Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, Vol. 3, No. 1, 87-101
ISSN: 2215-8421

Impacto del uso de Cabri II Plus en el aprendizaje del concepto de Transformación Lineal en R^2

Carlos Felipe Rodríguez H.
Universidad de los Andes (cf.rodriguez1134@uniandes.edu.co)

Recibido: 24 mayo 2012 | Aceptado: 20 junio 2012 | Publicado en línea: 30 junio 2012

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal es la rama de las Matemáticas que estudia objetos que se pueden modelar a través de sistemas de ecuaciones lineales, vectores, matrices, espacios vectoriales y transformaciones lineales.

El estudio del Álgebra Lineal debe permitirle a un estudiante conocer y utilizar algunas herramientas para resolver problemas de distintas disciplinas y enmarcados en diversos contextos, no solo el matemático. Así, un estudiante de Álgebra Lineal debe ser capaz de asimilar objetos propios del contexto algebraico para aplicarlos de diversas formas en su contexto de interés.

Sin embargo, parte de las investigaciones relacionadas con la didáctica del Álgebra Lineal han descrito algunos problemas evidentes en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Por ejemplo, Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) mencionan que, como consecuencia del elevado grado de abstracción propio del lenguaje algebraico, los estudiantes se enfrentan al llamado obstáculo de formalismo. Dicho obstáculo puede entenderse como la incapacidad que tiene un estudiante para reflexionar sobre los objetos matemáticos que está estudiando, para establecer conexiones con otros objetos previamente estudiados, y como una exclusiva aplicación de procedimientos, copiando lo ejecutado por el docente.

Según Uicab y Oktaç (2006), el obstáculo del formalismo se produce cuando un estudiante manipula las representaciones formales simbólicas, pero no tiene las suficientes aptitudes para comprenderlas, lo que produce un desconocimiento de los significados y reglas de las Matemáticas.

Al parecer, dificultades de este tipo no solo generan inconvenientes para el aprendizaje del Álgebra Lineal, sino que además no le permiten al estudiante relacionar los contenidos que está estudiando con otras áreas como la Ingeniería, la Física, la Economía.

Particularmente, las Transformaciones Lineales dentro del Álgebra Lineal cumplen un papel importante, por ser casos especiales de funciones definidas sobre espacios vectoriales y porque aparecen en diversas áreas de las Matemáticas tanto teóricas como aplicadas. El estudio de este concepto hace parte de algunos cursos de Ingeniería y Matemáticas. Representa, además, la oportunidad para que los estudiantes se enfrenten con los distintos lenguajes abstractos propios del Álgebra Lineal (Dorier y Sierpinska, 2001).

El descubrir que las rotaciones, traslaciones, reflexiones y proyecciones cumplen ciertas propiedades puede servir de base para introducir el concepto de Transformación Lineal (TL). Algunas investigaciones (Siñeriz y Santinelli, 2005; Uicab y Oktaç, 2006; Molina y Oktaç, 2007; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010) dan cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes en relación con el aprendizaje de este concepto.

Un curso de Álgebra Lineal hace parte del plan de estudios de programas como Ingeniería, Economía y Administración de Empresas de la Universidad de los Andes. Al hablar de manera informal con algunos docentes de este curso, se percibió cierto nivel de preocupación por el escaso interés de los estudiantes por la clase y la apropiación de contenidos que serán usados posteriormente en su carrera. Manifestaron, además, estar poco satisfechos con los resultados obtenidos por los estudiantes en las evaluaciones realizadas.

Por otra parte, algunos estudiantes afirmaron que los temas estudiados en el curso eran complejos, no muy claros y poco entendibles. Manifestaron además que se encontraban poco satisfechos con la forma en la que los objetos matemáticos estudiados eran presentados en clase, casi siempre por el nivel de abstracción y la falta de aplicación inmediata de dichos objetos. También dijeron no entender por qué y para qué se ven algunos contenidos del curso.

A raíz de lo anteriormente expuesto, se consideró necesario realizar una reflexión sobre lo que estaba pasando en el curso de Álgebra Lineal de la Universidad de los Andes. Primordialmente, se quiso establecer qué elementos podían representar dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal y, de manera particular, seleccionar alguno de los objetos estudiados en el curso del que se pudiera obtener información suficiente para plantear una propuesta didáctica apropiada.

