Una jerarquía de razonamiento estadístico sobre la noción de predicción/incertidumbre elaborada con profesores de secundaria

A hierarchy of statistical reasoning about prediction/uncertainty: A study with junior secondary school teachers

Ernesto Sánchez

RESUMEN

En este artículo se ofrece una posible respuesta a la pregunta: ¿Cómo evoluciona el razonamiento de los profesores en servicio durante una actividad de predicción en situación de incertidumbre con apoyo de un software de estadística? La respuesta se presenta en forma de una jerarquía de razonamiento de la noción de predicción, la cual es una instancia de la jerarquía general de razonamiento estadístico propuesta por Garfield. Para elaborar dicha jerarquía se organizaron las respuestas que 6 profesores de secundaria dieron a una pregunta de predicción en una situación de azar. Durante la entrevista se revelaron las formas en que los profesores conciben y razonan con importantes nociones de probabilidad como son: *evento, ley de los grandes números y 'aproximación'*.

PALABRAS CLAVE:

- *Evento*
- *Predicción*
- *Incertidumbre*
- *Simulación*
- *Ley de los grandes números*

ABSTRACT

This paper offers a possible answer to the question: How does the reasoning of the teachers-in-service evolves during an activity of prediction in face on uncertainty supported by statistical software? The answer to the question is presented in form of a hierarchy of reasoning on the notion of prediction, which in this case is the general hierarchy of statistical reasoning by Garfield. The answers of 6 secondary schools' teachers-in-training to a question on prediction in a chance setting were arranged to form the hierarchy. The manner the teachers conceive and reason on important notions of probability such as events, law of the big numbers and approximation are revealed during the interview.

KEY WORDS:

- *Event*
- *Prediction*
- *Uncertainty*
- *Simulation*
- *Law of the big numbers*

Relime (2010) 13 (4-II): 409-422. Recepción: Junio 3, 2009 / Aceptación: Mayo 3, 2010.

RESUMO

Neste artigo se oferece uma possível resposta à questão: Como evolui o raciocínio de professores em exercício, sobre a noção de predição em uma situação que envolva aleatoriedade? A resposta se apresenta em forma de uma hierarquia de raciocínio sobre a noção de predição, a qual é uma instância da hierarquia geral do raciocínio estatístico proposta por Garfield. Para elaborar tal hierarquização, organizou-se as respostas que seis professores de educação secundária deram para uma pergunta de predição em uma situação que comportava a ação do acaso. Durante a entrevista se revelaram as formas segundo as quais os professores concebem e raciocinam com noções importantes de probabilidade, tais como: evento, lei dos grandes números e aproximação.

PALAVRAS CHAVE:

- *Evento*
- *Predição*
- *Incerteza*
- *Simulação*
- *Lei dos grandes números*

RÉSUMÉ

Dans ce travail on offre une possible réponse à la question, ¿comment est-ce que le raisonnement des maîtres en service, sur la notion de prédiction posée dans une situation aléatoire, évolue? On présent une réponse a cette question par moyen d'une hiérarchie de raisonnement sur la notion de prédiction. Cette hiérarchie est une application de la hiérarchie plus générale du raisonnement statistique proposée par Garfield. On a arrivé à élaborer cette hiérarchie en organisant les réponses des 6 maîtres de collège, lesquelles on a obtenu par moyen des interviews. Les maîtres ont répondu à une question de prédiction posée dans une situation aléatoire. Pendant les interviews on a découvert les formes dans lesquelles les maîtres conçoivent et raisonnaient avec des notions importants dans la probabilité tels que événement (résultat), approximation et la loi des grands nombres.

