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) + \frac{K_t^2}{R} \dot{\phi} \right] \quad (56)$$

Es importante aclarar, que la ley de control que se presenta en (56), no es única y puede ser representada en diferentes formas.

## B. Controlador para posición de equilibrio

La realimentación de variables de estado es una técnica de control mediante la cual es posible modificar las frecuencias naturales del sistema físico a controlar, con el fin de hacerlas estables siempre que el sistema sea controlable, es decir, que la matriz de controlabilidad  $C_o$  de la realización  $(A, B, C)$ , posea un rango  $n$ , donde  $n$  es el orden del sistema [7].

Regularmente, el diseño de controladores mediante realimentación de variables de estado se basa en obtener polos estables en lazo cerrado mediante la metodología de reubicación de polos, lo que generalmente se conoce como metodología de

regulación, adicional a esto se puede encontrar ganancias que permitan el seguimiento de referencia a una de las variables del sistema, siempre que este no posea ceros reales en el origen del plano complejo y que se determinan a partir de la función de transferencia que relaciona la entrada activa con la variable de interés, porque esta característica conduce a ganancias infinitas para lograr un seguimiento de referencia, lo que sería imposible de lograr [7].

Dadas las condiciones mencionadas anteriormente es posible plantear una ley de control en espacio de estados como (57).

$$u(t) = K_r r(t) - K_f x(t) \tag{57}$$

Donde  $K_r$  es la constante para seguimiento de referencia,  $r(t)$  es la señal de referencia para una de las variables del sistema,  $K_f$  es la ganancia de realimentación que modifica los polos del sistema y  $x(t)$  es el vector de variables de estado, siendo  $u(t)$  la señal de control aplicada a los terminales del actuador [7].

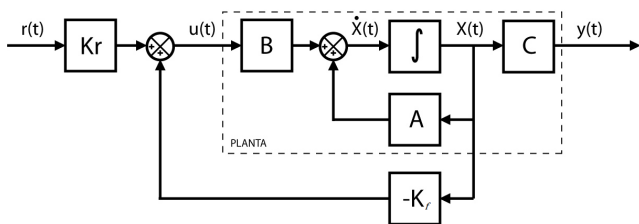


Figura 3. Esquema de control en lazo cerrado con regulación y seguimiento de referencia

La figura 3, presenta un diagrama de bloques donde se define la realimentación se variables de estado con seguimiento de referencia.

**C. Integración de controladores**

Con el fin de realizar un controlador que lleve la planta desde su posición de equilibrio natural (posición vertical inferior), hasta el punto de equilibrio inestable (posición vertical superior), se propone la realización de una conmutación de controladores por “Swing up” y realimentación de variables de estado en un punto lo suficiente cercano a la zona de equilibrio, donde el controlador local, logre estabilizarlo de forma exitosa. Para el diseño de este controlador se tomará como región de conmutación el intervalo  $15^\circ \leq |\theta| \leq 25^\circ$ , sin querer decir que sea la única opción posible, ya que esto depende de la robustez del controlador y las limitaciones físicas de los sistemas. [6]

La figura 4, Muestra la interconexión de bloques y la conmutación de controladores para la planta péndulo invertido rotacional.

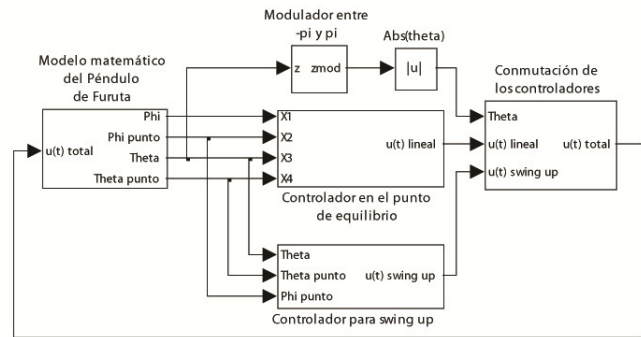


Figura 4. Diagrama de bloques para control global del péndulo de Furuta.

Los parámetros de diseño para la realización de las simulaciones, se muestran en el sistema de ecuaciones (58).

Donde  $k$  representa la constante de diseño que permite alcanzar la posición de equilibrio para el controlador “swing up”.  $E_i$  y  $E_0$  son las energías inicial y final del modelo del péndulo simplificado.  $K_f$  y  $K_r$ , representan las ganancias de realimentación para reubicación de polos y seguimiento de referencia.

$$\begin{aligned} k &= 22.99 \\ E_i &= -2mg \\ E_0 &= 0.05 \\ K_r &= [-0.6972] \\ K_f &= [-0.6972 \quad -0.5197 \quad -30.6396 \quad -2.3932] \end{aligned} \tag{58}$$

**IV. RESULTADOS**

Esta sección presenta las simulaciones correspondientes al diseño del controlador para regulación de las variables de estado y seguimiento de referencia. Para este propósito utilizó MATLAB 2010a en un computador Intel Core 2 Duo E8400, 4GB RAM.

