Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica

Aspects that influence the demonstration construction on dynamic geometry environments

Víctor Larios, Noraísa González González

RESUMEN

En este artículo se presentan algunas reflexiones sobre la construcción de la demostración geométrica en el ambiente escolar del nivel medio. Así como de algunos aspectos que influyen en tal construcción como es la herramienta a utilizar (software para Geometría Dinámica), las representaciones de los objetos geométricos, los tipos de justificaciones que se pueden utilizar y fenómenos relacionados con la visualización, como es el uso de prototipos y la rigidez geométrica.

PALABRAS CLAVE:

- *Demostración*
- *Software para Geometría Dinámica*
- *Visualización*

ABSTRACT

In this paper are presented some reflections on geometric proving on high school. Besides, the reflections includes some others aspects which affect the proving process as the used tool (Dynamic Geometry software), the geometric object representations, the several types of justifications and some phenomena related to visualization, as the prototypes and the geometric rigidity.

KEY WORDS:

- *Proof*
- *Dynamic Geometry software*
- *Visualization*

RESUMO

Neste artigo apresentam-se algumas reflexões sobre a construção da demonstração geométrica em l'escola do nível médio. A reflexão inclui alguns aspectos que influenciam tal construção como é l'instrumento a utilizar (software para Geometria Dinâmica), as representações dos objectos geométricos, os tipos de justificações utilizadas e a presença de fenómenos em relação com a visualização, como l'utilização de protótipos e a rigidez geométrica.

PALAVRAS CHAVE:

- *Demonstração*
- *Software para Geometria Dinâmica*
- *Visualização*

RÉSUMÉ

Dans cet article se présentent quelques réflexions sur la construction de la preuve géométrique dans l'école du niveau moyen. La réflexion inclut quelques aspects qui influencent une telle construction comme est l'outil à utiliser (software pour Géométrie Dynamique), les représentations des objets

MOTS CLÉS:

- *Preuve*
- *Software pour Géométrie Dynamique*
- *Visualisation*

géométriques, les types de justifications utilisées et la présence de phénomènes en rapport avec la visualisation, comme l'utilisation de prototypes et la rigidité géométrique.

1 Introducción

Es bien sabido que la demostración es una parte indispensable de la ciencia matemática y que puede ser un buen recurso para el aprendizaje de la Matemática, pero que se le omite constantemente por las dificultades que presentan su enseñanza y su aprendizaje. Nos interesa en este artículo mostrar algunas reflexiones al respecto que tienen que ver con el significado que se le otorga a la demostración en el caso de la Geometría y con el uso de la herramienta informática conocida como *Software para Geometría Dinámica* (SGD).

De inicio presentamos consideraciones sobre los objetos geométricos, pues su naturaleza y su representación resultan ser temas centrales para el estudio del proceso de construcción de la demostración en Geometría por sus características ligadas a sus representaciones gráficas.

Sin embargo, más que nada nos interesa hacer énfasis en que la demostración, como medio de validación del conocimiento matemático, tiene un significado más o menos bien determinado en la comunidad matemática y que no puede ser reproducido tal cual en la escuela, particularmente en el nivel medio que es al que dirigimos el artículo. Para esta reflexión tomamos en cuenta la noción de *institución* propuesta por Godino y Batanero (1994) como una comunidad que se interesa en resolver problemas comunes utilizando prácticas comunes, pues así podemos establecer la diferencia entre la *institución matemática*, compuesta por los miembros de la comunidad matemática, y la *institución de los enseñantes de la Matemática*, compuesta por los profesores de la Matemática y los alumnos que se encuentran en un contexto escolar. Esta diferencia permite proponer un significado acorde con el ambiente escolar de la demostración por medio del planteamiento de ciertas características específicas y manteniendo la relación con la institución de referencia, que es la matemática, a través de un proceso de transposición didáctica.

Terminamos el artículo mencionando algunos resultados y reflexiones que se presentan a partir de la observación de fenómenos cognitivos relacionados con la visualización y con el uso de SGD, pero que afectan directamente a la construcción de la demostración geométrica por influir (u obstaculizar) en el proceso de "ver" propiedades invariables que puedan llevar a la producción de justificaciones deductivas.