MOTS CLÉS:

- *Evénement*
- *Prédiction*
- *Incertitude*
- *Simulation*
- *Loi des grands nombres*

1 Introducción

En la sociedad actual los ciudadanos comunes estamos inmersos en procesos masivos: las comunicaciones, el transporte, la telefonía, la economía, la salud, son ejemplos donde se presentan fenómenos derivados de, y que afectan a, las acciones y comportamiento de grandes masas. En estos fenómenos se refleja una idea clave de la estadística, a saber, la relación entre la incertidumbre que gobierna los casos individuales y la predictibilidad de todo el conjunto. La noción frecuencial de probabilidad juega un papel importante en la modelación de esos fenómenos; esta modelación es muy útil para las empresas y gobiernos que toman decisiones que involucran grandes números. Pero un ciudadano común también tiene que tomar decisiones frente a la incertidumbre pero no tiene el control sobre procesos masivos ¿para él, la probabilidad es sólo para comprender los fenómenos y no para tomar decisiones personales? Un sujeto muchas veces se enfrenta a situaciones que sólo ocurrirán una vez y no tendrá la oportunidad de evaluarla a la larga. En este estudio se enfrenta a los estudiantes a una situación simple de incertidumbre en que tiene que prever lo que ocurra en un experimento, la simulación sirve de soporte para contrastarla.

2 Preguntas de investigación

¿Cómo evoluciona el razonamiento de los profesores en servicio durante una actividad de predicción en situación de incertidumbre con apoyo de un software de estadística? ¿Qué tipo de dificultades y concepciones se revelan durante ese proceso? Como respuesta se ofrecerá una jerarquía que recoge rasgos de las respuestas observadas y los organiza por niveles de complejidad; con esto se establece una posible trayectoria que va de razonamientos parciales, fragmentarios o inadecuados a razonamientos completos y adecuados.

3 Marco conceptual

Las nociones que en este apartado se exponen son elementos clave para entender la naturaleza de la jerarquía que aquí se propone y constituyen nuestro marco conceptual.

3.1. *Noción de evento*

El significado de 'evento' en el lenguaje común es el de acontecimiento, se dice de algo que ocurre, de un acontecimiento actual. En cambio, en probabilidad un evento es potencial, en dos sentidos: el primero es que un evento puede 'ocurrir', pero también puede 'no ocurrir', su existencia se presenta como posibilidad y no como una realidad actual; el segundo, y más importante, se refiere a que un evento de más de un elemento (no singular) ocurre cuando uno de sus elementos ocurre; es decir, el resultado del experimento es un elemento del evento, de tal manera que cuando ocurre no hay una identificación entre el resultado actual y el evento. Una confusión entre resultado actual y evento potencial se manifiesta en situaciones como la siguiente: Se le dice a un estudiante que se lanza un dado una sola vez y se le pregunta si el evento {1, 2} puede ocurrir; responde inmediatamente que *no*, se le pregunta ¿por qué?, responde: *Porque para que pueda ocurrir [el evento {1, 2}] se tiene que tirar el dado al menos* 2 *veces* (Sánchez, 1996). Esta dificultad también se manifiesta cuando se les pide a los estudiantes que den un ejemplo de una experiencia aleatoria y un evento de ésta; la totalidad de estudiantes de bachillerato que participaron en el estudio ofreció un evento de un solo elemento (evento singular) (Hernández, 2004).

3.2. *Noción de predicción*

Se entiende por predicción un enunciado en el presente que afirma que algo ocurrirá en el futuro; esta idea se utiliza de dos formas distintas en probabilidad. Una se presenta al definir un experimento aleatorio, el cual se caracteriza por el hecho de que no se puede predecir con exactitud el resultado. Ortiz de Haro (1999) analiza varios libros de texto de España y observa que todos utilizan la impredecibilidad para caracterizar los experimentos aleatorios, por ejemplo, *un experimento es aleatorio si es imposible predecir el resultado cada vez que se realiza* (definición de un libro de texto). Por otro lado, frecuentemente se utiliza la palabra predicción en probabilidad en el sentido de estimar una tendencia; por ejemplo, en los estándares curriculares se incluye un tema, entre cinco que cubren el programa, que usa el término predicción: *desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en los datos* (NCTM, 2000, pp. 248 y 324); este enunciado se ubica en un contexto estadístico de manera que ahí se debe entender por predicción un evento probable, sin comprometer su significado a una ocurrencia necesaria. Hay entonces una ambigüedad en el término predicción, la cual se manifiesta cuando se les pide a los participantes que digan qué creen que ocurrirá al realizar un experimento aleatorio; es correcto decir 'no se puede saber', pero es más interesante prever un evento probable.

