

ECONOMIA



Mtra. María Ramos Escamilla

ANÁLISIS EMPÍRICO DE LOS SECTORES ECONÓMICOS DE MÉXICO EN R^3 CON ALEATORIEDAD FRACTAL.

Licenciada en Economía (UNILA), Esp. Finanzas (UdL), Esp. en LI (Colegio Coronet Hall), Mtra. En Finanzas (UdL). Doctorante en Ciencias Económicas (IPN)

Ha realizado Cursos para la UNAM, CEDEM, UNITEC, BUAP, UAEH, UJAT. Con impartición de Asignaturas para el Posgrado de la UNILA, la UVM y la UNITEC. También ha dictado Conferencias en el IIEC, FFyL, FCA, CIMYT, UAZ, la Sociedad Matemática Mexicana en su Capítulo de MAFEMAR, la UPT, CNE, IPN, Universidad Panamericana, Universidad Anáhuac, ESCA, ENTS y la UAEM.

Ha sido galardonada con el Premio de Literatura Histórico Económica y el Certamen de Discriminación en México, el Concurso Nacional de Mujeres: Economía y Política , el Concurso Punto de Partida , el Premio Nacional de Mujeres por el Instituto Nacional de las Mujeres, el Premio Nacional a la Investigación Laboral por la Secretaría del Trabajo y Previsión Social , el Certamen Nacional de Ensayo Político, el Concurso Nacional de Ensayo sobre Derechos Humanos, el Premio Santander a la Innovación Empresarial.

Fecha de Envió: 15 de Diciembre 2010

Fecha de Aceptación: 25 de Marzo 2011

RNA: 03-2010-051112265900-01

Fecha de Acta: 31 de Marzo 2011

CONTENIDO

- Introducción
 - Análisis Estadístico y Fractal del IPy
- Prueba de Normalidad
- Análisis de Fractal
- Conclusiones
- Bibliografía

ANÁLISIS EMPÍRICO DE LOS SECTORES ECONÓMICOS DE MÉXICO EN R^3 CON ALEATORIEDAD FRACTAL

Mtra. María Ramos Escamilla ¹

Resumen

En este artículo se aplica el método fractal para analizar las series de tiempo de los Sectores Económicos de México en relación con el IPyC. Para el efecto, se aplican las pautas metodológicas de (Mandelbrot, 1997, p.245), (Bouchaud, 2000, p.168), (Mantenga y Stanley, 2000, p.235). Se realiza un análisis estadístico y fractal. Previamente, es necesario demostrar que el comportamiento de este indicador tiene propiedades de similitud y afinidad. Con el software (Fractal, 2010) se estima el exponente de Hurst, cuyo valor es un estadístico de prueba que indica si la serie de tiempo es persistente, antipersistente o aleatorio.

Palabras Clave: Bolsa, análisis técnico, análisis bursátil, análisis fractal, teoría del caos.

Abstract

In this article fractal is applied to the method for is to analyze the series of time of the Economic Sectors of Mexico in relation to the IPyC. For the effect, the methodologic guidelines are applied of (Mandelbrot, 1997, p.245), (Bouchaud, 2000, p.168), (Mantenga and Stanley, 2000, p.235). It is made a statistical analysis and fractal. Previously, it is necessary to demonstrate that the behavior of this indicator has properties of similarity and affinity. With software (Fractal, 2010) the exponent of Hurst is considered, whose value is a statistical one of test which it indicates if the series of time is persistent , antipersistent or random.

Keywords: Stock market, technical analysis, stock-exchange analysis, analysis fractal, theory of the chaos.

Clasificación JEL: G15, G24

¹ Correo Electrónico: economia20@yahoo.com.mx

Introducción

Los cambios de precios de una serie de tiempo son normalmente medidos por los incrementos en los precios, los rendimientos logarítmicos o el valor absoluto de estos últimos. Si P_t denota el precio de algún activo (*precio de una acción, por ejemplo*) en un cierto día de negociación, el incremento en el precio está definido como:

$$\Delta_P(\tau) = P_t - P_{t-\tau} \tag{1}$$

Y el cambio relativo en el precio o rendimiento porcentual Δ_t , como

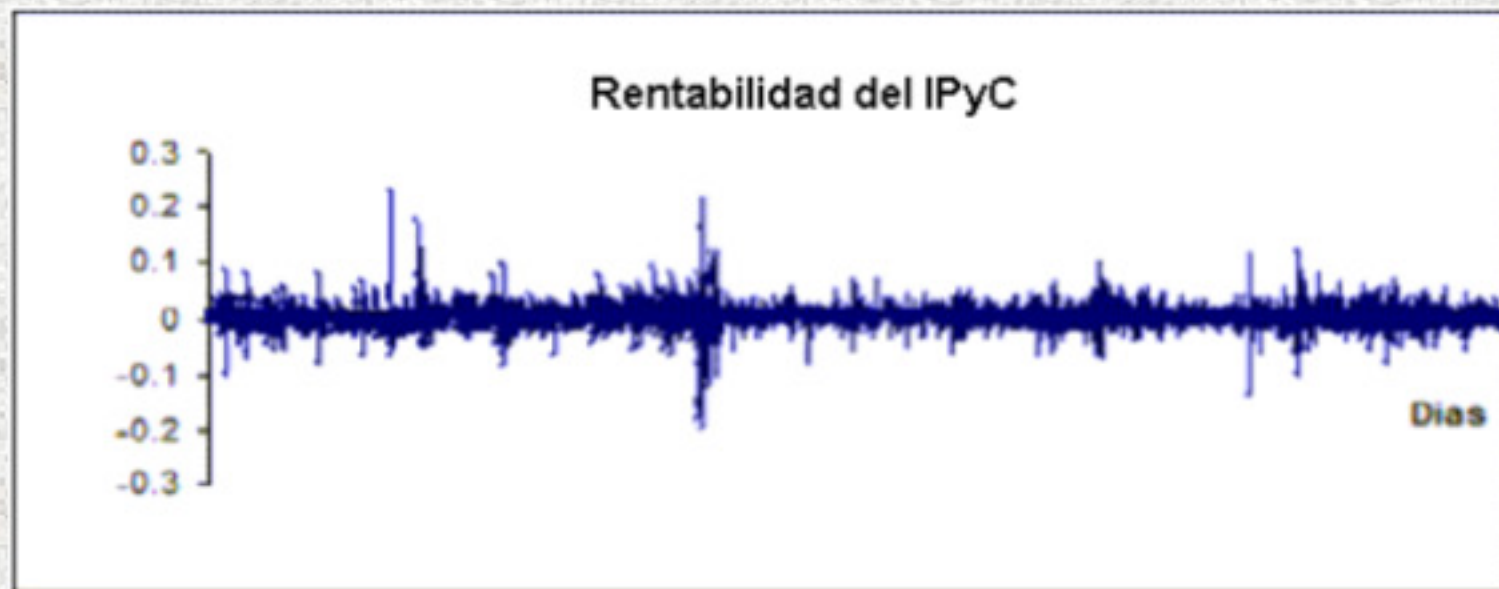
$$\Delta_t(\tau) = (P_t - P_{t-\tau})/P_{t-\tau} \tag{2}$$

Además, sobre una base de composición continua, el rendimiento del precio en un periodo dado puede ser calculado como el logaritmo del precio final menos el logaritmo del precio inicial:

$$\delta_t(\tau) = \ln(1 + \Delta_t) = \ln(P_t/P_{t-\tau}) = p_t - p_{t-\tau} \tag{3}$$

En cuanto al valor absoluto de los rendimientos, éste describe la amplitud de la fluctuación, ya que por definición siempre es positivo y no existen tendencias globales que sean visiblemente obvias. Una variable clave en la mayoría de los instrumentos financieros y que juega un papel determinante en muchas áreas de las finanzas que en nuestra investigación es la Economía con presencia de volatilidad en las series de tiempo de los precios².

