

*Luis Ceferino Franco Arbeláez*  
*Ermilson Velásquez Ceballos*

### **Resumen**

El presente artículo es uno de los resultados de un proyecto de investigación financiado por la Universidad EAFIT en el año 2009. En el contexto del riesgo operacional, se hace un desarrollo formal de los métodos de Simulación Montecarlo, el algoritmo de recursión de Panjer y la Aproximación Analítica de Böcker y Klüppelberg, que son tres de las técnicas más utilizados para cuantificar ese riesgo en entidades financieras en el ámbito mundial. Luego se desarrolla una aplicación para un caso práctico, aplicando los tres métodos, y se obtienen conclusiones sobre su desempeño relativo.

**Palabras clave:** Riesgo operacional, Basilea, Método de distribución de Pérdidas, Simulación Montecarlo, Recursión de Panjer, Aproximación de Böcker y Klüppelberg.

### **Abstract**

This article is one of the outcomes of a research project financed by Universidad EAFIT in the year 2009. In the operational risk context, a formal development of Montecarlo simulation methods, Panjer recursion algorithm, as well as Böcker and Klüppelberg analytical approximation is done, which are three of the most used techniques in order to quantify this risk in financial institutions worldwide. Subsequently an application for a practical case is developed by applying the three methods, and conclusions about its relative performance are obtained.

**Keywords:** Operational risk, Basel, Loss Distribution Approach, Montecarlo Simulation, Panjer's Recursión, Böcker and Klüppelberg Approximation.

**Clasificación JEL:** C10, C15, C63, G39.

# Alternativas fundamentales para cuantificar el riesgo operacional

*Luis Ceferino Franco Arbeláez\**  
*Ermilson Velásquez Ceballos\*\**

## 1. Introducción

Aunque ha sido una preocupación histórica, la cuantificación del riesgo operacional se ha convertido en una actividad obligada en las instituciones financieras, desde el surgimiento de la Convergencia Internacional de Medidas y Estándares de Capital, o Nuevo Acuerdo de Basilea, emitido por el Banco de Pagos Internacionales (Bank for International Settlements-BIS) en el año 2004, que incorporó ese riesgo en el cálculo de la relación de solvencia, para estimar los requerimientos de capital. Aunque se debe cuantificar el riesgo operacional para satisfacer los estándares regulatorios, el objetivo fundamental debe ser robustecer los procesos de control y la disminución de pérdidas potenciales, y en general, fortalecer la toma de decisiones tendientes a la generación de valor. Según ese acuerdo, se define el riesgo operacional como la pérdida potencial de una entidad por fallas o deficiencias en los sistemas internos, en los procesos, en las personas, o algunos factores externos.

El procesamiento sistemático de cualquier tipo de riesgo en finanzas, cubre tres etapas básicas: Identificación, cuantificación y gestión. Entre los retos relativos al riesgo operacional se incluyen desde la carencia de una estandarización conceptual, y la prevalencia de una cultura reactiva, hasta la falta de una metodología unificada para la cuantificación. En la etapa central de cuantificación, la modelación matemática y estadística entran a ser las herramientas inevitables.

---

Fecha de recepción: febrero 08 de 2010 - Fecha de aceptación: marzo 08 de 2010.

\* Luis Ceferino Franco Arbeláez. Universidad EAFIT. lfranco2@eafit.edu.co. Medellín, Colombia.

\*\* Ermilson Velásquez Ceballos. Universidad EAFIT. evelas@eafit.edu.co. Medellín, Colombia.

Para el proceso de modelación y cuantificación del riesgo operacional, en el ámbito mundial, especialmente durante los últimos años, se han desarrollado múltiples estudios. Entre los autores que han generado investigaciones relacionadas con riesgo operacional en los últimos años se tiene: Frachot, P. Georges, T. Roncalli (2001), analizan el modelo LDA como una adecuación de técnicas actuariales; Marcelo Cruz (2002) aporta un análisis cuantitativo para el riesgo operacional y propone estrategias para modelar, gestionar y cubrir ese riesgo. Antoine Frachot, Olivier Moudoulaud, Thierry Roncalli (2003), plantean la implementación de métodos de medición avanzada para riesgo operacional, de tal forma que los estándares cualitativos y cuantitativos establecidos por Basilea puedan ser reconciliados. Antoine Frachot, Thierry Roncalli, Eric Salomon (2004) analizan el problema de correlación en riesgo operacional.

La diversidad de métodos refleja diferentes niveles de sofisticación y sensibilidad al riesgo. Los AMA (Advanced Measurement Approaches), término que se ha convertido en genérico para representar diversos modelos de medición avanzada, según lo establecido por Basilea, admiten flexibilidad en la cuantificación del riesgo operacional, y permiten a las entidades elaborar su propio sistema de modelación y medición del riesgo operacional. Análogo a lo que ocurre con riesgo de mercado, Basilea no establece un tipo particular de modelo, sino que determina un conjunto de estándares cualitativos y cuantitativos que deben ser satisfechos por cualquier modelo interno que se decida implementar. Entre los estándares cuantitativos hay dos fundamentales: la medida del riesgo operacional es un OpVaR- (Operational Value at Risk) a un nivel de confianza del 99.9%, y el método de cuantificación debe capturar eventos potenciales de pérdidas severas en la cola. El Valor en Riesgo Operacional a un nivel de confianza  $\alpha$ , denotado OpVaR ( $\alpha$ ), significa el nivel de pérdidas que sólo es excedido con una probabilidad  $1-\alpha$ , en el horizonte de tiempo considerado.

Entre los métodos de medición avanzada AMA, la técnica más utilizada es el método de distribución de pérdidas, conocido como el LDA (Loss Distribution Approach).

En este artículo se desarrollan formalmente tres de las alternativas de modelación y cuantificación asociadas a los modelos LDA: El método

de Simulación Montecarlo, el algoritmo de Recursión de Panjer y la Aproximación Analítica de Böcker y Klüppelberg. Luego, mediante algoritmos implementados en MatLab, se aplican esas técnicas a una base de datos de riesgo operacional. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos para hacer comparaciones y obtener conclusiones sobre su desempeño relativo.

## **2. Método de distribución de pérdidas (LDA)**

El método de distribución de pérdidas, conocido como LDA (Loss Distribution Approach) es la alternativa más comúnmente utilizada entre los llamados modelos de medición avanzada (AMA).

El método LDA incluye la modelación separada de la distribución de probabilidad de la severidad y la distribución de probabilidad de la frecuencia de las pérdidas, y luego las combina mediante simulación Montecarlo u otra técnica estadística para generar una distribución de pérdidas agregadas para cada combinación línea de negocio/tipo de riesgo para un horizonte temporal específico.

Los orígenes del LDA se ubican en las aplicaciones actuariales, desarrolladas por la industria de seguros durante muchos años (Bühlmann, 1970). El principal objetivo del modelo LDA es proporcionar un estimativo del riesgo operacional para una entidad y sus unidades de negocio, a partir de una distribución de pérdida que refleja los datos de pérdidas subyacentes. El LDA se soporta en la recopilación de datos de pérdidas históricas internas (frecuencia y severidad), que pueden ser complementados con datos externos, adecuadamente escalados.