3.3. *Ley de los grandes números y la ley cero-uno*

Un tipo de predicción se relaciona con el enfoque frecuentista de la probabilidad. A pesar de que no se puede decir con exactitud qué ocurrirá en una sola realización de un experimento aleatorio, sí se puede prever con cierta precisión lo que ocurrirá en un gran número de realizaciones. Esta idea queda establecida en la llamada ley de Los Grandes Números, cuyo caso más simple se enuncia en seguida:

> Si un experimento de Bernoulli, con probabilidad de éxito *p,* se repite N veces y si ε es un número arbitrariamente pequeño, la probabilidad de que el número de éxitos esté entre $N(p\text{-}\varepsilon)$ y $N(p+\varepsilon)$ tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

Es conveniente observar que el número de éxitos va a ser un número relativamente cercano al valor esperado Np, pero de ningún modo la proposición asegura que ambos números serán iguales, ni siquiera en el límite. Lo que afirma el teorema es que las frecuencias relativas estarán arbitrariamente cercanas a la probabilidad cuando la N crece.

Finalmente la ley cero-uno se puede utilizar para hacer otro tipo de predicción; informalmente se puede expresar una parte de este teorema de la siguiente manera: *Si un evento A tiene probabilidad positiva, entonces con probabilidad 1 ocurrirá al menos una vez en un número infinito de repeticiones*. La predicción consiste entonces en decir que si se repite un número suficiente de veces un experimento aleatorio en algún momento ocurrirá un evento dado que tenga probabilidad positiva.

3.4. *Predicción/Incertidumbre*

Gal (2005) ha propuesto 5 componentes para caracterizar el alfabetismo estadístico, una componente consiste de la grandes ideas de probabilidad, la cuales son *aleatoriedad*, *variación*, *independencia* y la relación *predicción/incertidumbre*. En los apartados anteriores se han mostrado algunas formas que toma esta relación. Aquí se discutirá el tipo de predicción que consiste en esperar que ocurra un evento con una probabilidad dada; por ejemplo, si se lanzan 100 lanzamientos de una moneda y se observa el número de soles es lícito predecir que ocurrirán entre 40 y 60 soles con probabilidad aproximada de 95%; la estimación se hizo con base en la llamada *regla empírica*. Este tipo de predicción aprovecha la estructura de la situación y observa la variación posible de manera que permite una predicción significativa. Sin embargo, dicha predicción no elimina la incertidumbre. Conviene observar que hay dos sentidos en los que se presenta la incertidumbre. Por un lado, aún queda un 5% de probabilidad de que un resultado quede fuera de ese intervalo; es decir, queda la posibilidad de que la predicción no ocurra. Por otro, no se predice el número exacto que ocurrirá, sino que se ofrece un rango de posibles valores.

A diferencia del pensamiento determinista, los razonamientos estadísticos de una manera o de otra siempre contienen incertidumbre; cuando se le pide una predicción a una persona sin intuición estadística creerá que tiene que predecir con precisión (un evento singular) y que para hacer una *verdadera* predicción ésta tiene necesariamente que ocurrir. En cambio, alguien con intuición estadística admitirá algo de incertidumbre, por ejemplo, ofreciendo un rango de posibilidades.

3.5. *La simulación y la realidad*

A pesar de que las personas todos los días en su vida diaria predicen y toman decisiones en situaciones de incertidumbre, la conceptualización de las bases sobre las cuales se realizan les resulta desconocida; la experiencia no es suficiente para la teoría. Una manera de avanzar en desarrollar conceptos sobre la predicción y toma de decisiones frente a incertidumbre es mediante la elaboración y estudio de modelos de las situaciones que permita a los aprendices contrastar suposiciones, hacer y valorar predicciones, definir 'entidades' y realizar procesamientos de datos; los software dinámicos son útiles para esos fines (DelMas, 1998). En particular, la incertidumbre tiene que incluirse en los modelos y esto puede hacerse a través de simulaciones basadas en comandos que generan datos aleatorios.