Gráfica 1: Rentabilidad diaria del IPyC en el período 03-01-10 al 03-01-11.



Fuente: Bolsa Mexicana de Valores, cotizaciones diarias del IPyC.

² El término volatilidad representa una medida general de la magnitud de las fluctuaciones del mercado. La volatilidad es crucialmente importante en los modelos de fijación del precio de los activos y en la dinámica de las estrategias de cobertura, así como en la determinación de opciones de precio.

Desde el punto de vista empírico, es muy importante modelar cuidadosamente cualquier variación temporal durante el proceso de volatilidad. (Bouchaud, 2001, p. 11). Aunque es común hablar sobre la volatilidad, no hay una definición universalmente aceptada de la misma. Diferentes estimadores pueden ser usados para medir las fluctuaciones de los precios, en particular los valores absolutos de los rendimientos, los rendimientos al cuadrado y el logaritmo de los rendimientos al cuadrado³.

En estudios recientes se ha encontrado que algunos de estos estimadores proporcionan prácticamente la misma evidencia empírica sobre la dependencia a largo plazo. Una manera de calcular las volatilidades históricas de los registros diarios de precios, para diferentes horizontes de tiempo: $n, \dots, 3, 2 = m$, es usando la siguiente ecuación:

$$V_n(\tau) = (n - 1)^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (P^2(\tau + i) - \langle P^2(\tau) \rangle)} \quad (4)$$

Donde el valor promedio de τ denota el tiempo promedio de negociación y (τ) es el tiempo para realizar las transacciones (excluyendo fines de semana y días inhábiles del mercado).

1. Análisis estadístico y fractal del IPyC⁴

El análisis estadístico de la rentabilidad y su volatilidad consistió en determinar si su comportamiento se ajusta a una distribución normal y, además, identificar si cumplen con las distribuciones de colas pesadas (*persistencia*) con todos los perfiles posibles de sesgos⁵.

³ La curva normal está centrada alrededor de la media, la cual se representa por μ . La variación o dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de la desviación estándar, representada por σ . En finanzas, la media es su rendimiento promedio y la desviación estándar es la volatilidad. Adicionalmente a la media y a la desviación estándar, la función de distribución de probabilidad normal tiene dos características: sesgo y la kurtosis, a los cuales también se les conoce como tercer y cuarto momento, y futuros rendimientos en su quinto momento, respectivamente:

$$A = \beta_1 + \beta_2 (B) + \beta_3 (C) + \beta_4 (K) + \beta_5 (F) + \beta_{6-7} \neq (T)$$

Donde:

$\beta_1 - \beta_{6-7}$ = Sectores Económicos

C = Capital Constante

K = Capital Accionario

F = Fuerza G de la Inversión

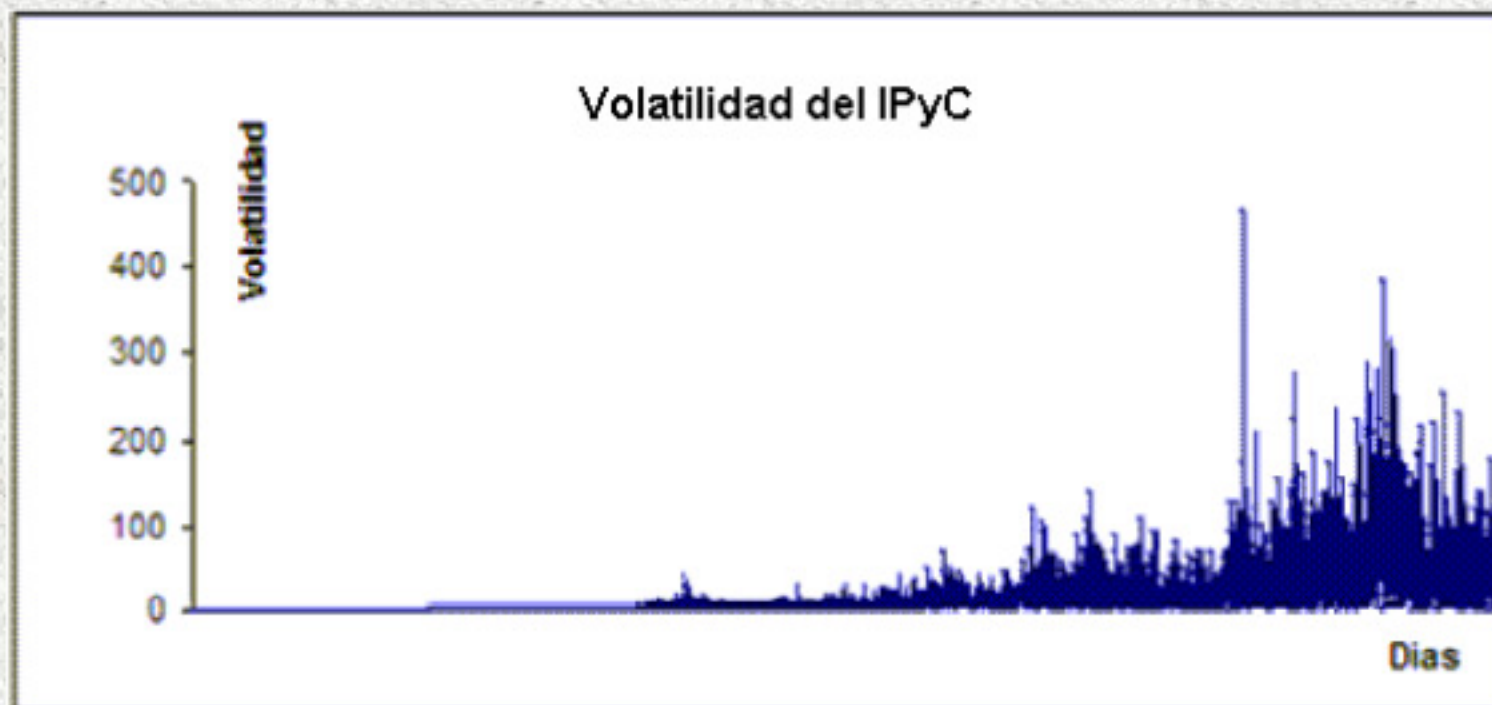
T = Tiempo Discrecional (En nuestra investigación es de 1 año)

⁴ La decisión de estudiar el IPyC obedece a que, además de ser el principal indicador bursátil en la BMV, es de interés analizar series largas y de alta frecuencia por días, pues la comprensión del mercado se enriquece al capturar hechos que no se pueden obtener con modelos que requieren de datos de menor frecuencia y series de tiempo que disponen pocas observaciones. (Ludlow, 1997, p.25).