Según Basilea II, en una entidad financiera la exposición al riesgo operacional se divide en una serie de líneas de negocio y eventos. En general, se consideran ocho líneas de negocio (finanzas corporativas, negociación y ventas, banca minorista, banca comercial, pagos y liquidación, servicios de agencia, administración de activos e intermediación minorista) y siete eventos de pérdidas (fraude externo, fraude interno, clientes, ejecución y administración de procesos, fallas tecnológicas, daños a activos físicos, relaciones laborales).

El modelo LDA proporciona estimaciones para la pérdida agregada, tanto por línea de negocio como por evento, que luego son combinadas para estimar la pérdida operacional total.

En el LDA la pérdida total se define como una suma aleatoria de las distintas pérdidas:

$$L = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^8 S_{ij} \quad (2.1)$$

donde  $S_{ij}$  es la pérdida total en la celda  $i, j$  de la matriz de pérdidas. Las  $S_{ij}$  se calculan como:

$$S_{ij} = \sum_{N=1}^n X_{Nij} \quad (2.2)$$

Donde  $N_{ij}$  es la variable aleatoria que representa el número de eventos de riesgo en la celda  $i, j$  (frecuencia de los eventos) y  $X_N$  es el monto de la pérdida en la celda  $i, j$  (severidad del evento). En consecuencia, las pérdidas son resultado de por lo menos dos diferentes fuentes de aleatoriedad, la frecuencia y la severidad.

El cálculo del riesgo operacional para la celda  $i, j$  será representado por un percentil  $\alpha$  determinado (por ejemplo, el 99,9%) de la distribución de pérdidas agregadas por período en esa celda, que en lo sucesivo se denota simplemente como  $S(x)$ , porque, en primera instancia, el análisis se hace para cada celda específica.

La distribución de  $S(x)$  se obtiene mediante el estudio por separado de la distribución frecuencias de pérdidas  $p_n = P(N=n)$  y la distribución de severidad de las pérdidas  $f_X(x)$ . Estas dos distribuciones se asume que son independientes y estables sobre el tiempo.

La distribución de las pérdidas agregadas es resultado de una composición entre la variable aleatoria discreta asociada a la frecuencia, y la variable aleatoria continua asociada a la severidad de los eventos de riesgo. Esto es, la distribución de pérdida agregada por período puede ser formalmente obtenida como la media ponderada de la  $n$ -ésima convolución de la severidad, donde los pesos son las probabilidades de masa de las frecuencias. La  $n$ -ésima convolución de la severidad es la probabilidad de ocurrencia del agregado de  $n$  pérdidas individuales.

Si las pérdidas agregadas para la celda específica, están dadas por:  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^N X_i$ , donde  $N$  es la variable aleatoria de conteo del evento, y  $X_i$  es la variable aleatoria severidad, por ocurrencia del evento, y las  $X_i$  se asumen independientes e idénticamente distribuidas

con función de distribución común dada por  $F_X(x) = P(X \leq x)$ , entonces la  $n$ -ésima convolución de la distribución de severidad, denotada por  $F_X^{*n}(x)$ , está dada por:  $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) = F * F * \dots * F(x) = F_X^{*n}(x)$ , y por lo tanto la función de distribución de las pérdidas agregadas está dada por:  $G_s(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)F_X^{*n}(x)$ .

En general, no existe una forma analítica para expresar la distribución compuesta de pérdidas, y se hace necesario aplicar algoritmos numéricos para calcularla. En el contexto de la modelación del riesgo operacional algunos métodos muy usuales son la simulación Montecarlo, el algoritmo de recursión de Panjer y técnicas de inversión mediante transformadas; también es posible utilizar la aproximación en forma cerrada de Böcker y Klüppelberg, que es aplicable a situaciones específicas, como se demostrará más adelante.

A partir de la función de pérdidas agregadas  $S(x)$  que se haya determinado, la carga de capital por riesgo operacional,  $OpVaR(\alpha)$ , como está definido previamente, se obtiene como:

- a.  $OpVaR(\alpha) = G_s^{-1}(\alpha)$ , para un nivel de confianza  $\alpha$  determinado, que Basilea II ha fijado en 99.9%, donde  $G_s$  es la función de distribución de las pérdidas agregadas.
- b. Cuando la entidad demuestra hacer provisiones para las pérdidas esperadas, la carga de capital se obtiene restando las pérdidas esperadas del percentil  $\alpha$ . Así que:  $OpVaR(\alpha) = G_s^{-1}(\alpha) - E(S)$ .

El  $OpVaR$ , con nivel de confianza  $\alpha$ , significa el nivel de pérdidas por riesgo operacional que sólo es excedido con una probabilidad  $1 - \alpha$ , en el horizonte de tiempo considerado.

## 2.1 Distribuciones de frecuencia y de severidad

Con respecto a la modelación de la frecuencia, se debe seleccionar una variable aleatoria  $N$  que represente el número de eventos de riesgo por período, en la celda  $(i, j)$  considerada (frecuencia de los eventos), y que sigue una distribución de probabilidad  $p(n) = P(N=n)$ ,  $n \in N \setminus \{0\}$ . Marcelo Cruz (2002), Mariano González (2004), Pavel Shevchenko (2006) y Christopher Lee Marshall (2001), muestran que la distribución de Poisson

se ajusta a muchas situaciones reales de riesgo operacional. Sin embargo, recomiendan considerar, además, otras alternativas como la Binomial o la Binomial Negativa. En forma análoga argumentan Johnson et al. (1993) y Klugman et al. (2004).

La siguiente etapa consiste en encontrar la distribución de probabilidad que mejor se ajuste a los datos observados de pérdidas operacionales desglosadas por su tipología para una determinada línea de negocio y evento de pérdida. Christopher Lee Marshall (2001), Marcelo Cruz (2002), Mariano González (2004), Pavel Shevchenko y J. Donnelly (2005) y Carrillo (2006), proponen la distribución Lognormal o la de Weibull como las más recomendables para modelar la severidad. En este punto se tendrá una variable aleatoria  $X$ , el monto de la pérdida en la celda  $(i, j)$  de la matriz de pérdidas (Severidad o impacto económico por evento), con función de densidad  $f_X(x)$ , y función de distribución  $F_X(x)$ , dada por  $F_X(x) = P(X \leq x)$ .

Para intentar capturar potenciales eventos extremos, en algunos casos puede ser más adecuado escoger una distribución de cola pesada para representar esos posibles montos de pérdida.

Para las distribuciones de severidad, entre las distribuciones de cola pesada con soporte  $(0, \infty)$ , (Klugman, Panjer and Willmot (2004)), las familias generalmente utilizadas en modelación de riesgo operacional son: La distribución log-normal, la distribución de valor extremo generalizada, la distribución generalizada de Pareto y la distribución de Weibull.