❷ Los objetos geométricos

Kuzniak, Gagatsis, Ludwig y Marchini (2007, pág. 955) han propuesto una serie de paradigmas progresivos en la Geometría:

- *Geometría I*. "Geometría Natural con fuente de validación relacionada cercanamente a la intuición y la realidad con el uso eventual de la medición y/o construcción con herramientas reales".
- *Geometría II*. "Geometría Natural y axiomática basada en leyes hipotético deductivas relativas a un conjunto de axiomas cercano lo más posible a la realidad sensorial".
- *Geometría III*. "Geometría formal y axiomática. (…) El conjunto de axiomas es independiente de la realidad y debería ser completo en el sentido formal".

Esta propuesta establece principalmente tres niveles en el estudio de la Geometría dependiendo del desarrollo cognitivo del individuo. Uno esperaría que en la escuela del nivel medio los alumnos abordasen un nivel equivalente al de la Geometría II, pero es común que más bien se muestren en el nivel previo. Esto lo comentaremos un poco más adelante, porque inicialmente se hará una observación importante para el estudio de la Geometría.

A lo largo de los paradigmas hay cambios semióticos y ontológicos, pues hacen referencia a la naturaleza de los objetos y a sus representaciones a través de los tres paradigmas: se inicia con objetos cercanos a la realidad, medibles y construibles con herramientas reales; se termina con objetos independientes de la realidad, basados en propiedades. Fischbein (1993), con su *Teoría de los Conceptos Figurales*, establece la noción de *concepto figural* que permite explicar este proceso en el manejo de las representaciones y de las propiedades geométricas: "los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros *conceptos figurales*, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales –como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (pág. 143). A las primeras se encuadran en el aspecto *figural* y las últimas en el *conceptual*. Ambos aspectos "conviven" en los objetos geométricos por el hecho de que son entidades ideales que necesitan ser representadas para poder ser manipuladas, pero cuya "convivencia" no es necesariamente automática y puede ser fuente de fenómenos que resulten en obstáculos para el aprendizaje de la Geometría (Larios, 2005).

Una fusión adecuada entre los dos aspectos permite al individuo hacer una distinción entre lo que es el *dibujo*, como representación de un objeto (o varios objetos) geométrico, y la *figura*, como "el emparejamiento de un referente dado a todos sus dibujos, es entonces definida como el conjunto de parejas formadas por dos términos, el primer término es el referente, el segundo es uno de los dibujos que lo representan; el segundo término es tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente" (Laborde y Capponi, 1994, pág. 168). Esta distinción permite distinguir entre la información que pertenece únicamente a la representación y la información proporcionada por el objeto geométrico (propiedades). Una falla en tal distinción puede llevar a darle una importancia excesiva a información inútil y observar propiedades falsas, erróneas o inútiles, no pudiendo observar las propiedades invariantes que se buscan en el estudio de la Geometría.

El SGD, al ser una herramienta que proporciona un medio para la manipulación "directa" (a través del ratón) de las representaciones de los objetos geométricos a través de su principal rasgo que es el *arrastre*, permite construir significados de los objetos geométricos a través de la posibilidad de transformación continua de los dibujos que son diferentes a los significados construidos al utilizar la tecnología de papel y lápiz, convirtiéndose así en un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el usuario.

Además, por esta característica dinámica del software se hace necesario que la diferencia entre *dibujo* y *figura* se destaque, pues en este ambiente las construcciones geométricas están construidas con base en las relaciones lógicas entre los objetos y no sólo sobre los aspectos figurales de las mismas permitiendo que al momento de hacer una transformación de una construcción por medio del arrastre las propiedades geométricas (más que la información figural) se mantengan invariantes. Es por esto que el uso de este tipo de herramienta para el diseño de ambientes se puede convertir en un medio que propicie la exploración de la Geometría, abriéndole la posibilidad al alumno de generalizar situaciones y buscar casos particulares para construcciones realizadas. Sin embargo, puede provocar también situaciones que modifican la percepción clásica, de papel y lápiz, de la Geometría escolar e introducir nuevas cuestiones que, a su vez, generan nuevos problemas para ser considerados en la labor docente y en la investigación de Didáctica de las Matemáticas.