El propósito del presente estudio fue proponer una alternativa de intervención para generar un proceso de aprendizaje diferente del concepto de Transformación Lineal en R^2. Dicha intervención fue sustentada en el uso de nuevas tecnologías en los salones de clase de Álgebra Lineal, específicamente en el uso de Cabri II Plus, en busca de una aproximación epistemológica diferente por parte del estudiante.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Existe alguna diferencia en el resultado del aprendizaje del concepto de Transformación Lineal en R^2, entre estudiantes que usan Cabri II Plus y estudiantes que no lo usan?

MARCO TEÓRICO

Importancia de la visualización en el aprendizaje del Álgebra Lineal

Una de las actividades cognitivas relacionadas con el tratamiento de las representaciones gráficas es la visualización, noción sobre la que hay diferentes concepciones en la investigación en Matemática Educativa. Zimmerman y Cunningham (1991, citado por Dolores, 2007, p. 481) caracterizan el término visualización matemática "como los procesos de formación de imágenes (tanto mentalmente como con la ayuda de lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y el uso efectivo de tales imágenes para el descubrimiento matemático y la comprensión". Por otro lado Cantoral y Montiel (2001, citado por Calvillo y Cantoral, 2007, p. 424) definen la visualización "como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual".

Según Socas et al. (1989, p. 142), "la experiencia y la historia han mostrado la importancia de la visualización como una 'herramienta' fundamental para la comprensión de muchos argumentos y fórmulas algebraicas", y más adelante señalan: "Conviene observar que en ningún momento las generalizaciones teórico-algebraicas aparecen automáticamente de la visualización, sino que ésta complementa el entendimiento de tales generalizaciones". Hay investigaciones en el campo de la enseñanza de la Matemática que afirman que las generalizaciones que los estudiantes deben realizar en el proceso de cambio conceptual, proceso considerado como esencial por algunas teorías del aprendizaje de conceptos científicos, se producen y pueden sostenerse de forma más efectiva por medio de métodos visuales, con el auxilio de un soporte computacional. Por ello, resulta fundamental tratar de formar o desarrollar la habilidad de visualizar en los estudiantes (Díaz, 2007).

Importancia de los registros semióticos en el aprendizaje del Álgebra Lineal

Una particularidad que tiene la matemática es que un objeto solo puede describirse a través de alguna de sus representaciones o registros, debido a que no se puede tener acceso directo al mismo mediante la percepción o por medio de una experiencia intuitiva inmediata. En este sentido, se requiere un registro que permita realizar una serie de actividades cognitivas, a través de las cuales el alumno pueda aproximarse a dicho objeto. Pero para generar la comprensión de un objeto matemático es necesario que el alumno pueda disponer de distintas representaciones del mismo y transitar de una representación a otra según el tratamiento que se dé a dicho objeto. Por lo tanto, si un alumno dispone de una sola representación, el objeto que pretende identificar a través de esta no podrá ser independizado de la representación, y por ende, confundirá el objeto con esa única representación que conoce (Duval, 1998).

Duval (1999) distingue dos tipos de operaciones cognitivas de representación en el pensamiento matemático: el tratamiento y la conversión. El tratamiento de una representación es la transformación de la misma en otra dentro del mismo registro donde ha sido formada. En cambio, la conversión requiere un cambio de registro: es la transformación de una representación en otra, correspondiente a otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Una exigencia básica para la comprensión de un concepto matemático por parte de un estudiante es la coordinación o articulación entre sus diferentes representaciones. Es decir, se puede afirmar que un alumno ha comprendido un concepto cuando manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento (Romero, 2000).

Software para matemática dinámica

La característica más importante de los programas de geometría dinámica es que conservan las relaciones y propiedades de los objetos de la figura que se construye, aunque se muevan o desplacen los objetos sobre los que se ha realizado la construcción, y permiten la manipulación directa de los objetos que determinan la figura, es decir, nociones matemáticas abstractas son convertidas en "objetos físicos" susceptibles de experimentar con ellos. Por ejemplo, si se traza una recta r perpendicular a otra recta s por el punto P, al desplazar la recta s o el punto P, la recta r sigue siendo perpendicular (Larios, 2006).