Es comúnmente aceptado que las distribuciones Lognormal y Weibull se ajustan razonablemente a datos de pérdidas operacionales sobre una gran parte de los datos de riesgo operacional, pero tienen un desempeño relativamente débil en la cola, ya que las pérdidas operacionales tienden a tener colas más pesadas que esas distribuciones, por lo cual se pueden producir subestimaciones de grandes pérdidas. Por el contrario, la distribución de Pareto produce un buen ajuste en la cola, cuando existen suficientes datos para permitir este análisis, pero un ajuste débil en el cuerpo de la distribución. Klugman, Panjer and Willmot (2004), desarrollan un análisis minucioso de aspectos estadísticos, pruebas de hipótesis y estimación de parámetros en el contexto de modelos de pérdidas.

## 2.2 Cuantificación de las pérdidas agregadas

En esta sección se plantean tres alternativas para cuantificar las pérdidas agregadas en una celda específica  $(i, j)$  de la matriz de pérdidas: El método de simulación Montecarlo, el Algoritmo de Recursión de Panjer, y la Aproximación Analítica de Böcker y Klüppelberg.

Se hace la presentación formal de cada uno de los métodos, y se describen los pasos del algoritmo correspondiente. Además, los algoritmos fueron implementados en Matlab, para diversas combinaciones de distribuciones de frecuencia y severidad, y los códigos respectivos se muestran en Franco y Velásquez (2010).

### 2.2.1 Simulación Montecarlo (SMC)

Mediante el enfoque de Simulación Montecarlo se estima la distribución de pérdidas agregada utilizando un número suficiente de escenarios hipotéticos, generados aleatoriamente, a partir de las distribuciones de severidad y frecuencia.

Entre los autores que plantean esta metodología están Chapelle, Crama, Hübner y Peters (2005), que describen el procedimiento de Simulación Montecarlo, modelando la distribución de frecuencias mediante una distribución de Poisson con parámetro igual al número de pérdidas observadas durante el período completo.

El procedimiento tendría los siguientes pasos:

1. Determinar la combinación línea/evento que se quiere simular.
2. Generar una muestra aleatoria de la distribución de frecuencias asumida.
3. Generar una muestra aleatoria de la distribución de severidad.
4. Generar la distribución de pérdidas agregadas.

#### 2.2.1.1 Algoritmo de Simulación Montecarlo (SMC).

1. Generar un valor aleatorio  $n$  de la distribución de frecuencia.
2. Generar  $n$  valores aleatorios de la distribución de severidad. Denotar estas pérdidas simuladas por  $L_1, + L_2 \dots, L_n$ .



3. Sumar las  $n$  pérdidas simuladas y obtener una pérdida para el período:  $S = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ .
4. Retornar al paso 1, y repetir un número muy grande  $M$  de veces. Por lo tanto se obtienen  $S_1, S_2, \dots, S_M$ .
5. Formar el histograma de  $S_1, S_2, \dots, S_M$ , que representará la distribución de pérdidas agregadas simuladas para el período.
6. Calcular el percentil 99.9 de la distribución de pérdidas agregadas simuladas.
7. Calcular la media de la distribución de pérdidas agregadas simuladas para el período. La pérdida esperada (EL) se calcula como la media de esas pérdidas agregadas simuladas.
8. La carga de capital por riesgo operacional, el  $OpVaR(99.9\%)$ , será el percentil 99.9 de las pérdidas agregadas simuladas, o la diferencia entre ese percentil y la media de la distribución de pérdidas agregadas simuladas, cuando se manejan provisiones para las pérdidas esperadas.

### 2.2.2 Algoritmo de recursión de Panjer

Como se ha planteado, en el método de distribución de pérdidas (LDA) se construye la distribución de pérdidas agregadas a partir de dos distribuciones asociadas a cada celda  $(i, j)$  combinación de evento de pérdida/línea de negocio.

Se tiene una variable aleatoria de conteo  $N$  con función de probabilidad  $p(n)=P(N=n)$ , que corresponde a la distribución de frecuencias de pérdidas. Además, una variable aleatoria continua  $X$  que representa el impacto o severidad de la pérdida, cuando ocurre el evento.

El algoritmo de Panjer está basado en el cálculo de la distribución compuesta mediante convoluciones, como se describe más adelante. Se utiliza el hecho de que la distribución de la suma de dos variables aleatorias continuas independientes puede ser calculada como una convolución.

Las pérdidas agregadas estarán dadas por:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N = y \quad X_i=0, \text{ cuando } N=0. \quad (2.3)$$

Usualmente se hacen dos supuestos fundamentales:

- (a)  $X_1, X_2, \dots$  son variables aleatorias idénticamente distribuidas.
- (b) Las variables aleatorias  $N, X_1, X_2, \dots$  son independientes.

La expresión (2.3) será una suma aleatoria, y se asume que sus distribuciones componentes satisfacen los supuestos.

Esas dos distribuciones (frecuencia y severidad), representan el núcleo del modelo LDA, y se utilizan para calcular la pérdida operacional agregada para la celda, en un horizonte temporal específico, generalmente un año.

La distribución de probabilidad de las pérdidas agregadas, está dada por  $G_s(x) = P(S \leq x)$ , y se puede expresar como:

$$\begin{aligned} G_s(x) = P(S \leq x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x / N = n) P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) P(N=n) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además,

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) = F * F * \dots * F(x) = F_X^{*n}(x) \quad (2.5)$$

donde  $F_X^{*n}(x)$  es la enésima convolución de  $F$ , que es la función de distribución de  $X$ , y se tiene que:

$$\begin{aligned} F_X^{*0}(x) &= \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\ F_X^{*1}(x) &= F_X(x) \text{ y } F_X^{*n}(x) = F_X^{*(n-1)}(x) = F_X(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por lo tanto la expresión (2.4) se transforma en:

$$G_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) F_X^{*n}(x) \quad (2.7)$$

Donde  $F_X(x) = P(X \leq x)$  es la función de distribución común de las  $X$ .

La distribución de  $S$  es llamada la distribución compuesta.

Si  $X$  es una variable aleatoria continua con probabilidad cero para valores no positivos, la convolución se define recursivamente en la siguiente forma:

$$F_X^{*k}(x) = \int_0^x F_X^{*(k-1)}(x-y) f_X(y) dy, \text{ para } k = 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

Para  $k=1$  la ecuación se reduce a  $F_X^{*1}(x) = F_X(x)$ .