**A. Regulación de las variables de estado**

La regulación de variables de estado supone que después de pasado el estado transitorio de un sistema controlable, todas las variables de estado llegarán a cero en un corto periodo y se mantendrán allí, debido a la acción de la señal de control y mientras no se presenten perturbaciones que saquen la planta de la región de operación que esté bajo de influencia del controlador lineal.



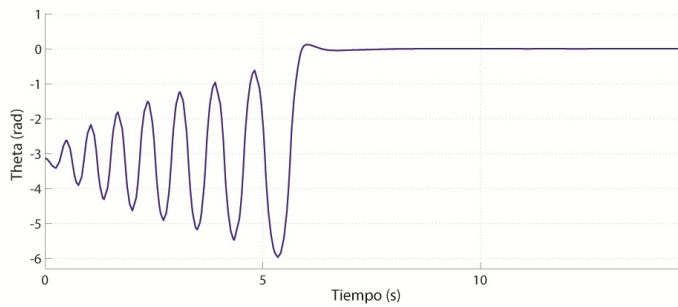


Figura 5. Comportamiento de la posición angular del péndulo respecto al tiempo.

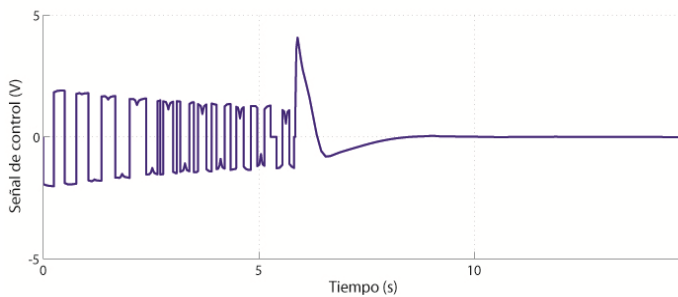


Figura 6. Comportamiento de la señal de control para regulación de las variables de estado

Las figuras 5 y 6, muestran el comportamiento de la posición angular del péndulo y la señal de control, respectivamente, en un periodo de 15s. Se puede observar que el controlador por “Swing up” logra llevar a la barra pendular hasta una posición cercana del punto de equilibrio en un tiempo aproximado de 6s y entra en operación el controlador local por realimentación de variables de estado, logrando el objetivo de regulación en un muy corto periodo de tiempo. La señal de control tiene un comportamiento suave y alejado de los límites operativos del motor.

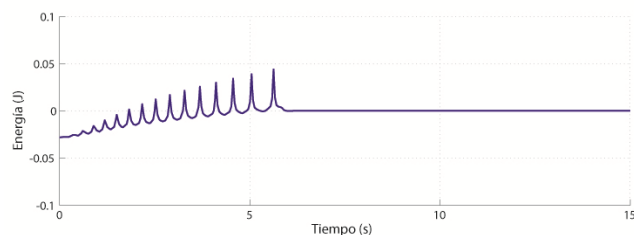


Figura 7. Comportamiento de la energía del péndulo para “swing up”

La figura 7 es una muestra clara de que la función para regulación energía de la planta propuesta en la ley de control (56), lleva el péndulo desde su valor energético inicial hasta una energía de referencia que fue definida como cero en la posición vertical superior. Por facilidad no se volverá a mostrar la función de energía de la planta, puesto que siempre tendrá el mismo comportamiento en la

región de operación del controlador por regulación de energía.

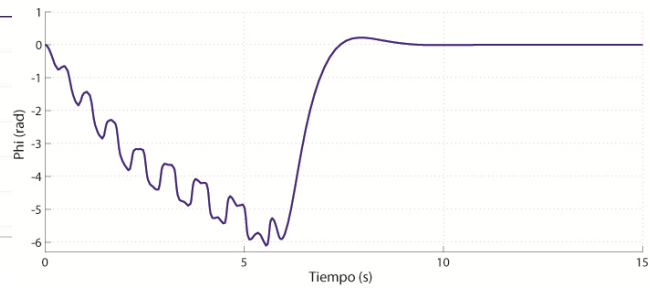


Figura 8. Comportamiento de la posición angular de la barra horizontal respecto del tiempo.

La figura 8, muestra que el comportamiento de la barra horizontal en un periodo de 6s hace balancear el péndulo, hasta lograr la posición de equilibrio y luego se estabiliza en cero, cumpliendo con el principio de regulación de las variables de estado.

### 1. Seguimiento de referencia

El seguimiento de referencia es una característica que poseen algunos estados de la planta, para tomar referencias diferentes de cero sin afectar la regulación de las demás variables de estado consideradas en el modelo matemático del sistema. La única variable de estado que permite seguimiento de referencia en el sistema físico péndulo rotacional invertido, es la posición angular de la barra horizontal, puesto que es la única que no presenta ceros en el origen del plano complejo.