⁵ Topología de Sesgos:

Sesgo de selección: Grupos no comparables debido a cómo se eligió la muestra o los datos.

Gráfica 2: Volatilidad diaria del IPyC en el período 03-01-10 al 03-01-11.



Fuente: Bolsa Mexicana de Valores, cotizaciones diarias del IPyC.

Estos registros comprenden desde el 03 de Enero de 2010 al 03 de Enero de 2011, dividimos el IPyC en horizontes de tiempo con una variación de diez en diez, a partir de un intervalo de diez datos: 10, 20, 30, ..., 600, 610 y 620. Se calculó para cada horizonte la kurtosis. El promedio de este estadístico se calcula en escala log-log.⁶

1.1. Prueba de normalidad

Es oportuno enfatizar que en estadística es posible demostrar que si consideramos una muestra de tamaño N perteneciente a una población que se distribuye normalmente (*con media μ y desviación estándar σ*) dicha muestra tendrá una distribución normal de media \bar{x} y desviación estándar

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sesgo de información: Grupos no comparables debido a cómo se obtuvieron los datos.

Sesgo de confusión: Existe una mezcla de efectos debido a una tercera variable.

⁶ Es la escala de la medida que utiliza un logaritmo de la cantidad física en vez de la cantidad de sí mismo, cuando los datos cubren una gama grande de valores - el logaritmo reduce esto a una gama más manejable, haciendo las escalas logarítmicas para esta cantidad de la entrada especialmente apropiada, así, nuestros sentidos perciben cocientes iguales de frecuencias.

El teorema del límite central establece que cuando la muestra de tamaño N es suficientemente grande, la distribución de la muestra es aproximadamente normal⁷.

Adicionalmente a la media y a la desviación estándar, la función de distribución de probabilidad normal tiene dos características: sesgo y la kurtosis, a los cuales también se les conoce como tercer y cuarto momento, respectivamente.

El sesgo es un indicador que mide la simetría de la curva. En el caso de una curva normal perfecta, el sesgo será igual a cero.

Si es negativa, la curva estará sesgada a la izquierda; si es positiva, la curva estará sesgada a la derecha.

$$Sesgo = \frac{\sum(x_i - \mu)^3}{(n-1)\sigma^3/2} \quad (5)$$

Donde:

x_i = Nivel de IPyC en cada período expresado en días

μ = Media en el período

σ = Desviación estándar

La kurtosis es el indicador que mide el nivel de levantamiento de la curva respecto a la horizontal.

⁷ La curva normal está centrada alrededor de la media, la cual se representa por μ . La variación o dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de la desviación estándar, representada por σ . En finanzas, la media es su rendimiento promedio y la desviación estándar es la volatilidad.

Esta situación se presenta cuando existen muchas observaciones alejadas de la media. A este fenómeno de alta kurtosis también se le conoce como colas gruesas (*fat tails*)⁸. La kurtosis de una distribución perfecta es igual a 3.

$$Kurtosis = \frac{\sum(x_i - \mu)^4}{(n-1)\sigma^4} \tag{6}$$

Por tanto presentamos los resultados arrojados para conocer el sesgo y la kurtosis del IPyC, en la Tabla 1.

Tabla 1: Sesgo y Kurtosis del IPyC Vs Sectores económicos en México.

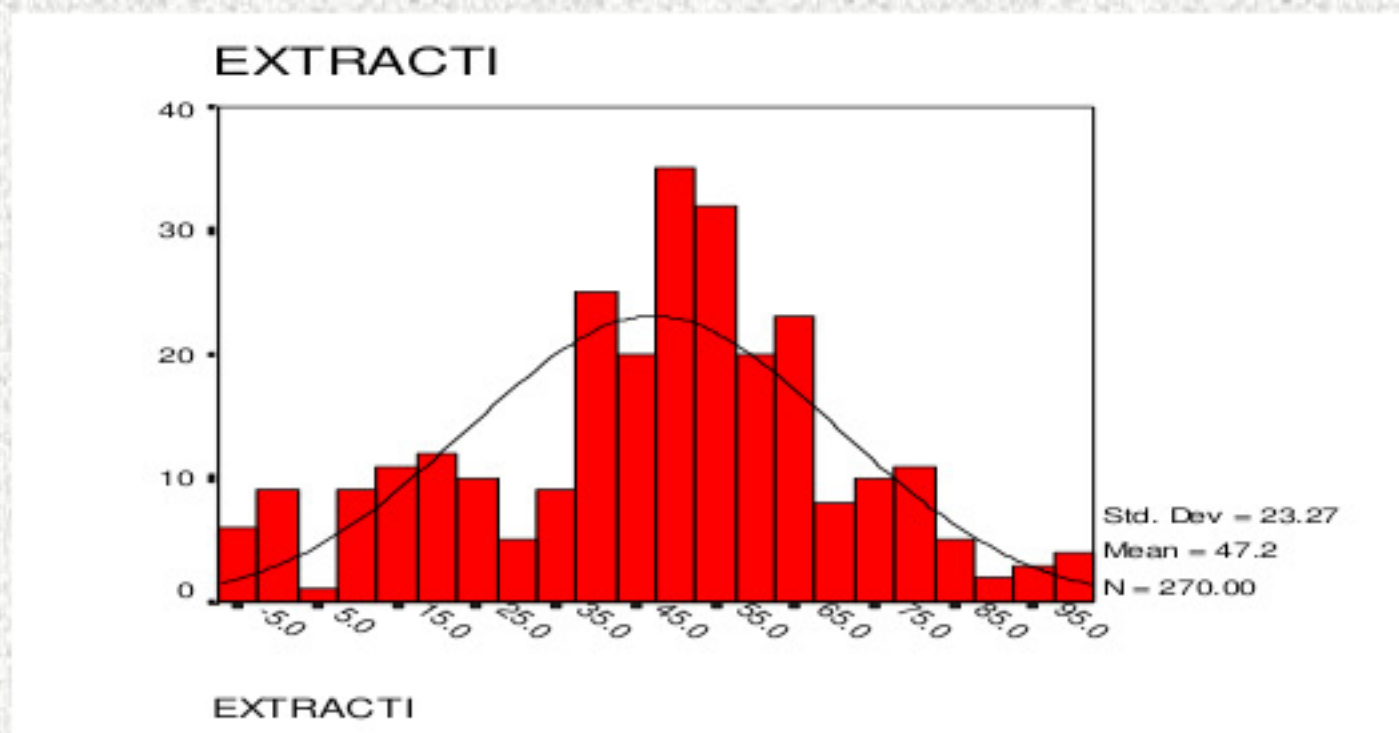
	Mean		Std.Dev	Variance	Skewness		Kurtosis	
	Statistic	St.Error	Statistic	Statistic	Statistic	St. Error	Statistic	St. Error
MAXIMO	18.101 0	.7249	11.9116 9	141.888	.635	.148	-.019	.295
MINIMO	17.123 5	.7374	12.1169 2	146.820	.654	.148	-.019	.295
VOLUMEN	180.47 3	6.2293	102.358 38	10477.23 8	1.425	.148	5.182	.295
EXTRACTI	47.176 9	1.4162	23.2707 9	541.530	-.276	.148	-.221	.295
TRANSFOR	12.733 3	.9866	16.2116 9	262.819	1.174	.148	.120	.295
CONSTRUC	9.7879	.4872	8.00575	64.092	.482	.148	-.490	.295
COMERCIO	11.470 3	.9608	15.7879 6	249.260	1.161	.148	.148	.295
COMYTRAN	24.863 0	.8445	13.8758 7	192.540	-.209	.148	-.646	.295
SERVICIO	22.524 3	1.0125	16.6365 6	276.775	.621	.148	-.396	.295
VARIOS	8.7988	.4351	7.15011	51.124	.111	.148	-.542	.295
RE CIER	17.412 7	.7320	12.0287 1	144.690	.664	.148	-.007	.295