Diferenciando en (2.8) se obtiene la función de densidad:

$$f_X^{*k}(x) = \int_0^x f_X^{*(k-1)}(x-y) f_X(y) dy, \text{ para } k = 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Por lo tanto, si  $X$  es continua, entonces  $S$  tiene una función de densidad de probabilidad, que para  $x > 0$ , está dada por:

$$g_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) f_X^{*n}(x) \quad (2.10)$$

Si  $X$  tiene una distribución discreta, con probabilidades en  $0, 1, 2, \dots$  se tendrá:

$F_X^{*k}(x) = \sum_{y=0}^{\infty} F_X^{*(k-1)}(x-y) f_Y(y)$  y para  $x=0, 1, \dots$  y para  $k=2, 3, \dots$  y la correspondiente función de probabilidad es:

$$f_X^{*k}(x) = \sum_{y=0}^{\infty} f_X^{*(k-1)}(x-y) f_Y(y) \text{ para } x=0, 1, \dots, k=2, 3, \dots$$

Si la distribución de severidad es discreta con función de probabilidad  $p(x) = P(X=x)$ , entonces la distribución de pérdidas agregadas también es discreta, y por analogía con lo anterior, la función de probabilidad de  $S$  se puede obtener directamente como:

$$g_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x) P(N = n) \quad (2.11)$$

donde

$$p^{*n}(x) = p * p * \dots * p(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x) \text{ y } p^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

En estas condiciones se tiene que  $G_s(x)$  de la ecuación (2.4) se puede expresar como:

$$G_s(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} p(n) F_X^{*n}(x), & x > 0 \\ p_0, & x = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Donde,  $F_X(x)$  es la probabilidad de que la cantidad agregada de  $n$  pérdidas sea  $x$ ; es decir, la función de distribución de las  $X$ . La correspondiente función de densidad está dada por:

$$g_s(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} p(n) f_X^{*n}(x), & x > 0 \\ p_0, & x = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Una de las alternativas para calcular  $G_S(x)$  de la ecuación (2.12) o  $g_s(x)$  de la ecuación (2.13) es el algoritmo de recursión de Panjer que se demuestra a continuación.

### 2.2.2.1 Algoritmo de Panjer

#### 2.2.2.1.1 Lema

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y que toman valores en los enteros positivos. Entonces, para valores enteros positivos de  $x$ , y para la convolución  $f^{*n}(x) = P(X_1, X_2, \dots, X_n = x)$ , se tiene:

$$(a) \quad f^{*n}(x) = \sum_{i=1}^x f(i) f^{*(n-1)}(x - i).$$

$$(b) \quad f^{*n}(x) = \frac{n}{x} \sum_{i=1}^x i f(i) f^{*(n-1)}(x - i).$$

### **Demostración**

Para  $n=1$  es claro que los dos resultados se reducen a:

$$f^{*1}(x) = f(x) f^{*0}(x).$$

Para  $n>1$ , el resultado (a) usando la ley de probabilidad total para evaluar:  $P(X_1, X_2, \dots, X_n = x)$  condicionada al valor que tome  $X_1$ , se tiene:

$$P(X_1, X_2 + \dots + X_n = x) = \sum_{i=1}^x P(X_1=i) P(X_2 + \dots + X_n = x - i).$$

Pero  $P(X_2 + \dots + X_n = x - i)$  y  $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x)$  corresponden, respectivamente, a las convoluciones  $(n-1)$  y  $(n)$ , de  $f(i)$ .

$$\text{Entonces } f^{*n}(x) = \sum_{i=1}^x f(i) f^{*(n-1)}(x - i).$$

Para  $n>1$ , se obtiene el resultado (b) considerando la esperanza condicional  $E(X_k | X_1 + X_2 + \dots + X_n = x)$  para  $k=1, 2, 3, \dots, n$ . Por simetría

esas cantidades son las mismas para todos esos valores de  $k$ . Como su suma es  $x$ , cada uno es igual a  $\frac{x}{n}$ .

Entonces la esperanza condicional es evaluada como:

$$E(X_1 | X_1 + X_2 + \dots + X_n = x) = \sum_{i=1}^x iP(X_1=i) P(X_2 + \dots + X_n = x - i) / P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x).$$

Pero  $P(X_2 + \dots + X_n = x - i)$  y  $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x)$  corresponden, respectivamente, a las convoluciones  $(n - i)$  y  $(n)$ , de  $f(i)$ . Es decir,  $f^{*(n-1)}(x)$  y  $f^{*n}(x)$ . Despejando  $f^{*n}(x)$  se tiene el resultado:  $f^{*n}(x) = \frac{n}{x} \sum_{i=1}^x if(i) f^{*(n-1)}(x-i)$ .

### 2.2.2.1.2 Teorema de Panjer

Para distribuciones compuestas donde la distribución de probabilidad para  $N$ , el número de eventos, satisface la condición:  $\frac{p(N=n)}{p(N=n-1)} = a + \frac{b}{n}$ , para  $n=1,2,\dots$ , y donde la distribución de severidad  $f(i)$  está restringida a los enteros positivos, la función de probabilidad de las pérdidas agregadas cumple la siguiente fórmula recursiva:

$$g_s(x) = \sum_{i=1}^x \left[ a + \frac{bi}{x} \right] f(i)g_s(x-1), \text{ para } x=1,2,3,\dots, \text{ con valor inicial dado por } g_s(0) = P(N=0).$$

### **Demostración**

Para la distribución compuesta se tiene:  $g_s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(N=n) f^{*n}(x)$ .

Si la distribución de frecuencias cumple la condición

$$P(N=n) = \left[ a + \frac{b}{n} \right] P(N=n-1),$$

entonces:  $g_s(x) = a \sum_{i=1}^{\infty} P(N=n-1) f^{*n}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b}{n} P(N=n-1) f^{*n}(x)$ , y por el lema

2.2.2.1.1, se cumple que:  $g_s(x) = a \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n-1) \sum_{i=1}^x f(i) f^{*(n-1)}(x-i) +$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n} P(N=n-1) \frac{n}{x} \sum_{i=1}^x if(i) f^{*(n-1)}(x-i).$$

Intercambiando el orden de las sumatorias, se tiene:

$$\begin{aligned}
 g_s(x) &= a \sum_{i=1}^x f(i) P(N=n-1) f^{*(n-1)}(x-i) + \\
 &\frac{b}{x} \sum_{i=1}^x i f(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n} P(N=n-1) f^{*(n-1)}(x-i) = \\
 &a \sum_{i=1}^x f(i) g_s(x-i) + \frac{b}{x} \sum_{i=1}^x i f(i) g_s(x-i) = \\
 &\sum_{i=1}^x \left[ a + \frac{bi}{x} \right] f(i) g_s(x-i).
 \end{aligned}$$

### 2.2.2.2 Comentarios sobre el Algoritmo de Panjer

El algoritmo parte de una familia particular de distribuciones de frecuencias para el número de eventos, pertenecientes a la llamada Clase de Panjer  $(a,b;0)$ , lo que significa que cumplen la siguiente fórmula de recurrencia:

$$p_n = \left( a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Donde  $a$ ,  $b$  son constantes reales que determinan la distribución de probabilidad de la frecuencia y  $p_n$  es la probabilidad de que ocurran  $n$  eventos.

Sundt y Jewell (1981) demostraron que las distribuciones de la clase de Panjer  $(a,b;0)$  son las distribuciones Poisson ( $a=0$ ), Binomial ( $a<0$ ), y la binomial negativa ( $a>0$ ), Como caso particular de la distribución binomial negativa también verificará la fórmula de recurrencia la distribución geométrica.