A pesar de las posibilidades que ofrece la simulación para la comprensión de conceptos de probabilidad, hay una gran dificultad para comprender la relación entre una situación aleatoria real y un modelo de ella. La elección de los rasgos de la situación que se traducen al modelo y la manera en que en éste se pone a funcionar exige un gran esfuerzo de abstracción que los estudiantes y profesores deben aprender a realizar. La situaciones clásicas de juego, como monedas, dados y extracción de bolas de una urna, pueden facilitar la conexión entre situaciones aleatorias reales (aunque idealizadas) y situaciones simuladas.

En el presente estudio se ha elegido una situación de bolas extraídas de una urna para explorar la manera en que los profesores ponen en juego sus nociones de predicción, en particular, simulando en la computadora esa situación de incertidumbre.

4 Metodología

Participantes. Este estudio se llevó a cabo con seis profesores de nivel secundaria (atienden alumnos de 12 – 15 años de edad). Todos estaban inscritos en el primer cuatrimestre de un programa de una maestría en educación. A pesar de que son profesores de secundaria su formación inicial es diferente: sólo dos tienen formación inicial de profesor, tres son ingenieros y una licenciado en administración. Su experiencia docente va de 6 a 14 años.

Instrumentos. Como parte de sus estudios de maestría, los 6 maestros participaron en actividades con Fathom durante 2 semanas de 3 horas por semana en la que aprendieron rudimentos del software e hicieron simulaciones para calcular probabilidades. Al comenzar la tercera semana, cada estudiante tuvo una entrevista de 50 minutos cada una. La entrevista estuvo basada en el siguiente protocolo:

> Se tiene una urna con 3 bolas; una bola con la letra A, una con la letra B y otra con la letra C. Imagina que sacas una bola al azar y anotas su letra. Regresas la bola a la urna. Se repite 30 veces el experimento. Llena la siguiente tabla escribiendo cuántas veces crees que saldrá cada bola (ver figura 4.1)

Una vez que el profesor da su respuesta se le pregunta *¿Por qué crees que puede ocurrir este resultado?* Con base en la escala que aparece enseguida estima [subjetivamente] la probabilidad del evento que propusiste: *Imposible, Casi imposible, Muy poco posible, Poco posible, Igualmente posible, Posible, Muy posible, Casi seguro, Seguro*. Simula la situación para estimar la probabilidad.

Bola	Frecuencia
A	
B	
C	

Figura 4.1. ¿Cuántas veces saldrá la bola?

Después de que los estudiantes se percataban de que era casi imposible que ocurrieran los eventos singulares que proponían; el entrevistador sugería considerar eventos no singulares. Entonces, cuando sugerían otros eventos, se les repetían las mismas preguntas indicadas en el párrafo anterior. Hasta aquí el protocolo de la entrevista.

Procedimiento de análisis. Se observaron y transcribieron las entrevistas. Se buscaron evidencias de la manera en que los profesores entienden las nociones involucradas y el papel que juegan los resultados del cálculo (que el software realiza) en sus razonamientos.