Fuente: Elaboración Propia con Software SPSS 17.0.

⁸ Además es de importancia señalar que los cambios de precios pasados y las futuras volatilidades están negativamente correlacionados, esto es llamado el "efecto de apalancamiento" (leverage effect), lo que refleja el hecho de que los mercados llegan a ser más activos después de una caída en el precio, y se apaciguan cuando el precio es alto. Esta correlación es más visible en los índices accionarios y es caracterizada por una escala de tiempo del orden de 10 días. El efecto de apalancamiento conlleva a un sesgo anómalo negativo en la distribución de cambios de precios como una función del tiempo y es también importante para los rangos de precios.

Consideramos la Media del Sector Extracción por ser la de mayor participación con 47.17% en el IPyC como principal detonante de los actividades del Sector Comercio quien es el más afectado por su poca participación del 11.47%.

Gráfica 3: Sector Extracción y el IPyC.



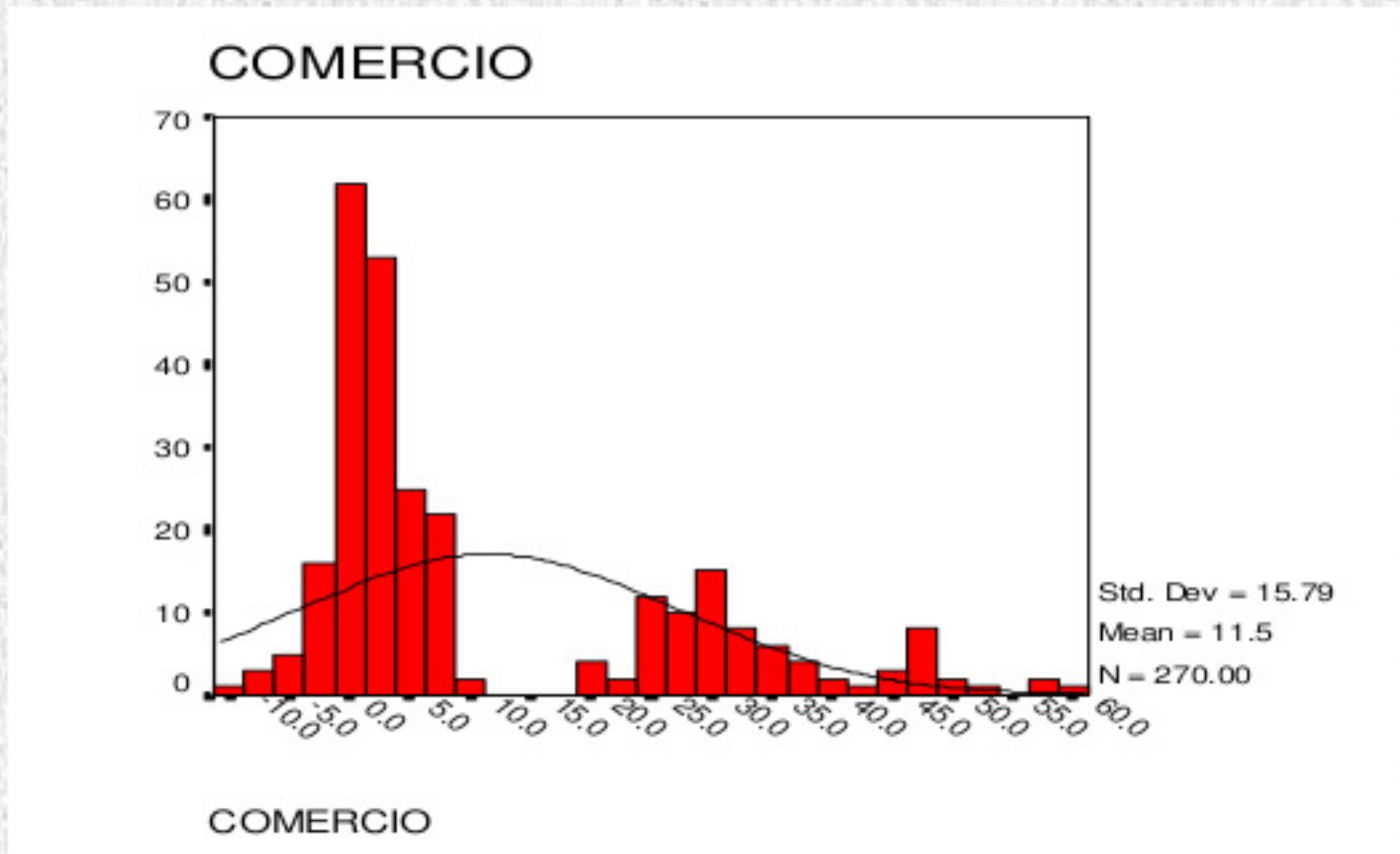
Fuente: Elaboración Propia.

Se calcula el estadístico de prueba:

$$LM = \frac{N \cdot \text{sesgo}^2}{6} + \frac{N \cdot (\text{kurtosis} - 3)^2}{24} \quad (7)$$

Donde LM es un estadístico de prueba y se distribuye de acuerdo con una bicuadrada con dos grados de libertad. Se considera la hipótesis nula el valor 0.5 (valor que corresponde a la curva normal o gaussiana) con un 95% de nivel de confianza.