Caso de este estudio: Cabri II Plus

El software utilizado para esta investigación fue el programa de origen francés Cabri II Plus, que ofrece la oportunidad de trabajar con construcciones geométricas. Las características que diferencian una aproximación a la geometría, si se utiliza este software, con respecto a la tecnología de papel y lápiz, son: la posibilidad de definir rutinas o cadenas de construcciones bajo el nombre de macros; la posibilidad de construir lugares geométricos; y como característica más relevante: "la transformación continua en tiempo real llamada comúnmente arrastre" (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351).

La operación de arrastre permite al usuario la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos construidos, mediante el uso del mouse o algún otro periférico del computador, sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las que fueron construidos. Esta operación tiene consecuencias en la apreciación de la geometría, pues el software se constituye en un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el usuario, ya que las funciones del arrastre pueden ser diversas y no necesariamente coinciden en todos los individuos.

Por ejemplo, Olivero (2003) hace una clasificación de las funciones del arrastre:

- El arrastre como retroalimentación de las acciones que realiza el usuario, permitiéndole tener el control sobre la construcción.
- El arrastre como mediador entre la figura y el dibujo, permitiéndole al usuario hacer una distinción entre ambas nociones.
- El arrastre como modo de examen o modo de búsqueda, que le permite al usuario examinar su construcción y buscar propiedades invariantes.

La capacidad para manipular directamente las construcciones podría permitir que el estudiante comience a diferenciar entre lo que se denomina dibujo, como representación gráfica de un objeto matemático, y figura, como relación entre el objeto matemático y sus representaciones gráficas. Esto se relaciona con la capacidad del estudiante de ver más allá de la representación gráfica que está estudiando y llegar a un grado de abstracción mayor (Hoyles y Jones, 1998, p. 124). Para Laborde y Capponi (1994), Cabri proporciona una interfaz cuyos dibujos son figuras que conservan las propiedades pertinentes para la construcción pero que, al manipular la figura de manera directa, descarta relaciones no válidas; las figuras que se construyen con Cabri no son simples dibujos como los que se realizan con lápiz y papel. Las figuras pueden ser modificadas de manera continua mientras mantienen su descripción. Las relaciones geométricas de la figura son visualizadas como invariantes bajo la manipulación (Laborde, 1994).

METODOLOGÍA

Enfoque de investigación

Diseño cuasi experimental con grupo experimental y grupo comparación. Shadish, Cook y Campbell (2002) identifican varios diseños cuasi experimentales. Probablemente, el más usado es el diseño de grupo comparación no equivalente, que consiste en aplicar una prueba inicial a un grupo experimental y a un grupo comparación, administrar la condición de tratamiento solo al grupo experimental y posteriormente aplicar una posprueba a los dos grupos. Se consideró que este tipo de diseño podría ser usado para este estudio, ya que se quería determinar el impacto del uso de Cabri II Plus en el aprendizaje del concepto de TL en R^2, al comparar un grupo de estudiantes que usaran el software con un grupo de estudiantes que no lo usaran.

Desarrollo

Después de revisar lo propuesto por Rodríguez (2011), es decir, que el uso de Cabri II Plus contribuye a disminuir algunos de los errores presentes en el momento de aprender el concepto de Transformación Lineal en R^2 y a desarrollar algunas de las competencias necesarias para aprender Álgebra Lineal, se pensó en comparar los resultados de la implementación en dos grupos de estudiantes del curso de Álgebra Lineal de la Universidad de los Andes. Los participantes no fueron seleccionados de forma aleatoria; se usó un muestreo por conveniencia. Se utilizaron dos grupos: un grupo experimental y un grupo comparación. Cada uno de estos grupos estaba conformado por estudiantes del curso de Álgebra Lineal de la Universidad de los Andes. A cada uno de los grupos, el experimental y el de comparación, se le aplicó una prueba inicial en la semana cinco del semestre académico. Posteriormente, el grupo experimental desarrolló un taller de doce preguntas, usando Cabri II Plus, en el cual se trabajan los conceptos de vectores, propiedades de vectores, Transformación Lineal en R^2 y algunas de sus propiedades. Los estudiantes desarrollaron este taller durante un mes, resolviendo tres ejercicios por semana. Una vez realizado el taller, se aplicó una prueba final a los dos grupos. Se pretendía comparar si el grupo experimental mostraba progresión en su proceso de aprendizaje, y si dicha progresión era mayor que la del grupo comparación. Bajo ciertas condiciones, y teniendo en cuenta las limitaciones y las amenazas a la validez externa del estudio, fue posible afirmar qué grupo obtuvo mejores resultados al estudiar transformación lineal en R^2.