Las evidencias encontradas se clasificaron para formar una jerarquía; para la elaboración de ésta se utilizó el modelo propuesto por Garfield (2002) para describir el desarrollo del razonamiento estadístico. Dicho modelo consta de 5 niveles: 1) *Razonamiento idiosincrático*. Los aprendices conocen algunas palabras y símbolos estadísticos y los utilizan pero sin entenderlos completamente, a veces incluso los entienden incorrectamente y los mezclan sin relacionarlos con la información. 2) *Razonamiento verbal*. Los aprendices conocen verbalmente los conceptos, pero no pueden aplicarlos a los problemas. 3) *Razonamiento transicional*. Los aprendices son capaces de identificar correctamente uno o dos elementos de un proceso estadístico sin integrarlas totalmente. 4). *Razonamiento procedimental*. Los aprendices son capaces de identificar los elementos de un concepto o proceso estadístico pero no logran integrar totalmente esos elementos o entender el proceso en su conjunto. 5) *Razonamiento integrado del proceso*. Los aprendices entienden por completo un proceso estadístico, coordinan adecuadamente sus elementos. Conocen el lenguaje estadístico y pueden explicar los procesos utilizando ese lenguaje.

5 Razonamientos acerca de la relación predicción/incertidumbre

En el siguiente apartado se exponen momentos en que los profesores expresan su pensamiento acerca de algún aspecto del problema. En sus intentos por darle sentido a la situación surgen nociones importantes, como las nociones de evento, predicción, aproximación y ley de los grandes números. Se han organizado los diferentes episodios en los niveles a los que pertenece el razonamiento que expresan; el hilo conductor ha sido buscar e interpretar fragmentos de las entrevistas que nos den indicios de la evolución de ideas relacionadas con la relación *predicción/incertidumbre*.

5.1. *Nivel 1. Nivel idiosincrático*

Noción de Evento. Mónica, Weber y Genaro tienen dificultades para razonar con un evento compuesto no singular; mencionan el evento “que las frecuencias de las tres bolas estén entre 9 y 11”, pero no pueden determinar uno de sus elementos. Cuando el entrevistador le pide a Mónica un resultado que satisfaga ese evento ella responde:

Mónica: pudiera ser un 8, un 10, un 11, un 12,

Ella describe la incertidumbre en términos del resultado de una sola bola sin ser capaz de coordinar el resultado de las tres bolas. De la misma manera, cuando el entrevistador le pide a Weber que juzgue qué tan posible es el evento “9, 11, 10”, éste también se fija en una sola variable:

Weber: Para el 9 me parece que es posible, para el 11…

Por otro lado, Genaro no ve mucha diferencia entre el evento singular “12, 7, 11” y el evento “que las frecuencias estén entre 7 y 12”; es posible que vea que el evento “12, 7, 11” tiene la propiedad “estar entre 7 y 12” sin ser consciente de que esta propiedad genera un evento que contiene aquel evento.

Noción de predicción. En lo que sigue se observa que para Mónica y Lorenzo 'predecir lo que va a ocurrir al realizar el experimento' es equivalente a dar un elemento del Espacio Muestral; para el resto es dar un evento singular 'cercano' al 'valor teórico'. Mónica y Lorenzo perciben una variabilidad total, los demás, no consideran la variabilidad.

Entrevistador: Tú esperabas este resultado [Se refiere al resultado que ocurrió que fue 8, 10, 12]; aunque tú dijiste 12, 9, 9, ahora dices que esperabas este otro

Mónica: ¿Exactamente este? No, en realidad yo esperaba que pasara cualquier resultado.

De la misma manera, Lorenzo no espera que su predicción ocurra, confiesa que sólo es un ejemplo:

Entrevistador: Al hacer 30 extracciones con remplazo dices que el número de veces que ocurrirá A será 12, de B será 9 y de C será 11, ¿Correcto?

Lorenzo: Por poner un ejemplo.

Evento, probabilidad de un evento y aproximación. Una confusión frecuente es identificar la 'probabilidad del evento' con el 'evento', hablan por ejemplo de que 'ocurra la probabilidad'. También cuatro profesores hablan de 'aproximación' al 'valor teórico'. Por ejemplo, Weber expresa ambas ideas al explicar por qué propuso el resultado "9, 11, 10":

Weber: Porque es un experimento aleatorio y la probabilidad de cada bola es la misma, pero es muy difícil que ocurra la probabilidad teórica; nunca ocurrirá 10, 10, 10 aunque los resultados van a ser próximos a este resultado… aunque repita muchas veces ese experimento nunca voy a llegar a esa probabilidad, esta debía de ser 1/3 de cada una de ellas.