En efecto, considerando la fórmula recursiva  $\frac{p(N=n)}{p(N=n-1)} = a + \frac{b}{n}$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , se obtiene:

a. Distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$ :

La función de probabilidad es  $P(N=n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$ . Así que:  $\frac{p(N=n)}{p(N=n-1)}$ .

Entonces,  $\alpha=0$  y  $b=\lambda$  y la recursión es:  $g_s(x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{i=1}^x i f(i) g_s(x-i)$ .  
con  $g_s(0) = e^{-\lambda}$ .

b. Distribución binomial negativa:

Parámetros  $r$  y  $p$ :

La función de probabilidad es:  $P(N = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$ .

Entonces,

$$\frac{p(N = n)}{p(N = n - 1)} = (1 - p) \left[ n + r - \frac{1}{n} \right] = (1-p) + \frac{(1-p)(r-1)}{n}.$$

Así que,  $\alpha = (1-p)$  y  $b = (1-p)(r-1)$ , y la recursión es:

$$g_s(x) = (1-p) \sum_{i=1}^x (r-1) f(i) g_s(x-i), \text{ con } g_s(0) = p^r.$$

c. Distribución binomial con parámetros  $m$  y  $p$ :

La función de probabilidad es:

$$P(N=n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$$

Así que:

$$\frac{P(N = n)}{P(N = n - 1)} = \frac{(m+1-n)}{n} \frac{p}{1-p} = \frac{-p}{1-p} + \frac{(m+1)p}{n(1-p)}$$

Entonces  $a = \frac{-p}{1-p}$  y  $b = \frac{(m+1)p}{(1-p)}$ , y la recursión es:

$$g_s(x) = \left( \frac{p}{1-p} \right) \sum_{i=1}^x \left[ (m+1) \frac{i}{x} - 1 \right] f(i) g_s(x-i), \text{ con } g_s(0) = p^r, \text{ con}$$

$$g_s(0) = (1-p)^m.$$

Los valores de las constantes  $a$ ,  $b$ , y los valores de inicio correspondientes para cada una de esas distribuciones se resumen en la Tabla 2.2.

**Tabla 2.2. Constantes y Valor Inicial**

Distribución	Constante A	Constante b	Valor inicial $p_0 = P(N=0)$
Poisson ( $\lambda$ )	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
Binomial negativa ( $r, p$ )	$1-p$	$(r-1)(1-p)$	$p^r$
Binomial ( $m, p$ )	$-\left(\frac{p}{1-p}\right)$	$(m+1)\left(\frac{p}{1-p}\right)$	$(1-p)^m$

El Algoritmo de Panjer (1981) también establece que si la función de probabilidad de la frecuencia puede ser escrita como:  $p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}$ ,  $n=1,2,3,\dots$ , donde  $p_n$  representa la probabilidad de que el número de eventos sea  $n$ , y **a** y **b** son constantes reales, y la distribución de severidad es continua, entonces para  $g_s$ , la función de densidad de las pérdidas agregadas  $S$ , se cumple que:

$$g_s(x) = p_1 f(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f(y) g(x-y) dy, x > 0 \quad (2.15)$$

Si la distribución de severidad es discreta y definida en los enteros no negativos, la correspondiente fórmula de recurrencia es:

$$g_i = \sum_{j=1}^i \left(a + \frac{bj}{i}\right) f_j g_{i-j}, i=1,2,3,\dots, \text{ con } g_0 = p_0 \quad (2.16)$$

Para el caso especial de la distribución de Poisson, se tiene el siguiente resultado:

$$g_s(x) = \lambda e^{-\lambda} f(x) + \frac{\lambda}{x} \int_0^x (y) g(x-y) dy, x > 0 \quad (2.17)$$

Si además la distribución de severidad es discreta, la fórmula de recurrencia toma la siguiente forma:

$$g_s(x) = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^x i f(i) g_s(x-i). \quad (2.18)$$



En este caso, el algoritmo es aplicable para distribuciones de severidad discretas. Ello implica que la severidad, al ser una variable continua, debe ser discretizada antes de aplicar dicho procedimiento, para lo cual se puede utilizar, por ejemplo, el método de redondeo.

Sin embargo, el principal inconveniente, en la práctica, radica en la complejidad al realizar las convoluciones.

En forma análoga se definen las distribuciones de la clase de la clase de Panjer  $(a,b;1)$  como la familia de distribuciones que satisfacen la recursión:

$$p_n = \left( a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1}. \quad n = 2,3,\dots \quad (2.19)$$

Donde la única diferencia con la clase de Panjer  $(a,b;0)$  es el valor el valor de inicio de la recursión.

En general, se definen las distribuciones pertenecientes a la clase de Panjer  $(a,b,k)$ , con  $k \in N_0$ , como aquellas que satisfacen esa recursión para  $n \geq k+1$ , y  $p_0=p_1=\dots=p_{k-1}=0$ . Todas ellas fueron identificadas por Sundt and Jewell (1981) para el caso  $k=0$  Willmot (1986) para el caso  $k=1$ , y finalmente, por Hess et al. (2002), en general para  $k \in N_0$ .

Si la distribución de frecuencias pertenece a la clase de Panjer  $(a,b;k)$ , y la distribución de severidades es discreta, entonces el procedimiento clásico para calcular la distribución de pérdidas agregadas  $S$  es aplicar la recursión de Panjer.

Panjer y Wang (1993), mostraron que para distribuciones de severidad no degeneradas, la estabilidad numérica de la recursión de Panjer para una distribución de frecuencias de eventos de pérdidas operacionales perteneciente a la clase de Panjer  $(a,b,k)$  depende únicamente de los valores de  $a$  y  $b$ . Así que, como las distribuciones de Poisson, binomial y la binomial negativa, pertenecen a esta clase, el cálculo de las pérdidas agregadas, mediante el procedimiento descrito, es numéricamente estable.

### 2.2.2.3 Implementación de Algoritmos de Panjer

Se implementaron algoritmos de Panjer en Matlab, para estimar las pérdidas agregadas por riesgo operacional, considerando seis combinaciones posibles de distribuciones de frecuencia y severidad: Poisson-lognormal, Binomial-lognormal, Binomial negativa-lognormal, Poisson-Weibull, Binomial-Weibull, Binomial Negativa-Weibull. Los códigos correspondientes se presentan en el Apéndice.

### 2.2.3 Aproximación en forma cerrada de Böcker y Klüppelberg

Klaus Böcker y Claudia Klüppelberg (2005) investigaron un modelo de distribución de pérdidas simple para el riesgo operacional, mostrando que se puede tener una aproximación para el  $OpVaR(\alpha)$ , en forma cerrada, cuando los datos de pérdida son de cola pesada, como ocurre en muchas situaciones reales. Ellos aplican esta distribución en particular al modelo de severidad de Pareto.