Gráfica 3.1: Sector Comercio y el IPyC.



Fuente: Elaboración Propia.

Entonces, la hipótesis alternativa sostiene que el valor es menor de 0.5 (valor que corresponde a una evidencia Fractal, por no ser Browniana ó de 1/2), en este caso si pasa dicha prueba, no es normal, para todos y cada uno de los sectores de actividad económica, como lo muestran las tablas 2, 2.1 y 2.2 respectivamente y las presentamos a continuación:

Tabla 2: Prueba 1 de anomalidad del IPyC y sectores económicos en México.

Runs Test											
	CIERRE	MAXIMO	MINIMO	VOLUMEN	EXTRACTI	TRANSFOR	CONSTRUC	COMERCIO	COMYTRAN	SERVICIO	VARIOS
Test Value ^a	15.8550	16.7000	15.4000	171.0000	50.3950	5.7000	8.1100	3.3500	26.3600	20.9500	9.5200
Cases < Test Value	135	135	135	135	135	135	135	135	135	134	135
Cases >= Test Value	135	135	135	135	135	135	135	135	135	136	135
Total Cases	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270
Number of Runs	14	18	18	112	22	14	14	16	14	12	21
Z	-14.877	-14.389	-14.389	-2.927	-13.902	-14.877	-14.877	-14.633	-14.877	-15.121	-14.023
Asymp. Sig. (2-tailed)	.000	.000	.000	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

a. Median

Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 2.1: Prueba 2 de anomalía del IPyC y sectores económicos en México.

Runs Test2											
	CIERRE	MAXIMO	MINIMO	VOLUMEN	EXTRACTI	TRANSFOR	CONSTRUC	COMERCIO	COMYTRAN	SERVICIO	VARIOS
Test Value ^a	17.4127	18.1010	17.1235	180.4737	47.1769	12.7333	9.7879	11.4703	24.8630	22.5243	8.7988
Cases < Test Value	153	152	155	149	116	189	154	189	123	146	123
Cases >= Test Value	117	118	115	121	154	81	116	81	147	124	147
Total Cases	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270
Number of Runs	8	10	12	104	12	2	9	2	14	12	17
Z	-15.594	-15.348	-15.092	-3.766	-15.095	-16.329	-15.468	-16.329	-14.865	-15.112	-14.496
Asymp. Sig. (2-tailed)	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

a. Mean

Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 2.2: Prueba 3 de anomalía del IPyC y sectores económicos en México.

Runs Test3											
	CIERRE	MAXIMO	MINIMO	VOLUMEN	EXTRACTI	TRANSFOR	CONSTRUC	COMERCIO	COMYTRAN	SERVICIO	VARIOS
Test Value ^a	44.68 ^b	29.25 ^b	45.62 ^b	178.47 ^b	72.58 ^b	2.41	15.14	29.37 ^b	46.34 ^b	56.70 ^b	15.87 ^b
Cases < Test Value	262	223	266	146	235	90	193	220	248	261	228
Cases >= Test Value	8	47	4	124	35	180	77	50	22	9	42
Total Cases	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270
Number of Runs	7	7	5	108	8	13	15	9	9	7	13
Z	-10.404	-15.232	-8.644	-3.327	-14.637	-14.823	-14.381	-14.883	-13.320	-11.068	-13.724
Asymp. Sig. (2-tailed)	.000	.000	.000	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

a. Mode

b. There are multiple modes. The mode with the largest data value is used.

Fuente: Elaboración Propia.

El análisis probabilístico consistió en determinar qué distribución de probabilidad ajustaba mejor el comportamiento histórico del IPyC, utilizando el software SPSS⁹. Una vez identificadas las distribuciones estadísticas, se procedió a analizar sus parámetros. El propósito de este análisis fue el de hallar distribuciones de colas pesadas (*comportamiento de leyes de potencia*).

⁹ El software SPSS fue utilizado para un mejor ajuste de distribución de probabilidad del comportamiento del IPyC. Este software es desarrollado para analizar situaciones sensibles al riesgo, ordena las distribuciones de probabilidad, empezando con las que mejor ajustan los datos.

2. Análisis fractal

El análisis fractal consistió en detectar si la cola de distribución de probabilidad de la rentabilidad y de la volatilidad cumple con la ley de potencia y, además, si la serie de tiempo del IPyC tiene propiedades de autosimilitud y autoafinidad mediante la estimación del exponente de Hurst (H)¹⁰.

En primer lugar, se estudian las distribuciones de ley de potencia por su característica de ser autosimilares en diferentes escalas o exponentes; en segundo lugar, se estima el exponente de Hurst aplicando el software Fractal; finalmente, se estudian las funciones de autocorrelación.

La más antigua y famosa ley de potencia en la economía es la distribución de la riqueza de Pareto (*Bouchaud, J, 2002, p.67*). La distribución de la riqueza individual $F(X)$ es frecuentemente descrita, en su cola asintótica, por una ley de potencia:

$$F(X) \cong \frac{X_0^\mu}{X^{1+\mu}}, X \gg X_0 \quad (8)$$

Dónde:

$F(X)$ es la distribución de riqueza de una economía.

μ caracteriza el parámetro de crecimiento de las grandes riquezas (X s).

X riqueza de los agentes económicos.

Conforme el valor de μ es menor que 1, el crecimiento es más lento, y es más grande la brecha entre los más ricos y los más pobres. De acuerdo con Pareto, en una población de tamaño N , el cociente de la riqueza más grande y la riqueza típica (*mediana*) crece como $N^{1/\mu}$. En el caso de $\mu < 1$, la riqueza promedio diverge: esta corresponde a una economía en la que una fracción finita de la riqueza total está en manos de muy pocos individuos. Por el contrario, cuando $\mu > 1$, los individuos más ricos sólo poseen una fracción de la riqueza total (*en el límite cuando $N \rightarrow 1$*). Empíricamente, el exponente μ está en el rango $1 \leq \mu \leq 2$. Este exponente de Pareto también describe la distribución del ingreso, el tamaño de las compañías, los fondos de pensión, etcétera. (*Bouchaud, 2001, p.123*). Donde R indica el rango (por ejemplo la diferencia entre el valor de la descarga máxima acumulada del río y la mínima, a lo largo del periodo de estudio) y S la desviación típica de los valores observados de las descargas X .

La evaluación del exponente de Hurst es un primer paso en el reconocimiento y caracterización de la dinámica compleja en series de tiempo. Este análisis permite distinguir una serie aleatoria de otra no azarosa y nos ayuda en la descripción cualitativa de conductas de mercados financieros¹¹.

¹⁰ Harold Edwin Hurst, diseñó la presa de Assuan (Egipto) y estudió series temporales relacionadas con el caudal del río Nilo y los problemas del almacenamiento de agua. Utilizó una base de datos de 800 años de archivos y notó que había una tendencia de un año de alto caudal seguido por otro de caudal más alto, y para uno de bajo caudal le seguía otro más bajo. Con este motivo, creó un nuevo método estadístico (R/S).