En el siguiente fragmento se verá que Lorenzo supone que los resultados serán próximos al valor teórico; al pedirle que estime la probabilidad del evento "que las frecuencias están entre 7 y 12" responde:

Lorenzo: Podría ser un 30%; es que puede variar porque como son eventos diferentes vamos a tener resultados diferentes, pero todos siempre aproximándose a la probabilidad teórica, o a la probabilidad de obtener la bola A, la bola B y la Bola C que es un tercio cada una…

Por otro lado, Genaro también habla de la ocurrencia de la probabilidad; también confunde el tamaño de la muestra (30) y las repeticiones del experimento:

Entrevistador: ¿por qué propones este resultado?

Genaro: Porque este resultado se aproxima algo, pero no mucho, a "10, 10, 10". Como 30 veces son muy pocas repeticiones todavía estamos muy lejos de la probabilidad clásica ¿no?, pero creo que las frecuencias ya comienzan a oscilar alrededor de 10.

En conclusión, hablan de eventos pero la manera en que los piensan no corresponde con la noción apropiada del término. También hablan de predicción pero el significado real que le atribuyen es el de 'cualquier cosa puede ocurrir'. Hablan de la probabilidad como si fuera un evento y de 'aproximación a la probabilidad' cuando quieren decir 'resultados próximos' al valor esperado.

5.2. *Nivel 2. Razonamiento verbal*

Los profesores conocen que hay una ley que habla de una 'aproximación a la probabilidad' cuando la experiencia se repite muchas veces, sin embargo, no pueden aplicarla al problema actual. El obstáculo es que no consideran las frecuencias relativas, pues siempre piensan y se refieren a las frecuencias absolutas. Por ejemplo, Weber menciona la 'Ley de los grandes números'; pero no la concreta en el problema. Una dificultad que emerge en el proceso de simulación consiste en confundir el tamaño de la muestra (30) con el número de repeticiones de la experiencia para apreciar la frecuencia con la que ocurren los eventos de interés; Weber muestra esta confusión:

Entrevistador: ¿Tú crees que nunca vas a obtener 10, 10, 10?

Weber: Alguna vez sí, pero no nada más tengo que hacerlo con 30 repeticiones, tengo que extraer muchas más veces […] He escuchado que dicen que es la ley de los grandes números ¿no? Eso que se vayan acercando pero nunca llegan […] yo considero que nunca voy a llegar a 10, 10, 10.

Al margen de la confusión entre muestra y repeticiones del experimento, Weber piensa en dos leyes, la primera es la *ley cero-uno* que asegura que obtendrá a la larga el evento "10, 10, 10"; la otra es la *ley de los grandes números*, sin embargo, aquí al estar ausentes las frecuencias relativas, la idea que expresa es incorrecta. Estas ideas también la tienen Lorenzo y Genaro, como se puede apreciar en los fragmentos expuestos en la última parte de la sección anterior.

En conclusión, los profesores hablan en términos de probabilidad, aproximación y ley de grandes números pero no son capaces de aplicarlos correctamente a la situación.

5.3. *Nivel 3. Razonamiento Transicional*

La noción de predicción de Alonso es más elaborada. Predice el evento “14, 12, 4”, pero reconoce que es muy poco probable. Al realizar una simulación ocurre “5, 13, 14” y se le pregunta si esperaba ese resultado. Afirma que en cierto sentido si lo esperaba, pero su argumento es más sofisticado que el de sus compañeros pues es consciente tanto de la aleatoriedad como de la independencia de las experiencias:

Entrevistador: ¿Esperabas este resultado?
Alonso: Se puede decir que sí
Entrevistador: ¿Por qué?
Alonso: Buena pregunta… porque es un experimento aleatorio y, cada vez que se realiza el experimento, sus resultados son independientes