Regresaremos a esto más adelante, al comentar sobre algunos fenómenos que afectan la construcción de la demostración y la percepción de los objetos geométricos. Antes nos referiremos a la demostración en sí misma.

3 La demostración y las justificaciones

3.1. *Un significado pragmático de la demostración en la escuela*

La demostración, como método de validación del conocimiento matemático, se puede constituir en un recurso didáctico para enseñar la naturaleza del pensamiento matemático, pero que, a la vez, presenta dificultades que aparentemente son insalvables en los niveles básico y medio. En este sentido, nos ha interesado buscar las condiciones requeridas para que los estudiantes, en particular del nivel medio, construyan demostraciones y realicen justificaciones recurriendo a propiedades geométricas observadas (o previamente dadas) y no necesariamente a justificaciones visuales, todo ello dentro de ambientes dinámicos.

No obstante, el desarrollo del razonamiento deductivo y el entendimiento de estructuras axiomáticas son procesos que se encuentran en uno de los estadíos más avanzados en el pensamiento matemático, por lo que algunas personas podrían suponer que ello queda vetado para el ambiente escolar en los niveles medio y anteriores.

Es por ello que la noción de *institución* nos permite establecer una diferenciación entre instituciones y así considerar el significado pragmáticamente de la demostración en términos de las prácticas que se realizan al seno de la comunidad escolar. Siguiendo esta idea, lo que consideramos importante es enfatizar los significados y las prácticas institucionales referentes a dos instituciones, tanto la matemática por ser la de referencia como la de los profesores de la Matemática ya que es el contexto donde se inscribe este trabajo. Esta diferencia no es sólo un ajuste en el tipo de validación y estructura lógica usada para obtenerla, sino que también toma en cuenta las funciones diversas que cumple la demostración en la enseñanza de la Geometría. Considerar estas diferencias es necesario en el entorno escolar, pues en buena medida el acento de la demostración en la escuela no reside en su estructura, sino en la toma de sentido y su significación.

Es importante mencionar que este sentido otorgado a la demostración en la escuela no es arbitrario, sino que –como ya se mencionó– lo toma a partir de la institución de referencia y lo adapta a través de un proceso de transposición didáctica lo más adecuadamente posible.[1] En este sentido vale la pena plantear algunas características al respecto, como son las siguientes (Larios y Acuña, 2009):

1. Es una justificación implícitamente rigurosa de un hecho matemático
2. Está basado en argumentos que tienen como principal función convencer (al interlocutor y a los que le rodean)
3. Explica dicho hecho rigurosa y explícitamente
4. Y su estructura se organiza con base en inferencias de argumentos deductivos

[1] Es por esta razón que sostenemos la necesidad de que el profesor se adentre en la práctica de la demostración, para que así el proceso que plantee como una demostración sea lo más adecuado y coherente con el significado de la institución de referencia de acuerdo con las condiciones de su labor docente.

Cuando decimos *argumentos deductivos* nos referimos a los que están basados en el razonamiento deductivo, con una estructura ternaria en el que intervienen las premisas, una propiedad general y la conclusión:

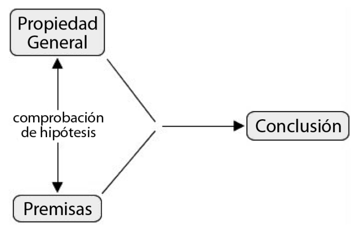

Figura 1.

Además al considerar central el sentido y la significación nos podemos apoyar en la noción de *Unidad Cognitiva de Teoremas* (Boero, Garuti y Mariotti, 1996) que sugiere que existe una continuidad entre la producción de una conjetura y la construcción de su demostración. Esta noción plantea que el proceso de dicha producción se basa en un ciclo constituido por una *exploración*, una *conjeturación*, *más exploraciones* y la *demostración*. Este ciclo permite a los alumnos establecer relaciones entre los objetos geométricos y sus propiedades, enlazando funcionalmente actos de pensamiento de diversa naturaleza que de manera aislada (fuera del ciclo propuesto) lleva a actividades parciales que son difíciles conjuntar en una sola.

Pero insistimos que el contexto escolar es determinante para poder establecer qué se aceptará como una demostración, pues en el nivel medio no se produce necesariamente una demostración formal y ahí se ve la necesidad de poner el énfasis en el razonamiento y de establecer características como las mencionadas unos párrafos más arriba.