Instrumentos

Prueba inicial. La prueba inicial tuvo diez preguntas relacionadas con los temas de vectores, propiedades de vectores e independencia lineal, ya que estos temas son estudiados por los estudiantes del curso de Álgebra Lineal, antes de estudiar el tema de Transformación Lineal. Fue una prueba de selección múltiple de única respuesta.

Prueba final. La prueba final tuvo diez preguntas relacionadas con el tema de Transformación Lineal en R^2, sobre el concepto y las propiedades. Cuando se aplicó la prueba, los estudiantes ya habían estudiado este concepto. Fue una prueba de selección múltiple con única respuesta.

Es importante mencionar que se utilizó el programa Iteman para verificar la validez y la confiabilidad de las pruebas diseñadas. Se cambiaron las preguntas que no discriminaban bien, y en los dos casos se obtuvo un Alfa de Cronbach mayor a 0,6.

Taller. El taller que fue desarrollado por los estudiantes tuvo doce preguntas. Las preguntas del taller eran ejercicios que no podían ser resueltos con lápiz y papel, es decir, ejercicios que debían ser resueltos usando las construcciones creadas utilizando Cabri II Plus. Algunos de los ejercicios propuestos en el taller se presentan en el Anexo al final de este documento.

Número de participantes. Se contó con la participación de treinta estudiantes del grupo experimental y cuarenta estudiantes del grupo comparación.

RESULTADOS

En la Tabla 1 se puede observar el número de estudiantes que presentaron la prueba inicial, en cada uno de los grupos. Aunque el número inicial de participantes era mayor, fue necesario retirar de la muestra del estudio a varios estudiantes que eran repitentes del curso, que habían visto el curso en otra universidad, que tomaban clases particulares de Álgebra Lineal o que ya habían usado Cabri II Plus.

Tabla 1. Comparación de los resultados de la prueba inicial de los grupos experimental y comparación

	Experimental inicial	Comparación inicial
N	11	16
Media	5,18	5,81
Desviación estándar	2,040	1,471
Rango	7	5
Mínimo	2	3
Máximo	9	8

Aunque este hecho redujo considerablemente el tamaño de los grupos, se estimó necesario hacer esta selección de los participantes para garantizar que los resultados obtenidos fueran producidos por la intervención planteada, es decir, el desarrollo del taller. Se quería evitar que se observaran mejoras en alguno de los grupos que hubieran sido causadas por otras variables diferentes al uso de Cabri II Plus.

Se observó que en la prueba inicial el grupo comparación tuvo mejores resultados (una media más alta y una desviación estándar menor) que el grupo experimental. Esto podría ser explicado porque en el momento de aplicar la prueba inicial, los estudiantes del grupo comparación habían visto más contenidos del programa que los estudiantes del grupo experimental. Es interesante ver también que el rango de respuestas del grupo comparación es menor que el del grupo experimental, algo que es consistente con una dispersión menor de los datos.

En la Tabla 2 es posible visualizar que en la prueba final los estudiantes del grupo comparación obtuvieron una media más alta que los estudiantes del grupo experimental; sin embargo, al comparar la diferencia entre las medias de la prueba final y de la prueba inicial de los dos grupos, es claro que el grupo experimental tuvo una mejora mayor. Además, en esta tabla es posible observar que las respuestas de la prueba final del grupo experimental estuvieron mejor distribuidas respecto a la media (desviación estándar menor y rango menor).