La aproximación analítica planteada por Böcker and Klüppelberg, como se demuestra más adelante, es una fórmula directa, aplicable en casos específicos, para el cuantil de la distribución de pérdidas agregadas en la siguiente forma:  $G_S^{-1}(\alpha) = F^{-1}\left(1 - \frac{1-\alpha}{E(N)}\right)$ , que relaciona directamente el percentil  $\alpha \rightarrow 1$ , de las pérdidas agregadas, con un alto percentil dado por:  $p = 1 - \frac{(1-\alpha)}{E(N)}$ , de la función de distribución simple de las severidades  $F$ , dependiendo del número esperado de eventos por período  $E(N)$ .

Ese resultado, cuya formulación matemática se presenta más adelante, está basado en una propiedad analítica de las distribuciones pertenecientes a la clase de distribuciones subexponenciales, que permite expresar en el límite de alta severidad la convolución como una función de la distribución de la severidad de la pérdida individual.

La aproximación analítica de Böcker y Klüppelberg, para el cálculo de la carga de capital, también está soportada en la teoría de valores extremos. De acuerdo con uno de los requerimiento de Basilea de incorporar las propiedades de colas pesadas de las distribuciones de severidad, estos autores consideran la familia de las distribuciones subexponenciales, que

incluye no solo las lognormales, sino también las distribuciones con colas más pesadas, en particular las de Pareto.

El Acuerdo de Basilea, en el contexto de los modelos AMA, permite a las entidades financieras la flexibilidad para que cada una implemente su modelo interno y sistema de cuantificación del riesgo operacional. En lugar de prescribir un modelo específico, se plantean unos estándares cualitativos y cuantitativos que los modelos internos deben satisfacer. Como se mencionó anteriormente, entre los estándares cuantitativos más relevantes, y que son la base de la aproximación analítica, se tiene que la medida de riesgo operacional es un  $VaR$  con un nivel de confianza del 99.9% y para un horizonte temporal de un año, y además, el método de medición debe capturar eventos de pérdidas potencialmente severas en la cola de la distribución de pérdidas.

Se presentan a continuación los elementos teóricos básicos, y el soporte matemático de la aproximación analítica de Böcker y Klüppelberg.

### 2.2.3.1 Distribuciones de severidad subexponenciales

Para tener en cuenta la propiedad de cola pesada de las distribuciones de severidad, como es el requerimiento de Basilea II, se consideran las distribuciones más conocidas con esa propiedad, que son Lognormal, Weibull y Pareto, que pertenecen a la llamada clase de distribuciones subexponenciales con soporte  $(0, \infty)$ , y se describen en la Tabla 2.3.

**Tabla 2.3. Algunas Distribuciones Subexponenciales**

Nombre	Función de distribución	Parámetros
Lognormal	$F(x) = \theta \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)$	$\mu \in \mathbb{R}, \alpha > 0$
Weibull	$F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^\tau}$	$\theta > 0, 0 < \tau < 1$
Pareto	$F(x) = 1 - \left( 1 + \frac{x}{\theta} \right)^{-\alpha}$	$\alpha, \theta > 0$

Para las distribuciones subexponenciales se cumple que sus colas decaen más suavemente que cualquier cola exponencial. Es decir, la cola de la suma de  $n$  variables aleatorias subexponenciales tiene el mismo orden de magnitud que la cola de la variable máxima entre ellas. Más precisamente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x_1 + x_2 + \dots + x_n > x)}{p(\max x_1, x_2, \dots, x_n > x)} = 1, \text{ para algún } n \geq 2. \quad (2.20)$$

Esto significa que la suma de  $n$  severidades independientes e idénticamente distribuidas es más probable que sea grande debido a que uno de sus términos es grande; o en relación al riesgo operacional, pérdidas totales severas son principalmente causadas por una única pérdida grande, más que la consecuencia de pequeñas pérdidas independientes acumuladas.

El modelo LDA estándar tiene las siguientes características:

- Las severidades  $\{X_i\}_{i \in N}$  son variables aleatorias positivas, independientes e idénticamente distribuidas.
- El número de eventos de pérdida en un intervalo  $[0, t]$ , para  $t > 0$ , es aleatorio, y el correspondiente proceso de frecuencias es  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ .
- El proceso de severidad y el proceso de frecuencia se suponen independientes.
- La pérdida agregada  $S(t)$   $t$  está dada por  $S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$ ,  $t \geq 0$ .

Además, si  $G_t$  es la distribución de pérdida agregada, entonces el Valor en Riesgo Operacional en el horizonte de tiempo  $t$ , a un nivel de confianza  $\alpha$  está dado por:

$OpVaR_t(\alpha) = G_t^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in R: G_t(x) > \alpha\}$ , con  $0 \leq \alpha \leq 1$ . En particular si  $G_t$  es estrictamente creciente y continua se tiene que  $OpVaR_t(\alpha) = G_t^{-1}(\alpha)$ .

### 2.2.3.2 Lema de Kesten

Si  $F$  es una distribución subexponencial, entonces dado  $\varepsilon > 0$ , existe una constante finita  $K$  tal que, para todo  $n \geq 2$ ,  $\frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} \leq K(1 + \varepsilon)^n$ ,  $x \geq 0$ .

### Demostración

Sea  $\alpha_n = \sup_{x \geq 0} \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)}$ .

Además,  $\frac{\bar{F}^{n+1*}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \frac{F(x) - F^{(n+1)*}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{F^{n*}(x-t)}{\bar{F}(x)} dF(t)$ .

Entonces para cada  $T < \infty$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq T} \int_0^x \frac{F^{n*}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + \sup_{x \geq T} \int_0^x \frac{F^{n*}(x-y)\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x-y)\bar{F}(x)} dF(y) \\ &\leq 1 + A_T + \alpha_n \sup_{x \geq T} \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\bar{F}(x)}, \text{ donde } A_T = (\bar{F}(T))^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

Como  $F$  es subexponencial, dado cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede escoger  $T$  tal que:

$\alpha_{n+1} \leq 1 + A_T + \alpha_n(1+\varepsilon)$ . De lo cual se tiene que:  $\alpha_n \leq (1 + A_T)\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon)^n$ , por lo tanto:

con  $K=(1+A_T)\varepsilon^{-1}$ , se tiene el resultado:  $\frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} \leq K(1+\varepsilon)^n, x \geq 0$ .

### 2.2.3.3 Teorema EKM. (Embrechts, Klüppelberg and Mikosch)

Sea el LDA estándar  $S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i, t \geq 0$ . Suponga que las severidades  $X_i$  son subexponenciales con función de distribución  $F$ . Fije  $t > 0$  y defina la distribución de frecuencias por  $P(N(t)=n) = p_t(n)$ , para  $n \in N_0 = N \cup \{0\}$ , y la distribución de pérdida agregada dada por:  $G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n)F^{n*}(x)$ ,  $x \geq 0, t \geq 0$ , donde  $F(\cdot) = P(X_k \leq \cdot)$  es la función de distribución de  $X_k$  y  $F^{n*}(\cdot) = P(\sum_{i=1}^n X_i \leq \cdot)$  es la  $n$ -ésima convolución de  $F$  con  $F^{1*} = F$  y  $F^{0*} = I_{[0, \infty)}$ .