En principio el SGD permite este tipo de exploraciones, como ya se ha reportado previamente (Pedemonte, 2001; Olivero, 2003; Larios, 2005), pero siempre existen algunos fenómenos que aparecen al utilizarlo como herramienta, ya sea con la finalidad de enseñar la demostración o cualquier otro tema, lo cual ahondaremos a continuación.

3.2. *Justificaciones en ambientes dinámicos*

El dinamismo proporcionado por el SGD permite la exploración de situaciones geométricas abriendo así la posibilidad de generalizar situaciones y buscar propiedades invariantes a partir de casos particulares y utilizando las funciones de arrastre y de animación proporcionadas por la herramienta informática. De esta manera se abre la posibilidad de que el alumno “vea” situaciones que comúnmente quedan reservadas a los matemáticos con experiencia que ya cuentan con la posibilidad de visualizar dichas propiedades sin tener que dibujar (ver) muchos casos.

Estas condiciones implican dos situaciones. En primer lugar las tareas propuestas no deben ser resueltas de manera inmediata en términos del ambiente dinámico, pues de otra manera la tarea se vuelve trivial y no reviste mayor interés para el alumno. Es importante esta consideración porque hay tareas triviales en la Geometría de regla y compás (como, por ejemplo, prolongar un lado de un polígono) que en el caso de la Geometría Dinámica no lo son, y viceversa.

En segundo lugar al apoyarse en imágenes dinámicas, éstas pueden cobrar un valor de evidencia para quienes las manejan, produciéndose el fenómeno común de transformar la evidencia en prueba y la prueba en evidencia (Chazan, 1993), teniéndose como resultado final la falta de una necesidad por producir justificaciones con deducciones locales o bien, demostraciones en sí. A partir del trabajo reportado en Larios (2005) las justificaciones producidas por alumnos del nivel medio pueden ser de los siguientes tipos:

- *Justificaciones organizadas parcialmente*, que se refieren a una organización básica de la información dirigida hacia una inferencia, aunque con "huecos" en las justificaciones provocados por el desconocimiento de propiedades.
- *Justificaciones con deducciones*, las cuales presentan deducciones básicas y más bien locales que, regularmente, se mezclan con el uso de la experiencia sensorial.
- *Justificaciones empíricas*, las cuales hacen un uso directo de la experiencia de los alumnos, presentándose referencias a la forma y el movimiento, a la evidencia empírica, a criterios externos de validación (como el software) y ocasionalmente a propiedades irrelevantes.

Este último tipo de justificaciones genera un problema sobre el que nos interesa reflexionar y que puede ser sorteado de manera general y progresiva, pero depende del significado de la demostración que se construya en el salón de clase, ya que si se acepta que una demostración sólo explica y convence, prescindiendo de los tipos de argumentos, entonces con la mera observación de los hechos en la pantalla y con el uso de la herramienta informática podría ser suficiente.

Una posibilidad para abordar esta situación en el salón de clase es apelar al contrato didáctico comúnmente instaurado en el salón de clase, al pedir explícitamente que se "demuestre" o se "justifique" algo (aunque aún no se haya observado) a fin de que los alumnos se sientan obligados a construir la demostración y, en este sentido, reflexionen sobre las condiciones matemáticas sobre las que se apoya lo demostrado, aunque el producto final no sea propiamente una demostración. Otra opción es la que encontró Michael De Villiers (1995), quien observó que es precisamente el trabajo de explicar las observaciones y la intervención del profesor lo que puede ayudar a construir las justificaciones deductivas a partir de las observaciones hechas con SGD. Es importante mencionar que éstas no son las únicas posibilidades, ya que estrategias que lleven a un conflicto cognitivo de los alumnos (como los contraejemplos) también podrían ser abordadas.

No obstante, también procesos de visualización afectan en la construcción de la demostración, por lo que comentaremos al respecto a continuación.

4 Otros dos fenómenos que intervienen

Hay fenómenos relacionados con la visualización y el uso de SGD que también afectan en la construcción de la demostración. Estos fenómenos influyen en buena medida porque definitivamente para percatarse de la existencia de una propiedad geométrica durante una exploración con dibujos primero hay que "verla". El problema es que los procesos de relacionar representaciones con objetos geométricos abstractos conlleva la emergencia de fenómenos cognitivos y el uso de instrumentos (físicos y mentales) que pueden convertirse en obstáculos para el aprendizaje de la Geometría.