Tabla 2. Comparación de los resultados de la prueba final de los grupos experimental y comparación

		Experimental final	Comparación final
N		11	16
Media		6,09	6,19
Desviación estándar		1,973	2,040
Rango		6	8
Mínimo		3	2
Máximo		9	10

ANÁLISIS DE RESULTADOS

De acuerdo con los resultados obtenidos, se consideró necesario establecer si existían diferencias, con certeza estadística, entre las medias de las pruebas inicial y final de cada uno de los grupos.

Una simple comparación de las medias de la prueba inicial y final de los dos grupos reveló que para el caso del grupo experimental hubo una mejora del 18% frente a una mejora del 6% del grupo comparación. Este hecho indicó que los dos grupos mejoraron, efectivamente, pero que el grupo experimental que desarrolló el taller usando Cabri II Plus tuvo una mejoría mayor que el grupo que no desarrolló el taller.

El resultado de este análisis permitió establecer si el desarrollo del taller de doce puntos realizado por los estudiantes había tenido impacto o no en el proceso de aprendizaje de transformación lineal en R^2.

Según la Tabla 3, es posible afirmar que siete de los estudiantes del grupo experimental mejoraron en la prueba final, después de desarrollar el taller. Cuatro estudiantes obtuvieron el mismo puntaje que en la prueba inicial y ningún estudiante obtuvo un puntaje menor. Esta prueba fue presentada por once estudiantes, ya que, como se explicó anteriormente, fueron excluidos los estudiantes que eran repitentes del curso, o que habían visto el curso en otra universidad, o que tomaban clases particulares de Álgebra Lineal o que ya habían usado Cabri II Plus. En la Tabla 4 se presenta el resultado de la prueba Wilcoxon aplicada a los resultados de la prueba inicial y prueba final del grupo experimental.

Tabla 3. Comparación entre las medias de la prueba inicial y la prueba final del grupo experimental

			Rango promedio
Tratamiento final - Tratamiento inicial	Rangos negativos	0	,00
	Rangos positivos	7	4,00
	Empates	4	
	Total	11	

Tabla 4. Resultado de la prueba Wilcoxon aplicada a los resultados de la prueba inicial y prueba final del grupo experimental

	Tratamiento final - Tratamiento inicial
Z	-2,456(a)
Asymp. Sig. (2-tailed)	,014

(a). Basado en los rangos negativos.

Por lo tanto, es posible afirmar que *existen diferencias significativas entre los resultados de la prueba final y de la prueba inicial del grupo experimental, después de realizar el taller usando Cabri II Plus.* (p<0,05), el tamaño del efecto fue de 0,74.

Lo anterior quiere decir que las mejoras que se produjeron en los resultados del grupo experimental pueden ser explicadas por el desarrollo del taller en el que los estudiantes usaron Cabri II Plus. Este hecho permitió sustentar el impacto positivo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes después de utilizar Cabri II Plus.

En la Tabla 5 es posible observar que en la prueba final del grupo comparación hubo cinco estudiantes que desmejoraron, es decir que obtuvieron un puntaje menor que en la prueba inicial; seis estudiantes mejoraron y cinco obtuvieron el mismo resultado. En la Tabla 6 se presenta el resultado de la prueba Wilcoxon aplicada a los resultados de la prueba final y de la prueba inicial del grupo comparación.

Tabla 5. Comparación entre las medias de la prueba inicial y la prueba final del grupo comparación

		N	Rango promedio
Comparación final - Comparación inicial	Rangos negativos	5	4,00
	Rangos positivos	6	7,67
	Empates	5	
	Total	16	

Tabla 6. Resultado de la prueba Wilcoxon aplicada a los resultados de la prueba final y de la prueba inicial del grupo comparación

	Comparación final - Comparación inicial
Z	-1,192 (a)
Asymp. Sig. (2-tailed)	,233

(a). Basado en los rangos negativos.

Por lo tanto, se puede comentar que *no existen diferencias significativas entre los resultados de la prueba final y la prueba final del grupo comparación*. (p>0,05), el tamaño del efecto fue de 0,298. Lo anterior quiere decir que, a pesar de las mejoras encontradas en el grupo comparación, no es posible argumentar que dichas mejoras se deban a alguna variable particular o algún método de enseñanza específico.