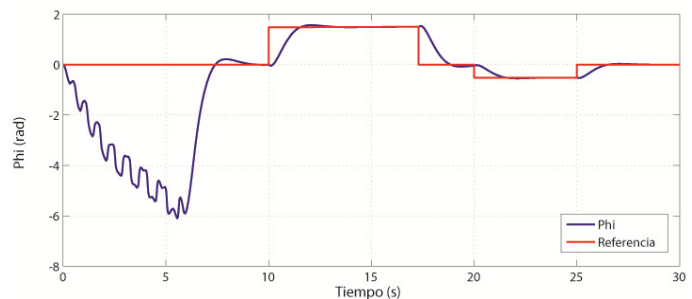


Figura 9. Seguimiento de referencia para una señal tipo escalón

La figura 9 muestra el comportamiento de la posición angular de la barra horizontal, cuando se da una señal de referencia tipo escalón, es posible observar que después de que la posición angular de la barra pendular llega al punto de equilibrio, la barra horizontal tiende a estabilizarse sobre la señal de referencia, llegando a cada una de sus escalas en un tiempo aproximado de 2s.

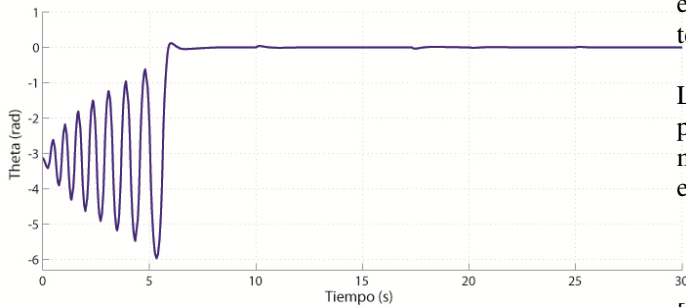


Figura 10. Posición angular del péndulo para seguimiento de una señal de referencia tipo escalón.

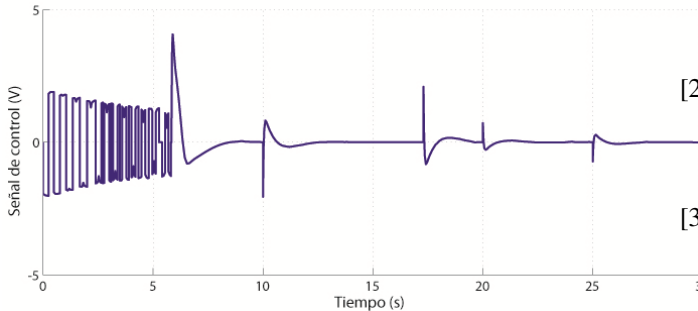


Figura 11. Señal de control para seguimiento de referencia de una señal tipo escalón.

Las figuras 10 y 11, muestran el comportamiento de la posición angular de la barra pendular y la señal de control, para el caso de seguimiento de referencia de una señal tipo escalón en la barra horizontal. Es posible observar que durante las variaciones de la señal de referencia tanto el péndulo como la señal de control tienen pequeñas variaciones y luego se estabilizan en sus posiciones de estado estable, hasta una nueva variación de la señal de referencia.

## V. CONCLUSIONES

Se desarrollaron dos modelos matemáticos diferentes basados en funciones de energía para realizar un control completo en el sistema físico péndulo rotacional invertido, mostrando así, que para una planta se pueden obtener distintos modelos, dependiendo de las necesidades del diseñador y los requerimientos de la técnica de control.

La formulación con funciones de energía mediante el uso de los conceptos de la mecánica Newtoniana para el “Swing up” del péndulo, puede ser aplicado a cualquier sistema pendular, ya que no está sujeta a las características específicas de la planta, si no que se presenta como un modelo simplificado, pudiendo este ser adaptado a plantas como el péndulo invertido y el péndulo invertido con rueda de reacción.

La regulación de la energía del sistema permitió llevar el péndulo a regiones cercanas al punto de operación y así, realizar una conmutación suave, que no altere el estado

energético del sistema, es decir, estabilizarlo a partir de la técnica de control lineal, sin sacarlo de su punto de operación.

La técnica de control por realimentación de variables de estado presentó una eficiente acción de control para estabilizar y mantener el péndulo en la posición de equilibrio sin grandes exigencias en la señal de control.

## REFERENCIAS

- [1] J. Aracil, F. Gordillo, “El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 2, pp. 8-19, Apr. 2005.
- [2] K. J. Aström, K. Furuta, “Swinging Up a Pendulum By Energy Control,” *presented at IFAC 13th World Congress, San Francisco, California, 1996*.
- [3] M. Iwashiro, K. Furuta, K. J. Aström, “Energy Based Control of Pendulum” *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications.*, pp 715-720.
- [4] C. Vieira, “Realização de um controlador utilizando Redes Neurais para o controle de estabilização do Péndulo de Furuta,” Bsc. Dissertation. Dept. Tec. Univ. Federal de Amazonas, 2010.
- [5] D .S. De La Torre. “Control del Péndulo de Furuta”, Master’s thesis, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. 2004.
- [6] C. A. OSORIO, “Diseño, Construcción y Control de un Péndulo Invertido Rotacional Utilizando Técnicas Lineales y No Lineales,” Master's thesis, Univ. Nacional de Colombia. 2009.
- [7] D. Giraldo, E. Giraldo *Teoría de Control Análogo*, 1st ed., Pereira: UTP, 2009.