En los siguientes párrafos ejemplificaremos algunas de estas situaciones que aparecen particularmente en los ambientes de Geometría Dinámica.

4.1. *La rigidez geométrica y el uso de prototipos*

Como ya se mencionó en párrafos previos, es necesario que el individuo utilice algunas representaciones inicialmente para que pueda construir imágenes mentales que le permitan manipular los objetos geométricos. Estas representaciones tienden a ser prototípicas en el sentido de que se constituyen en un tipo de representantes gráficos de los objetos geométricos.

Scaglia y Moriena (2005) proponen la diferencia entre los términos *representación gráfica estereotípica* y *prototipo* como algo necesario para la investigación, pues mientras aquéllas son "las representaciones gráficas que se presentan con mayor frecuencia (repetición)" (pág. 115), éstas últimas son imágenes mentales de los objetos geométricos.

El uso excesivo de lo que estas autoras llaman *representaciones gráficas estereotipadas* (y que llamaremos *representaciones prototípicas*) puede promover la *rigidez geométrica*, fenómeno en el que se manifiesta una incapacidad por parte del individuo para manejar o reconocer mentalmente una figura geométrica cuando no coincide con sus representaciones prototípicas (incluyendo el no estar dibujada en una posición estándar) o cuando una isometría o una deformación la modifican (Larios, 2005). Esta relación entre el uso excesivo mencionado y la rigidez geométrica es debido a que los prototipos, como imágenes mentales, tienden a mostrar características similares en todos los casos incluyendo algunas propiedades figurales, tales como la posición y orientación.

Ahora bien, no se puede afirmar que el uso de prototipos y de representaciones prototípicas conlleven a procesos de rigidez geométrica, pero sí están vinculadas en algunos casos, como por ejemplo cuando se representa constantemente a los triángulos con un triángulo equilátero. Los prototipos pueden convertirse en una herramienta que permita el manejo y el reconocimiento de los objetos matemáticos, mientras una tarea realizada permita un significado que es finalmente asignado al objeto geométrico que es diferente del mero dibujo. Como representación toma el papel de un ambiente experimental y permite un tratamiento heurístico de la figura.

Los diferentes tipos de usos de los prototipos hace necesario tomarlos en cuenta por la influencia que tienen en el aprendizaje de la Geometría y estos usos pueden caracterizarse en cuatro principales que ya han sido planteados (Acuña y Larios, 2008):

1. “*De Filiación* a una idea ‘adecuada’. Se busca una imagen que sea apropiada social y personalmente. En este caso las imágenes estándares son más útiles pero pueden ser modificadas a fin de obtener algo más cercano a lo que es conocido y deseable. Este proceso tiene una motivación personal.”
2. “*Situacional*. Este tipo de procesos se presenta cuando los estudiantes ya manejan las definiciones y los conceptos geométricos de manera adecuada. No obstante, bajo ciertas condiciones son omitidos y fuera de esta situación el estudiante actúa apropiadamente.”
3. “*Familiaridad*. Este tipo de proceso requiere el reconocimiento de estructuras pictóricas familiares; el uso de prototipos está apoyado por el reconocimiento de representaciones o partes de ellas. Estos pueden ser bien identificados y servir como una base para las respuestas. Este proceso tiene una motivación institucional como referencia escolar o cultural.”
4. “*Epistemológico*. Este proceso está presente en estudiantes muy jóvenes donde no hay aún la conservación de la forma. De hecho, estos estudiantes sólo consideran las partes que creen que son relevantes cuando dos figuras, aunque sean congruentes, están presentes en diferentes posiciones.”