Discusión

El uso de Cabri II Plus permitió que los estudiantes identificaran diferentes representaciones del objeto estudiado. Por ejemplo, durante el desarrollo del taller los estudiantes pudieron reconocer que una Transformación Lineal en R^2 está asociada a una función entre espacios vectoriales, pero que también tiene asociada una matriz de representación o un efecto geométrico particular. Lo anterior permite suponer que los estudiantes tuvieron una forma diferente de construir la concepción de Transformación Lineal en R^2 que va más allá de demostrar que una transformación lineal es un operador cerrado bajo la suma y el producto punto.

Este hallazgo es consistente con lo propuesto por Duval (1998), quien afirma que para que exista comprensión de un objeto matemático es necesario que el estudiante pueda disponer de distintas representaciones del mismo y transitar de una representación a otra según el tratamiento que se dé a dicho objeto. De esta forma, es posible afirmar que el uso de Cabri II Plus representa una herramienta para contribuir al proceso de aprendizaje del concepto de Transformación Lineal en R^2 y que puede ser revisada en ocasiones futuras para promover el aprendizaje de otros objetos del Álgebra Lineal, y en general de las Matemáticas.

Al parecer, el uso de Cabri II Plus, al promover la visualización y utilizar el arrastre, permitió que los estudiantes desarrollaran las competencias necesarias para aprender Álgebra Lineal.

Lo anterior es coherente con lo expuesto por Zimmerman y Cunningham (1991), quienes plantean que la visualización matemática permite la formación de imágenes, el descubrimiento matemático y la comprensión. De igual manera, se destaca la función del arrastre como modo de examen o de búsqueda, que le permite al usuario examinar su construcción y buscar propiedades invariantes (Olivero, 2003).

El uso de un software de Geometría Dinámica como Cabri II Plus permite que el estudiante obtenga una representación diferente del objeto estudiado y que sea capaz de reconocer las características del objeto, definir las propiedades del objeto y realizar conexiones con otros objetos.

El uso de Cabri II Plus tuvo un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes del concepto de Transformación Lineal en R^2. Al aplicar la prueba inicial y la prueba final, y comparar los resultados, fue posible encontrar una mayor mejora en el grupo experimental que en el grupo comparación, con significancia estadística; es decir, el grupo de estudiantes que desarrollaron el taller obtuvo mejores resultados.

Aunque es claro que hay que reconocer la limitación impuesta por el número de estudiantes de los dos grupos (once en el experimental y dieciséis en el de comparación), es válido sugerir que este tipo de cuasi experimento puede ser repetido usando un número mayor de estudiantes, buscando con esto generalizar los resultados aquí hallados.

REFERENCIAS

Calvillo, N. y Cantoral, R. (2007). Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 421-426.

Díaz, M. (2007). Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 207-229). México: Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. (2007). Usos de las gráficas y sus representaciones en el aprendizaje de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 479-484.

Dorier, L., y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton (ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 255-273). Países Bajos: Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (1998). Signe et Objet, I, II Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 6, El obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14,* 361-369. Panamá.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (eds.), *Proceeding of the twenty – first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. *1*, 23-26.

Goldenberg, E. P y Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, N.J.: Lawrence Eribaum Associates, Inc., Publishers.

Hoyles, C., y Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri-Géometre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14. 1/2, 165-209.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en un nivel medio. *Relime, 9* (3), 361-382.

Molina, J. y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10* (2), 241-273.

Olivero, F. (2003). The proving process within a dynamic geometry environment. Tesis de Doctorado, University of Bristol, Graduate School of Education, Inglaterra.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (1), 89-112.

Rodríguez, C. (2011). *Efectos del uso de Cabri II Plus en el aprendizaje del Álgebra Lineal.* Ponencia en revisión para el XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas.

Romero Albaladejo, I. (2000). *Representación y comprensión en pensamiento numérico*. En C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española De Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-46). Huelva: Universidad de Huelva.

Shadish, W. R., Cook, T. D. y Campbell, D. T. (2002). *Experimental and quasi-experimental designs for generalized causal inference*. Nueva York: Houghton Mifflin.

Sierpinska, A, Dreyfus, T, Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (1), 41-76.