En general, a lo largo de la entrevista, los profesores comprendieron que una predicción no tiene que ser un evento singular, percibieron que estos tienen muy pocas probabilidades de ocurrir:

Entrevistador: ¿Cómo consideras el evento de obtener 12 veces la bola A, 9 veces la bola B y 9 veces la bola C? Como lo consideras: imposible, casi imposible muy poco posible, etc.
Lorenzo: ¿Qué exactamente obtenga esta consecuencia?
Entrevistador: Si
Lorenzo: Considerando la probabilidad yo pienso que es muy poco posible

Se dieron cuenta que aunque los resultados son variables se puede esperar que con cierta probabilidad se encuentren en determinado rango de valores:

Entrevistador: ¿Qué contestarías a la pregunta inicial?
Gimeno: Respondería que es muy probable que las frecuencias caigan entre 4 y 16
Entrevistador: ¿Puedes dar un caso de ese evento?
Gimeno: El resultado que obtuve al principio “8, 11, 11” está en ese rango, pero también “5, 13, 12” y así muchos otros.

Los profesores comenzaron a aceptar que una predicción puede ser un evento no singular cuyos elementos están alrededor del valor esperado (incluyéndolo) y que una predicción lleva asociada a una probabilidad. De alguna manera, permitieron que hubiera incertidumbre en una predicción.

5.4. *Nivel 4. Razonamiento procedimental*

Pueden calcular la probabilidad de una predicción e inversamente, dada una probabilidad encontrar un evento (predicción) con esa probabilidad; comprenden que entre más elementos contenga la predicción, la probabilidad de que en efecto ocurra se acercará más a la certeza.

Entrevistador: En la escala de ‘casi imposible’ a ‘casi seguro’ ¿Cómo ubicas al evento “obtener una frecuencia de la bola A de 8 a 11, de la bola B de 8 a 11 y de la bola C de 8 a 11”?
Gimeno: Como ‘posible’; yo creo que ocurrirá en un 25%
Entrevistador: Calcula su probabilidad mediante simulación.
Gimeno: [Lo hace y obtiene 20%] Me pase un poquito.

Aunque Mónica tenía dificultades al principio para entender la idea de evento, después puede hacer estimaciones subjetivas de la probabilidad de los eventos y comparar su predicción con lo que ocurre con la simulación:

Entrevistador: ¿Qué evento crees que ocurriría el 50% de las veces?
Mónica: Pienso que como de 7 a 12 [Quiere decir: ‘que las frecuencia de cada bola estén entre 7 y 12]
Entrevistador: realiza la simulación para verificarlo.
Mónica: [Simulan 1000 repeticiones del experimento y el software cuenta las veces que ocurre el evento ‘de 7 a 12’, observa que ocurre en 48% de las veces] No da, pero está muy cercano ¿Qué pasaría si le pusiéramos entre 8 y 12?
Entrevistador: Prueba, ya sabes modificar el programa.
Mónica: [Simula el evento “7 a 12” y obtiene que el 63% cae en ese rango] Me pasé, creo que es mejor de 7 a 12.

Se puede observar que los profesores al final de las entrevistas además de entender que una predicción es un evento no singular también pueden estimar las probabilidades de diferentes eventos con ayuda del software. Esto les permite calibrar sus predicciones, es decir, medir la incertidumbre de la predicción.

5.5. *Nivel 5. Razonamiento integrado del proceso.*

El protocolo de la entrevista no daba oportunidad para que los profesores realizaran razonamientos que se pudieran clasificar en este nivel.

6 Discusión y conclusiones

La relación predicción/incertidumbre es una componente esencial del pensamiento probabilístico. La jerarquía que se ha elaborado a partir de los registros de las expresiones de los profesores frente a una tarea de predicción constituye una posible trayectoria a lo largo de la cual los sujetos van resolviendo esa compleja relación. Al comienzo, no se sabe cómo reducir la incertidumbre, para los sujetos una predicción no tiene ningún valor práctico pues en realidad ‘cualquier cosa puede ocurrir’. Una forma más avanzada de entender la relación es pensar la predicción en un número grande de repeticiones de la experiencia, ya sea como ley cero-uno, ya como ley de los grandes números. La manera intuitiva de pensar estas ideas por parte de los profesores queda en el nivel verbal, pues no son capaces de aplicarlas apropiadamente. De cualquier manera, al evocarlas, los sujetos intentan reducir la incertidumbre de la situación, pues con las leyes se puede asegurar resultados seguros, es decir, la predicción al final ocurrirá.