En particular, podemos mencionar como ejemplo para el primer tipo el caso de la investigación reportada por Larios (2005) con alumnos de 15 años de edad haciendo ejercicios con Cabri. En esa ocasión se les proporcionó a parejas de alumnos un archivo con un triángulo escaleno (*DEF*) con ninguno de sus lados paralelos al borde de la pantalla. Se les pidió que construyeran un triángulo (*ABC*) tal que sus puntos medios fuesen los vértices del triángulo proporcionado (*DEF*). Un par de estudiantes (que no fueron los únicos con un comportamiento similar) modificaron el triángulo proporcionado y le dieron una forma aparentemente más confortable y correcta: uno de sus lados horizontal y casi isósceles:

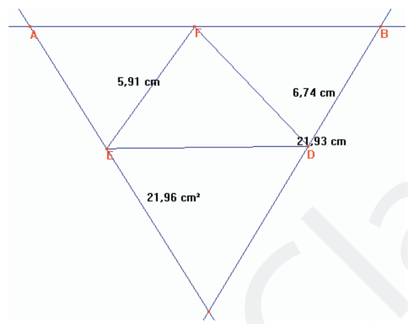

Figura 2.

Además de no utilizar las propiedades de paralelismo necesarias para la construcción, los estudiantes utilizaron la función de arrastre del software para *acomodar* el dibujo y así obtener una representación satisfactoria que está relacionada con la representación prototípica de los triángulos que poseen y que puede, ocasionalmente, causar problemas al momento de observar propiedades, obtener conclusiones y realizar exploraciones.

Así pues, el uso excesivo de representaciones gráficas prototípicas puede complicar la observación de propiedades geométricas. Este obstáculo puede estar latente porque el uso de este tipo de representaciones parece ser necesario para la construcción de prototipos (como imágenes mentales), ya que para aprender Geometría, es necesario que el individuo tenga acceso a una representación.

4.2. *El arrastre como herramienta física*

Otra cosa que se puede observar al estudiar la utilización del SGD es su uso al momento de resolver una tarea en particular. Para alumnos del nivel medio (Larios, 2005) se establecieron tres usos relevantes:

- *El arrastre como generador de diferentes casos*, en la que se percibe que esta operación sirve para producir nuevos casos o ejemplos de la construcción realizada.

- *El uso del examen de arrastre*, que implica la aceptación del carácter dinámico del software, de que éste respeta las restricciones lógicas impuestas al momento de la construcción y de que ésta se realiza utilizando propiedades geométricas.
- *El arrastre como herramienta externa*, que es cuando el alumno acomoda los elementos de los dibujos para que éstos satisfagan las condiciones de la tarea asignada o bien para hacer los dibujos "a mano alzada".

Este último uso es al que nos referiremos a continuación, pues en ese caso es cuando la herramienta no se ha internalizado y se utiliza como una herramienta física y externa (Vygotski, 1979). En tal caso lo más común es que los resultados obtenidos por los alumnos sean inútiles o inexactos, no permitiendo observar propiedades geométricas en los dibujos.

En otras palabras, los alumnos tienen una preferencia marcada en el uso de los aspectos figurales de los objetos geométricos e ignoran los conceptuales. Buscan un resultado visual satisfactorio sin recurrir a las propiedades. Sin embargo, es posible que esta práctica sea utilizada no porque consideren que es la única manera de realizar las construcciones, sino porque no pueden construirla utilizando propiedades geométricas y así es la única manera que tienen para terminar el trabajo solicitado.

Una situación que ejemplifica este comentario se refiere a una pareja de alumnos de secundaria que tenían que construir un dibujo tal que el punto *C* fuese el punto medio de un segmento de acuerdo a la siguiente figura (nótese que el punto *C* no está en la línea recta de la derecha):

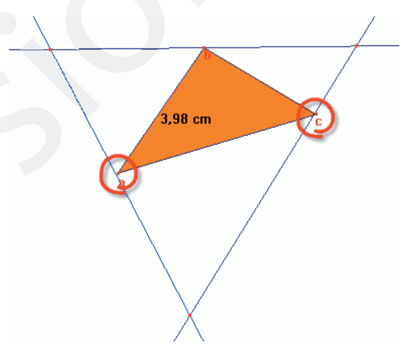

Figura 3.

En el diálogo que se sostuvo con los alumnos se puso de manifiesto que consideraban el ajuste continuo un "mal necesario" para la solución del problema, pero no se percataron que ello no les permitiría observar propiedades geométricas.