Siñeriz, L y Santinelli, R. (2005). Inducción y formalización en la enseñanza de las transformaciones rígidas en entorno Cabri. *Educación Matemática*, *17* (1), 149-162.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

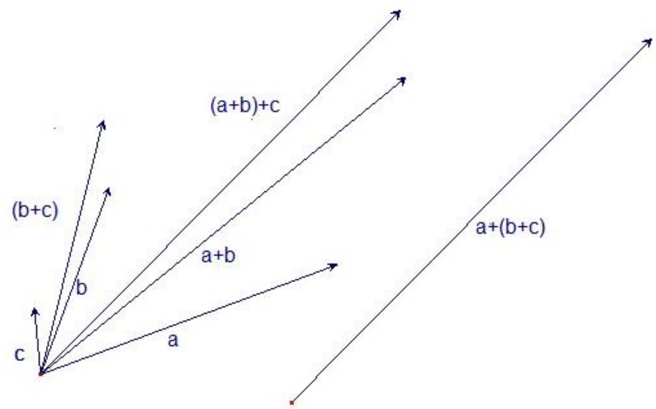
Uicab, R. y Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (3), 459-490.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualisation? In Zimmerman, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualisation in teaching and learning Mathematics*, (pp. 1-9).

ANEXO

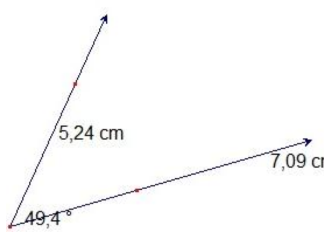
Algunos ejercicios propuestos en el taller T3

1. En esta construcción, usted encuentra los vectores a, b y c y las siguientes sumas de vectores: ($\vec{b} + \vec{c}$) y ($\vec{a} + \vec{b}$). Observe con atención los vectores ($\vec{a} + \vec{b}$) + $\vec{c}$ y $\vec{a}$ + ($\vec{b} + \vec{c}$). Por favor, desplace los vectores a, b y c.



   a) ¿Cómo son los vectores ($\vec{a} + \vec{b}$) + $\vec{c}$ y $\vec{a}$ + ($\vec{b} + \vec{c}$)?
   b) A partir de lo anterior, ¿qué puede concluir sobre la suma de vectores?

2. Esta construcción permite visualizar algunas propiedades con el producto escalar de dos vectores.



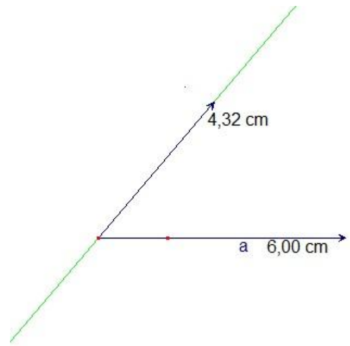
a) Calcule el producto escalar de dos vectores, determinando su norma y el ángulo que forman entre ellos. Para hacer su cálculo, use la calculadora de Cabri que aparece en la barra de herramientas (menú del cuadro 9 de izquierda a derecha).

b) Compruebe que el producto escalar puede ser negativo.

c) Trate de obtener una situación en la que el producto escalar coincida con el producto de los módulos, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$.

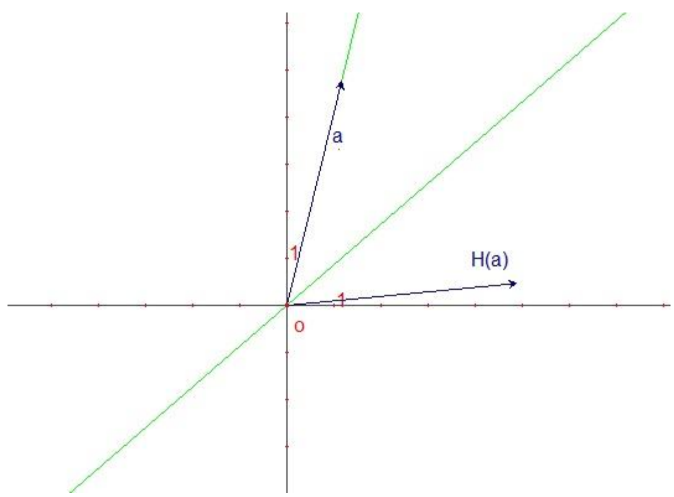
d) ¿Y una situación en la que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}||\vec{v}|$?