Si para algún  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^n p_t(n) < \infty$ , entonces se cumple que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{EN(t)F(x)}{\bar{G}_t(x)} = 1$ . O equivalentemente:

$$\bar{G}_t(x) \sim EN(t)\bar{F}(x), x \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

donde  $EN(t)$  es el valor esperado de la frecuencia de pérdidas.

$\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  es la distribución de severidad de la cola, y  $\bar{G}_t(x) = 1 - G_t(x)$  es la distribución de la pérdida agregada de la cola.

### **Demostación**

$$\frac{G_t(x)}{\bar{F}(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) \frac{F^{n*}(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^n p_t(n) < \infty$ .

$(1 + \varepsilon) > 1 \Rightarrow (1 + \varepsilon)^{-1} < 1$ , entonces existe  $p > 0$  tal que:  $(1 + \varepsilon)^{-1}(1 + p) < 1$ .  
Así que  $\frac{1 + p}{1 + s} < 1$ .

Por el Lema de Kesten se tiene:

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} \leq (1 + \varepsilon)^{-1} K(1 + \varepsilon)^n = K \left( \frac{1 + p}{1 + s} \right)^n, x \geq 0.$$

Además, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 + p}{1 + s} \right)^n$  es convergente, por ser geométrica con razón  $\frac{1 + p}{1 + s} < 1$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}_t(x)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( p_t(n) \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{F^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} \right). \end{aligned}$$

Pero como  $F$  es subexponencial,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} = n$ . Reemplazando esta expresión en la anterior se tiene:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}_t(x)}{\bar{F}(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n)n = EN(t)$ .

Esta última igualdad por definición de valor esperado de  $N(t)$ .

$$\text{Entonces } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{EN(t)\bar{F}(x)}{\bar{G}_t(x)} = 1.$$

O en forma equivalente:  $\bar{G}_t(x) \sim EN(t)\bar{F}(x), x \rightarrow \infty$ .

#### 2.2.3.4 Teorema de la Fórmula analítica para OpVaR

Considere el modelo LDA estándar para un  $t > 0$  fijo y una severidad subexponencial con función de distribución  $F$ . Suponga, además, que el estimativo de cola (2.21) se cumple. Entonces:

$$\text{OpVaR}_t(\alpha) = F_t^{\leftarrow} \left( 1 - \frac{1-\alpha}{EN(t)} (1 + o(1)) \right), \text{ cuando } \alpha \rightarrow 1. \quad (2.22)$$

### **Demostración**

Si  $\alpha \rightarrow 1$ , entonces  $x \rightarrow \infty$ .

Además,  $o(1)$  corresponde a una función que tiende a 0 si su argumento tiende a un límite, en nuestro caso si  $\alpha \rightarrow 1$  o  $x \rightarrow \infty$ .

Del teorema 1, se tiene que  $\bar{G}_t(x) \sim EN(t)\bar{F}(x)$ .

Además,  $\bar{G}_t(x) \sim EN(t)\bar{F}(x) \Rightarrow 1 - G_t(x) = EN(t)\bar{F}(x)(1 + o(1)), x \rightarrow \infty$ .

O en forma equivalente:  $G_t(x) = 1 - EN(t)\bar{F}(x)(1 + o(1)), x \rightarrow \infty$ .

Tomando el lado derecho igual a  $\alpha$  se tiene:

$$\begin{aligned} 1 - EN(t)\bar{F}(x)(1 + o(1)) = \alpha &\Rightarrow EN(t)\bar{F}(x)(1 + o(1)) = 1 - \alpha \\ \Rightarrow EN(t)\bar{F}(x) = \frac{1 - \alpha}{(1 + o(1))} &\Rightarrow \bar{F}(x) = \frac{1 - \alpha}{EN(t)(1 + o(1))} \Rightarrow 1 - F(x) = \frac{1 - \alpha}{EN(t)(1 + o(1))} \end{aligned}$$

Despejando  $F(x)$  y tomando límite cuando  $x \rightarrow \infty$  (o  $\alpha \rightarrow 1$ ), se tiene la solución asintótica  $F(x) = 1 - \frac{1-\alpha}{EN(t)} (1 + o(1)), x \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto:

$$x = G_t^{\leftarrow}(\alpha) = F_t^{\leftarrow} \left( 1 - \frac{1-\alpha}{EN(t)} (1 + o(1)), \alpha \rightarrow 1 \right).$$

Algunas conclusiones fundamentales de esta aproximación son las siguientes:

- a. Para altos niveles de confianza el *OpVaR* únicamente depende de la cola, y no del cuerpo de la distribución de severidad. Por lo tanto, si el objetivo es calcular el *VaR* operacional, no es necesario modelar toda la función de distribución  $F$ .
- b. La distribución de frecuencias solo interviene en la expresión (2.22) con su valor esperado. Por lo cual, para aplicar este modelo sería suficiente estimar la media muestral de las frecuencias. Esto implica que la sobre-dispersión de un modelo como la distribución binomial negativa, asintóticamente no tendría impacto sobre el *OpVaR*.

- c. Como la carga de capital está basada en un cuantil muy alto de la distribución de pérdidas agregadas  $G_t$ , es natural estimar el  $OpVaR$  mediante el comportamiento asintótico de la cola y estimación cuantil. En lugar de considerar la distribución completa, es suficiente concentrarnos sobre la cola derecha  $P(S(t)) > x$  para un valor grande de  $x$ .
- d. El resultado en (2.22) se cumple para una clase muy general de modelos LDA, y muestra que para obtener una aproximación de primer orden para el  $OpVaR$ , mediante un modelo LDA específico, es suficiente combinar (2.22) con la cola de la distribución de severidad subexponencial  $F$ .

Aplicando la ecuación (2.22) a las funciones de distribución de la tabla 2.3, se obtienen inmediatamente las soluciones en forma cerrada para un  $OpVaR_t(\alpha)$  asintótico ( $\alpha \rightarrow 1$ ), para las correspondientes distribuciones de severidad, como se indica en la Tabla 2.4.

**Tabla 2.4. Aproximaciones asintóticas para el para las distribuciones de severidad más usuales**

Distribución	$OpVaR_t(\alpha)$
Lognormal	$\exp \left[ \mu - \sigma \phi^{-1} \left( \frac{1 - \alpha}{EN(T)} \right) \right]$
Weibull	$\theta \left[ \ln \left( \frac{EN(t)}{1 - \alpha} \right) \right]^{1/\tau}$
Pareto	$\theta \left[ \left( \frac{EN(t)}{1 - \alpha} \right)^{1/\alpha} - 1 \right]$

A partir de múltiples experimentaciones simuladas, Carrillo y Suárez (2006), concluyen que la fórmula de Böcker y Klüppelberg tiene un mejor desempeño cuando el número de eventos es pequeño, y el cuantil requerido de la distribución de pérdidas agregadas está adecuadamente explicado por la suma de un pequeño número de pérdidas, entre las



cuales se pueden tener pérdidas muy altas; es decir, cuando se cumple la subexponencialidad. Por el contrario, cuando las pérdidas agregadas son grandes como resultado de sumar muchas pérdidas pequeñas, esta aproximación no será adecuada. Como en situaciones reales se presentan mixturas de ambas situaciones, el problema de encontrar una distribución de severidad que describa fielmente los datos empíricos de pérdidas es determinante, aunque complejo; sin embargo, la tarea de parametrizar distribuciones apropiadas para la frecuencia y la severidad, es decisiva para cualquier modelo de medición avanzada.