❺ Comentarios finales

La importancia de la demostración en la Matemática es incuestionable y su presencia en la Matemática Educativa es necesaria y aprovechable para enseñar y estudiar la Geometría en todos sus aspectos a pesar de que los individuos en una y otra institución (la Matemática y la escuela) se manejan en diferentes niveles cognitivos y los significados relacionados con la demostración son muy distintos. Es por ello que el retomar la idea de prácticas institucionales (Godino y Batanero, 1994) se convierte en un medio que permite explicar algunos fenómenos y poner al alcance del ambiente escolar dicho objeto, pero ello implica que "se requiere afinar una idea adecuada de demostración en el entorno escolar que considere como ejes de funcionamiento el rigor (localmente aplicado) y distinguiendo claramente la necesidad de la obtención del significado matemático también aplicado al proceso en cuestión" (Larios y Acuña, 2009, pág. 4).

Una definición de demostración que considera las prácticas institucionales en la escuela debe incluir la generación de conjeturas en los alumnos, como actividad que los acerca a un proceso inferencial propio del pensamiento matemático y que es cercano a su mundo sensible. Consideramos que esta producción de conjeturas es esencial, porque es el paso previo para la justificación de propiedades por medio de un proceso de observación y construcción de conocimiento.

Si bien las conjeturas y los teoremas son afirmaciones con un valor epistémico y un estatuto teórico determinados, sus validaciones no necesariamente tienen que tener las mismas características. Las conjeturas pueden estar relacionadas con aspectos semánticos de las Matemáticas, mientras que los teoremas con aspectos sintácticos. Estas diferencias no se presentan en las afirmaciones en sí, sino que dirigen los métodos de validación correspondientes, provocando que la forma (estructura) y la intención en cada caso sean diferentes. Con esto se da una posible ruptura durante la construcción de la demostración en los aspectos estructural (Duval, 1999) y epistemológico (Arzarello, Olivero, Robutti y Paola, 1999), a pesar de la continuidad cognitiva ya mencionada y una de tipo semántico que ha documentado Pedemonte (2001).

Es necesario tomar en cuenta esto al momento de abordar la enseñanza de la demostración (en la planeación o en la actividad docente directa), para así realizar un diseño didáctico con una orientación específica. En este sentido el uso de SGD se puede convertir en una herramienta útil para transitar por los diversos paradigmas propuestos por Kuzniak y colegas, salvar (o disminuir) las rupturas estructural y epistemológica en la construcción de la demostración. Esto puede ocurrir a pesar de los fenómenos mencionados en las secciones previas pues el profesor tiene como una de sus tareas tomarlos en cuenta y orientar el trabajo del alumno de una manera adecuada.

Referencias

Acuña Soto, C. y Larios Osorio, V. (2008). Prototypes and learning of geometry. En A. Arcavi y N. Presmeg (Eds.), *Proceedings of TSG 20 of ICME-11*. México: ICMI-SMM-UANL. Retrieved from http://tsg.icme11.org/document/get/193.

Arzarello, F., Olivero, F., Robutti, O. y Paola, D. (1999). Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva. *L'insegnamento della matemática e delle scienze integrate*, *22B*, 309–338.

Boero, P., Garuti, R. y Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the PME,* (2), 121–128.

Chazan, D. (1993). High school geometry stundents' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-388.

De Villiers, M. (1995). An alternative introduction to proof in dynamic geometry. *Micromath*, *11* (1), 14–19.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México: Pitagora Editrice.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139–162.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325–355.

Kuzniak, A., Gagatsis, A., Ludwig, M. y Marchini, C. (2007). From geometrical thinking to geometrical work. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th CERME* (pp. 955–961). Chipre: ERME.

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (1-2), 165–210.

Larios, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica.* México: Cinvestav.

Larios, V. y Acuña Soto, C. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education*. Taiwán: ICMI-NTNU. Retrieved from http://ocs.library.utoronto.ca/index.php/icmi/8/paper/view/970/94.

Olivero, F. (2003). *The proving process within a dynamic geometry environment.* Bristol, Inglaterra: Universidad de Bristol.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the PME,* (4), 33-40. Holanda.

Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, *17* (3), 105-120.

Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* España: Editorial Crítica.

Autores:

Víctor Larios.
Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería, México. *vil@uaq.mx*

Noraísa González González.
Esc. Sec. Gral. “Mariano Matamoros”, Querétaro, México. *norai11@yahoo.com*