3. En esta construcción, el vector a es fijo y es posible variar la longitud del vector b al desplazarlo sobre la recta de color verde. Modifique la longitud del vector b y responda lo siguiente:



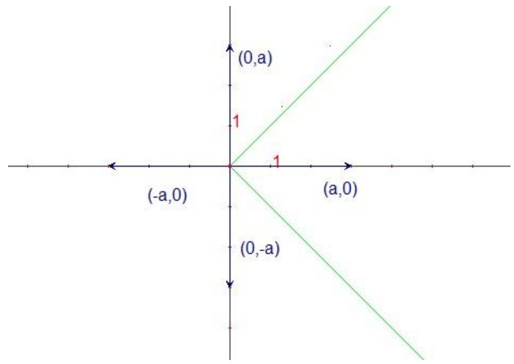
a) ¿Qué sucede con el producto escalar entre los vectores al variar la longitud de b?
b) ¿Qué pasa si en un producto escalar multiplicamos uno de los dos vectores por un escalar r?
c) ¿Qué puede concluir de lo anterior?

4. En esta construcción encontrará el vector **oa**. Cierta transformación, denotada con la letra H, actúa sobre el vector produciendo los cambios que se aprecian en la figura. Por favor, arrastre el vector **oa**, de tal forma que la magnitud de este se modifique (puede aumentarla o disminuirla).



a) ¿Es H una transformación lineal? ¿Por qué?
b) Observe qué le sucede al vector H(a) mientras modifica la longitud del vector oa. ¿Pasaría lo mismo si se multiplicara el vector H(a) por un escalar real?
c) ¿Qué puede concluir de este hecho?

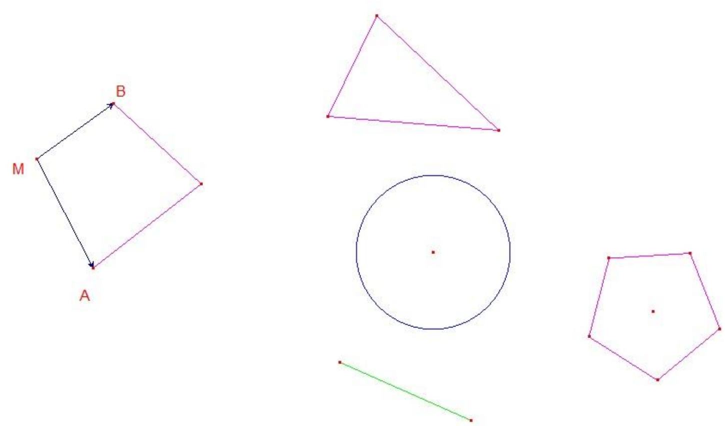
5. En esta construcción encontrará un vector con coordenadas (a,0) y anclado al origen. A ese vector se le aplicaron tres transformaciones lineales, como se muestra en la figura; arrastre el vector y observe qué pasa sobre los ejes.



- La primera transformación envía (a,0) a (0,a)
- La segunda transformación envía (a,0) a (-a,0)
- La tercera transformación envía (a,0) a (0,-a)

  a) ¿Cómo demostraría que las tres transformaciones son lineales? Explique.
  b) Describa qué hace cada una de las transformaciones a un vector cualquiera (x,y).
  c) Halle una matriz asociada a cada una de las transformaciones. ¿Qué dimensión tendrían estas matrices?

6. En esta construcción encontrará dos vectores MA y MB, situados sobre un cuadrilátero irregular. Por favor, arrastre cada uno de los vectores y observe qué pasa con el cuadrilátero.



  a) ¿Es posible encontrar una transformación lineal para obtener el triángulo?
  b) ¿Es posible encontrar una transformación lineal para obtener la circunferencia?
  c) ¿Es posible encontrar una transformación lineal para obtener el segmento de recta?
  d) ¿Es posible encontrar una transformación lineal para obtener el pentágono?
  e) ¿Qué puede afirmar sobre el efecto de una transformación lineal sobre un polígono, irregular o regular, de n lados?