¹¹ Un exponente con rango $0.5 < H < 1$ corresponde a series temporales que muestran persistencia (un periodo de crecimiento es seguido por otro análogo). Presentamos la forma más sencilla de acotamiento de límites del finitimo al infinitésimo movimiento:

Por otro lado, una serie de tiempo que tiene algún nivel de previsibilidad mostrará auto correlación positiva. En cambio, una serie con auto correlación negativa no tiene nivel de previsibilidad. Un exponente de Hurst en el rango $0.5 < H < 1$ corresponde a series temporales que muestran persistencia (*un periodo de crecimiento es seguido por otro análogo*). Esto significa que hay más probabilidad que a un aumento le siga otro similar. Tiene auto correlación positiva. Mientras que los valores ubicados en $0 < H < 0.5$ corresponden a un comportamiento antipersistente (*un periodo de crecimiento es seguido de otro de decrecimiento o viceversa*), hay más probabilidad que el próximo período se encuentre debajo del promedio. Tiene correlación negativa.

Finalmente, si H es igual a 0.5 corresponde a un movimiento aleatorio; un aumento puede ser seguido por una baja o por otro similar (los movimientos no despliegan ninguna memoria). Tiene autocorrelación igual a cero.

El exponente de Hurst " H " es mayor que 0.5 y menor que 1 , lo que significa que el IPYC tiene un comportamiento persistente, la información diaria, tiene un comportamiento fractal, dado que el exponente H es mayor que 0.5 y menor que 1 . Es decir, lo más probable es que continúe con la tendencia alcista en el largo plazo, existiendo bajo ruido en los datos analizados.

Y para detectar la existencia de memoria en las series de tiempo de la volatilidad del precio $X(\tau)$, se empleó.

$$C(\Delta\tau) = (X(\tau + \Delta\tau)X(\tau)) / (X^2(\tau)) \quad (9)$$

La forma en que se cuantificaron las correlaciones fue mediante la determinación del exponente de Hurst, H . La relación esperada entre el valor de una serie en el tiempo t y sus valores en el tiempo $t + \tau$ es una medida de la correlación presente en una serie.

Una serie de tiempo estacionaria¹² tiene una correlación que sólo depende del periodo de tiempo τ entre las dos observaciones y el decrecimiento hasta cero, lo suficientemente rápido para que τ aumente, reflejando el hecho de que la influencia de los valores anteriores disminuye con los intervalos considerados. La velocidad de este decrecimiento es una medida de la "memoria" del proceso estocástico.

Desde que las series de tiempo financieras están conformadas por datos discretos, $\{ \dots \}$, tal que τ_0 es el intervalo mínimo de tiempo, la función de autocorrelación es definida como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^t = \left[\frac{Gh}{1-J} \right] + Jj + Jj' + Jj'' [\lim dJj, dJk, dJl] + \theta E_{t-\tau}^n = \lim \frac{Gh^{1-1/E}}{1-J}$$

¹² Demostrándola con el Principio de Estacionalidad Económica:

$$\frac{Gh}{1-J} \left[\frac{\partial dJj, \partial dJk, \partial dJl}{1^{1-1/E}} \right]^{1/2} = \frac{Gh}{1-J} \left[\frac{dJj}{dt} \frac{dJk}{dt} \frac{dJl}{dt} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{1}{E} + \frac{1}{2} + Et \right]$$

$$C(n) = \frac{\text{Cov}(n)}{\text{Cov}(0)} \tag{10}$$

Donde

$$\text{Cov}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2} X_k X_{k+n} \tag{11}$$

$$\text{Cov}(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N/2} X_k^2 \tag{12}$$

N representa el número total de datos. El comportamiento de las funciones de autocorrelación, cuando $\tau \rightarrow 0$ y $\tau \rightarrow \infty$, determina las propiedades locales de las series de tiempo.

Para un ruido blanco, donde el valor en un instante no está correlacionado con algún valor previo, la función de autocorrelación es $C(\tau) = 0$ para $\tau > 0$.

Muchas de las series de tiempo no estacionarias están caracterizadas por correlaciones a corto plazo con una escala de tiempo característica, τ_0 , y una función de autocorrelación decreciente exponencialmente, por ejemplo:

$$C(\tau) \propto \exp(-\tau/\tau_0) \tag{13}$$

Si la función de autocorrelación $C(n)$ escala con el intervalo n como:

$$C(n) \propto n^{-\beta} \tag{14}$$

Para n muy grande, donde $0 < \beta < 1$, entonces $\{X_i\}$ es llamada correlación a largo plazo, proceso con memoria a largo plazo. La razón de emplear estos términos es que $C(n)$ decrece muy lentamente, de tal forma que $\sum_{n=1}^N C(n)$ diverge cuando $\infty \rightarrow N$.¹³