TABLA I.
Jerarquía que describe diferentes etapas en la comprensión de la componente predicción/incertidumbre.

Nivel	Se caracteriza por
Nivel 1. Razonamiento idiosincrático	Hablan de eventos (predicciones) pero la manera en que los piensan no corresponde con la noción apropiada del término. El significado real que atribuyen a una predicción es el de 'cualquier cosa puede ocurrir'. No saben cómo reducir la incertidumbre.
Nivel 2. Razonamiento verbal	Los profesores hablan en términos de probabilidad, aproximación y ley de grandes números pero no son capaces de aplicarlos correctamente a la situación. Tratan de introducir certidumbre haciendo predicciones sobre la ocurrencia de un gran número de experimentos.
Nivel 3. Razonamiento transicional	Los profesores comenzaron a aceptar que una predicción puede ser un evento no singular cuyos elementos están alrededor del valor esperado (incluyéndolo) y que una predicción lleva asociada una probabilidad. De alguna manera, permitieron que hubiera incertidumbre en una predicción.
Nivel 4. Razonamiento procedimental	Los profesores además de entender que una predicción es un evento no singular también pueden estimar las probabilidades de diferentes eventos con ayuda del software. Esto les permite calibrar sus predicciones, es decir, medir la incertidumbre de la predicción.
Nivel 5. Razonamiento integrado del proceso	En este nivel los profesores debieran entender la relación entre las predicciones y la ley de los grandes números; en el sentido de que la probabilidad de una predicción tiende a la certeza cuando se repite el experimento y se consideran las frecuencias relativas. Sin embargo, en las entrevistas no se llegó a este nivel de razonamiento.

Una transición importante surge cuando los sujetos conciben como apropiado ofrecer como predicción un evento no singular. Con esto se retoma el espíritu inicial de la pregunta de que la predicción se refiera a un experimento que está por realizarse y no a un número indefinido de repeticiones. Al ocurrir esto el sujeto admite grados de incertidumbre en la predicción, pero no a la manera de que todo puede ocurrir, sino trazando líneas de demarcación entre eventos altamente probables (por ejemplo, que las frecuencias caigan entre 7 y 13) y poco probables (el complemento). Este paso sólo fue posible gracias a la interacción entre el sujeto y el entrevistador apoyados en el software. También con la ayuda de éste, en un nivel más avanzado los profesores pudieron calcular las probabilidades, es decir, medir la incertidumbre de su predicción. Este es un gran logro hacia el aprendizaje de la probabilidad.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, mediante los proyectos: 45063-H y 101708.

Referencias bibliográficas

DelMas, R. (1998). A framework for the evaluation of software for teaching statistical concepts. En IASE Round Table: *Role of Technology*. Recuperado de: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/8/7.delMas.pdf

Gal. I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Callenges for Teaching and Learning*. New York, USA: Springer.

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education, 10* (3). Recuperado de: www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html

Hernández, R. (2004). *Modelos explicativos y concepciones erróneas sobre nociones básicas de probabilidad de estudiantes de bachillerato* (Tesis inédita de doctorado). Cinvestav-IPN, México, D. F.

NCTM, (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ortiz de Haro, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato* (Tesis inédita de doctorado). Universidad de Granada, Granada, España.

Sánchez, E. (1996). Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción de independencia estocástica en profesores de bachillerato: Un estudio de casos (Tesis inédita de doctorado). Cinvestav-IPN, México, D. F.

Autor:

Ernesto Sánchez.
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
esanchez@cinvestav.mx