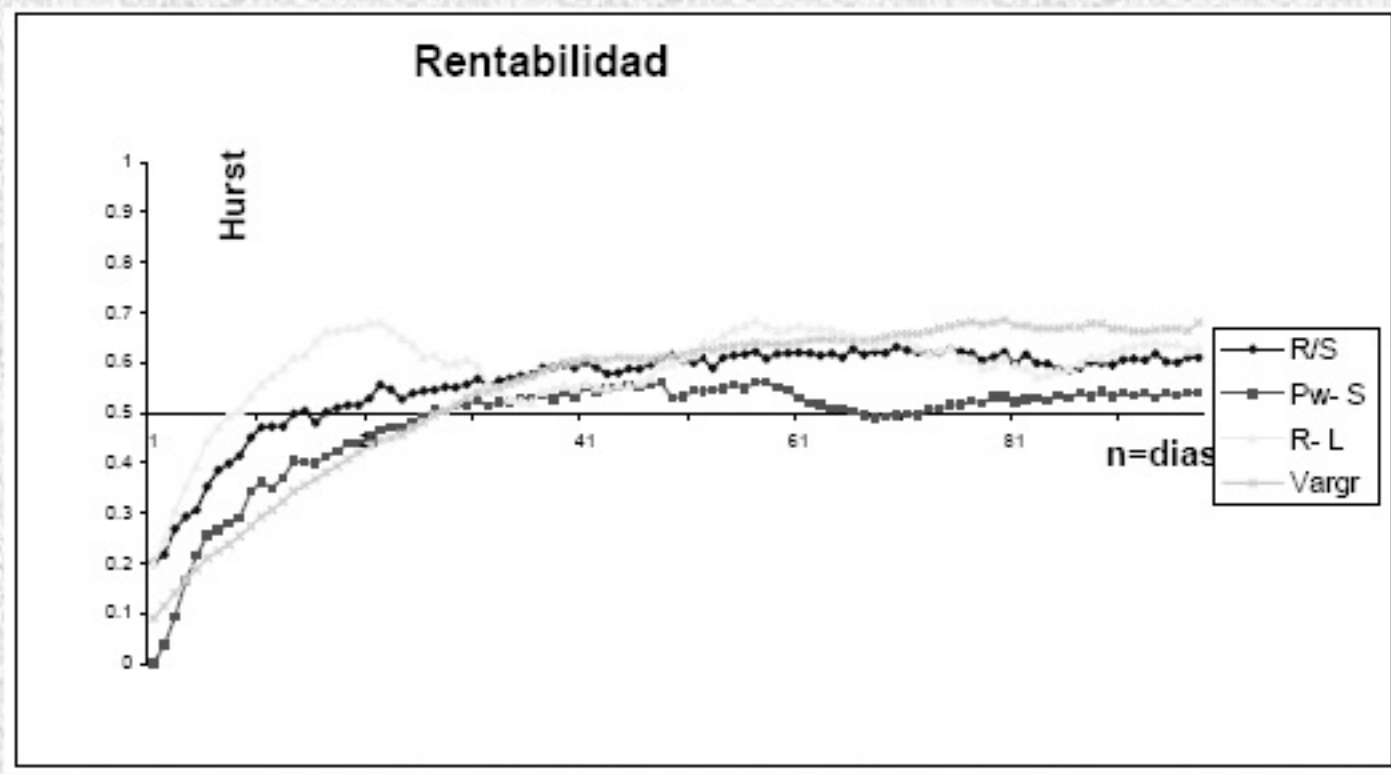
¹³ Sea $\sum u_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum v_k$ una serie convergente, con suma S , verificándose que $u_k \leq v_k$, entonces $\sum u_k$ converge y su suma es menor o igual a la suma S . La serie $\sum v_k$ es una serie mayorante de la serie dada. Análogamente puede decirse que, si los términos de una serie de términos positivos son mayores o iguales que los correspondientes de otra serie divergente, es divergente. Sea $\sum u_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum v_k$ una serie divergente, verificándose que $u_k \geq v_k$, entonces $\sum u_k$ diverge. La serie $\sum v_k$ es una serie minorante de la serie dada.



Para detectar la existencia de memoria en las series de tiempo de la volatilidad del precio, $X(\tau)$, se empleó la función de autocorrelación :

$$C(\Delta \tau) = \langle X(\tau + \Delta\tau)X(\tau) \rangle / \langle X^2(\tau) \rangle \tag{15}$$

Gráfica 4: Escalamiento del exponente de Hurst en los Métodos Fractales de R³.



Fuente: Elaboración Propia.

El método estadístico del rango reescalado (R/S) utilizado por Mandelbrot y Wallis, se basa en un previo análisis de Hurst. Permite el cálculo del parámetro de autosimilitud H para medir la intensidad de dependencia de largo plazo en una serie de tiempo. Para una serie de tiempo de longitud n

$$X = \{X_{\tau}; \tau = 1, 2, \dots, n\} \tag{16}$$

R/S es definido como el cociente del recorrido máximo normalizado de la señal integrada $R(n)$ entre la desviación estándar $S(n)$:

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \frac{\max\{0, r_{\tau}; \tau=1, 2, \dots, n\} - \min\{0, r_{\tau}; \tau=1, 2, \dots, n\}}{\sqrt{S^2(n)}} \tag{17}$$

Donde:

$$\frac{\max\{\dots\} - \min\{\dots\}}{2}$$

Es el recorrido de los valores

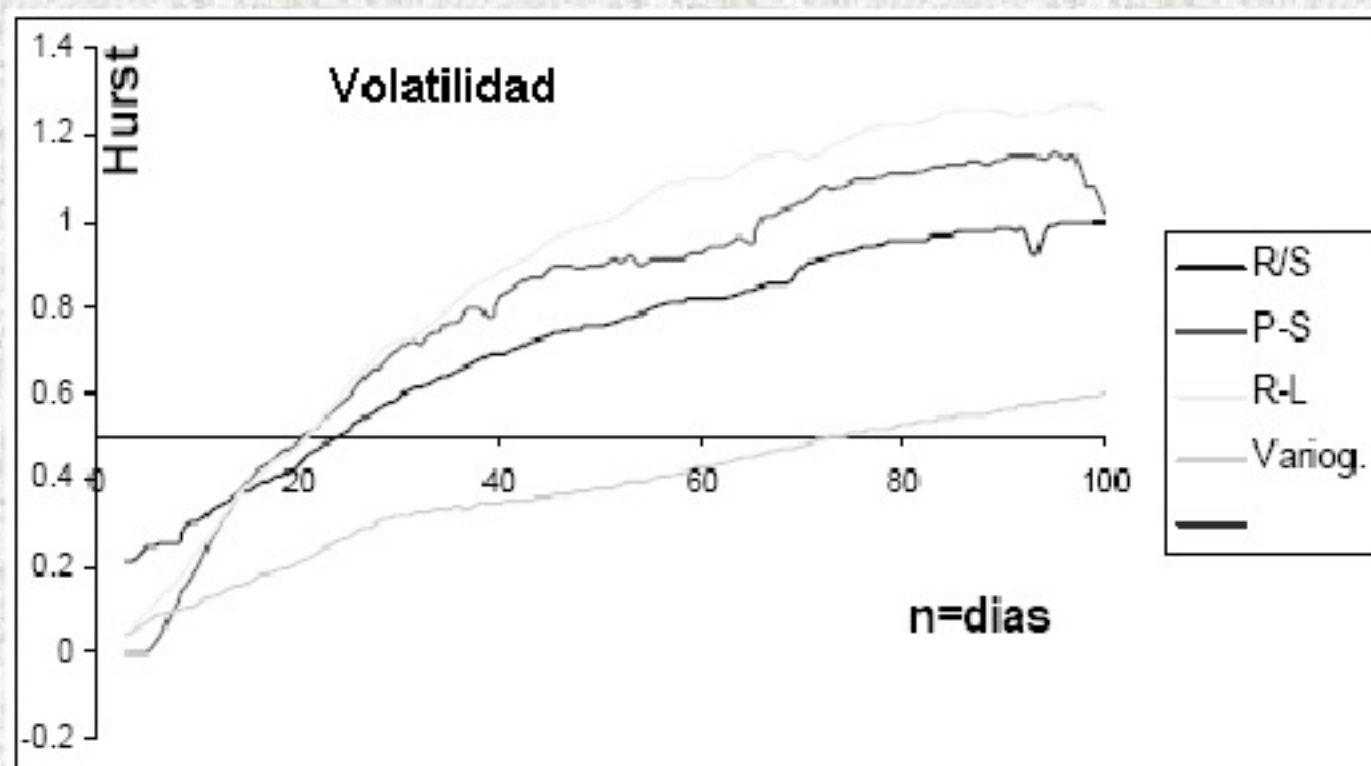
$$r_k = \sum_{\tau=1}^k X_{\tau} - \frac{k}{n} \sum_{\tau=1}^n X_{\tau}$$

Es el valor máximo menos el mínimo

$$S(n) = \left[\frac{1}{n} \sum_{\tau=1}^n \left(X_{\tau} - \frac{1}{n} \sum_{\tau=1}^n X_{\tau} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Desviación estándar

Gráfica 4.1: Escalamiento del exponente de Hurst en los Métodos Fractales de R^3 .



Fuente: Elaboración Propia.

Una medición confiable de $S(n)$ requiere de una muestra de datos con un intervalo constante, ya que la diferencia esperada entre los valores constantes de X es una función de la distancia que separa a éstas. La exactitud en la determinación de H depende del número de datos utilizados en el cálculo. Si dicho número es razonablemente grande, se espera que R/S proporcione información sobre la auto-similitud de todos los intervalos de tiempo de los Sectores económicos de México en R^3 con aleatoriedad fractal, dependiendo del Sesgo de Operación en el IPyC.

3. Conclusiones.

Luego de haber aplicado el análisis en base del R^3 y aleatoriedad Fractal con Evidencia para los Sectores Económicos de México obtuvimos 3 resultados significativos:

1. El análisis fractal del IPyC permite determinar en forma acertada los movimientos del mercado por lo que determinamos rangos con niveles de confianza superiores, el pronóstico será más exacto y de esta forma la tendencia alcista o bajista real, es decir en términos nominales para después llevarlos al plano logarítmico a través del chartismo con los 7 Sectores Económicos de México (*Extracción, transformación, construcción, comercio, comunicaciones y transportes, servicios y varios*).

En correlación con el IPyC de la Bolsa Mexicana se presentó margen en 130 empresas (todas las bursátiles), su pérdida total fue del 0.2% de 100 en 4 empresas (*AGRIEXP¹⁴, CNCI¹⁵, QUMMA¹⁶ y TEKCHEM¹⁷*) y fue la única en mal tratamiento de información con análisis técnico y representa una categoría de auto similitud.

Pues en esta bolsa se exige que el chartismo parezca idéntico a diferentes escalas, esto es prueba de un buen manejo y selección de datos numéricos o estadísticos que se preserven con el cambio de escala (*de nominal a real*), y nos lleva a enfocarnos a la cuasiautosimilitud que exige un chartismo aproximadamente idéntico a diferentes escalas.

2. Es una adecuada herramienta de predicción de los momentos en que ocurrirán sucesos importantes relacionados con la evolución del mercado, que nos permita examinar más a detalle el ruido estocástico de nuestra del IPyC con los Sectores Económicos y todas las explosiones localizadas de la volatilidad pueden ser claramente identificadas. Esta característica, conocida como agrupación de la volatilidad (*volatility clustering*), invoca fluctuaciones intermitentes similares en flujos turbulentos.

¹⁴ Agro Industrial Exportadora, S.A. de C.V. (AGRIEXP), es en la actualidad una empresa que actúa como controladora pura, que a través de sus compañías subsidiarias, procesa preparados de frutas para industrias de yoghurts, helados y repostería.

¹⁵ Universidad CNCI es una empresa que trabaja para ofrecer servicios de educación al mercado mexicano.

¹⁶ Qumma inició su cotización en el mercado de valores mexicano el 29 de junio de 1994, en ese entonces bajo la denominación de Fernández Editores, S.A. de S.V. y con clave de cotización Gfesa. De esta fecha y hasta el 31 de diciembre de 1998, su estructura había sido siempre vertical, es decir Gfesa como controladora y Fesa como subsidiaria directa.

¹⁷ Es una compañía con más de 50 años de experiencia en el ramo del transporte multimodal, Ofrecemos servicios integrales de logística, portuarios, terrestre y marítimos soportados por una sólida estructura operativa, tecnológica y experimentados recursos humanos.

Este efecto puede ser analizado más cuantitativamente: la función de correlación temporal de la volatilidad diaria puede ser ajustada por una potencia inversa del desplazamiento, con un exponente pequeño en el rango $0.1 - 0.3$.

Este lento decrecimiento de la función de correlación de la volatilidad conduce a un comportamiento multifractal de los cambios de precios: la kurtosis de la diferencia de los logaritmos de los precios sólo decrece como una pequeña potencia del tiempo, en lugar de la inversa del tiempo como sería el caso si la volatilidad fuera constante o tuviera correlaciones en el corto plazo.

Este lento decrecimiento de la kurtosis tiene importantes consecuencias en la teoría de rango de precios y de acuerdo al volumen negociado ya que están fuertemente correlacionados. En cada transacción hay una probabilidad de que el precio cambie, y después de un cierto horizonte de tiempo, existe un cambio total en el precio. Nosotros obtuvimos el cambio de precios (dado que la distribución acumulativa obedece a una ley cúbica inversa, la función de distribución de probabilidad, por diferenciación) y obedece a una ley cuártica (de cuarto momento) inversa.

Debe tenerse muy en cuenta la periodicidad del conteo, el "grado del ciclo" en que nos encontramos. Haciéndolo evitaremos desagradables y costosos errores al realizar pronósticos de precios con la inclusión del tiempo como variable (*nuestra investigación considero 1 año fiscal*), esto significa que no hay una escala característica para la difusión de precios, debido a que si se está difundiendo alrededor de un medio que por sí mismo está cambiando (como el universo económico en el que vivimos), entonces las leyes de la difusión cambian y, en particular, adoptan una forma de escala libre ó aleatoriedad Fractal en evidencia de los Sectores Económicos de México.

Bibliografía.

- Bouchaud, J. P. & Potters. (2008). *M. Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press. Cambridge.
- Bouchaud, J. P. (2008). *An introduction to statistical finance*. Physica. New York.
- Bouchaud, J., & Potters, M. (2008). *The leverage effect in financial markets: retarded volatility and market panic*. Physica. New York.
- Braun E. (2006). *Caos, Fractales y cosas raras*. Colección la Ciencia en México. N° 150. México.
- Chorafas D.(2007). *Chaos Theory in the Financial Markets*. IRWIN. Professional Publishing. Chicago.
- Ludlow J. (2006). *Modelos, pronósticos y volatilidad de las series de tiempo generadas en la Bolsa Mexicana de Valores*. Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco. México.
- Mantegna R. & Stanley H.(2007). *Scaling behavior in the dynamics of an economic index*. Nature. Chicago.
- Petters E.(2007). *Chaos and Order in Capital Markets: A New View of Cycles, Prices and Market Volatility*. Wiley. New York.
- Plerou V. & Stanley H. (2007). *Two-phase behavior of financial markets*. Nature. Chicago.
- Shoroeder.(2008). *From Here to Infinity, a guide to today's Mathematics*. Oxford University Press. México.
- Warnecke Hans-Jürgen.(2008). *The Fractal Company*. Springer-Verlag. Chicago.
- Werner De Bondt, Richard Thaler.(2007). *Journal of Finance*. Volume 40. Chicago.