### **3. Aplicación**

#### **3.1 Análisis de los datos**

Las bases de datos relativas a riesgo operacional son escasas, y las entidades son muy reservadas para permitir acceso a ellas. Por esa razón, para elaborar una muestra de datos de pérdidas se recurrió a un grupo de expertos de una entidad financiera local, que proporcionaron estimativos de dos variables de interés: frecuencia y severidad. Los datos corresponden a un evento particular de riesgo que denominamos Fraude Total, en una línea específica de negocios, que denominamos Banca Comercial. Aunque, el horizonte de tiempo para el VaR operacional recomendado por Basilea II es de un año, dada la poca disponibilidad de bases de datos, es necesario aclarar que los datos suministrados son mensuales, y así son incorporados e interpretados en las aplicaciones y en el contexto de los modelos, sin hacer ningún escalamiento.

Para la variable frecuencia se obtuvieron datos desde enero del 2003 hasta diciembre del 2007. Las frecuencias corresponden al número de veces que ocurrió el evento durante el mes. La severidad es pérdida por ocurrencia del evento (expresada en miles de pesos, y con un umbral mínimo de recolección de cero).

En la Tabla 3.1, se tiene un resumen de las estadísticas relevantes de la base de datos:

**Tabla 3.1. Estadísticas relevantes de los datos**

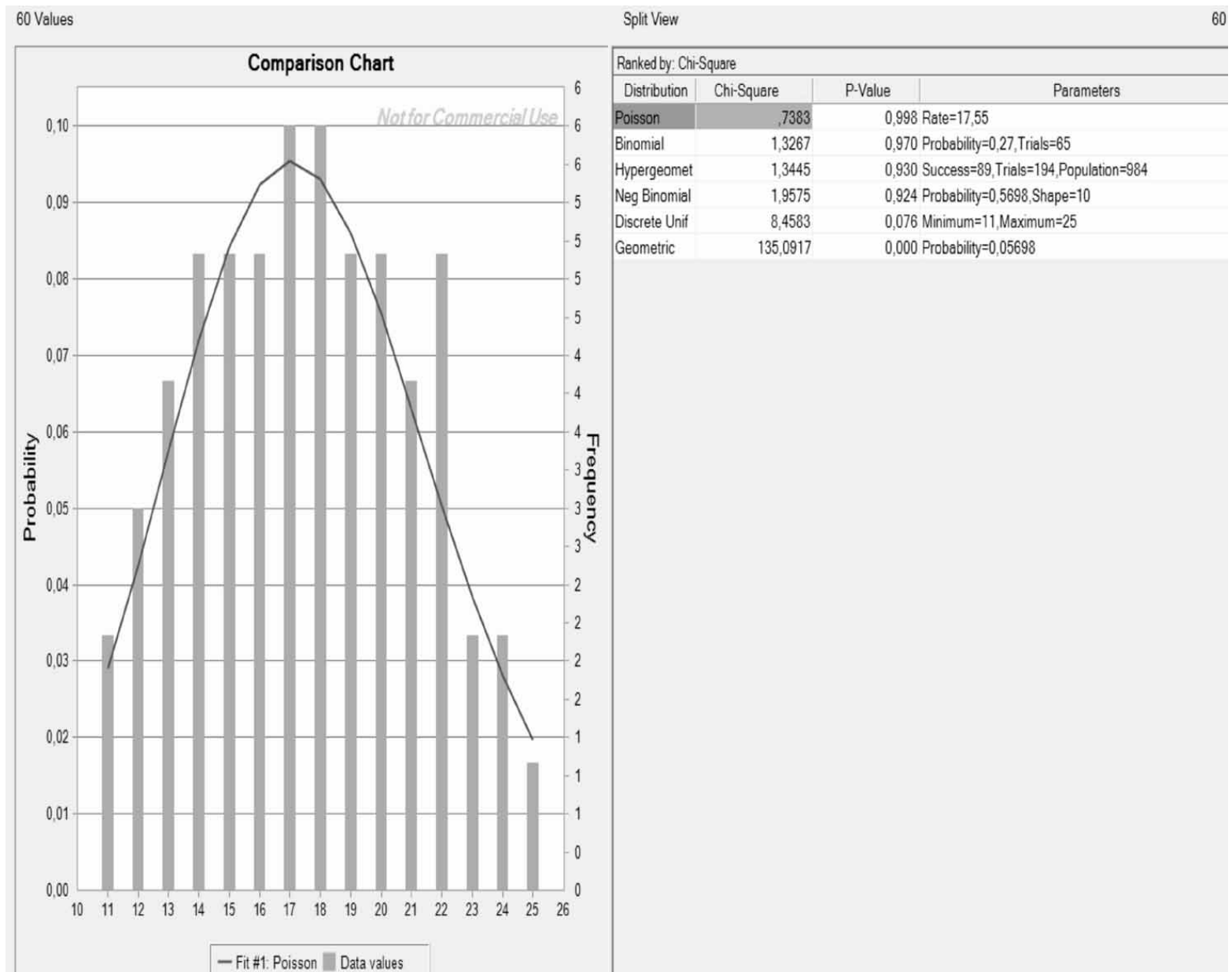
	<b>Frecuencia (Número de ocurrencias/mes)</b>	<b>Severidad (Pérdida/ocurrencia (miles de \$))</b>
Media	18,93333333	2844,86667
Mediana	19	1675
Moda	18	1900
Desviación estándar	4,55044359	7169,59295
Varianza de la muestra	12,6056497	51403063.1
Curtosis	-0,1149924	2,36519017
Coefficiente de asimetría	0,15308704	1,6728824
Rango	15	13784
Mínimo	12	186
Máximo	27	13970
Suma	1136	170692
Cuenta	60	60

Para la aplicación de los modelos y algoritmos se deben utilizar los parámetros de las distribuciones que mejor se ajusten a los datos reales. Por lo tanto, se procedió a hacer los respectivos ajustes utilizando el software Crystal Ball.

Para los datos de frecuencia se utilizó el software mediante el proceso de autoselección de distribuciones discretas, que fueron ranqueadas según la prueba Chi-Cuadrado, como se indica en la tabla 3.2.

Indicando que la distribución de Poisson con  $\lambda = 17.55$  es la que mejor se ajusta a los datos de frecuencias. La segunda opción es una binomial con  $n=65$  y  $p=0.27$ .

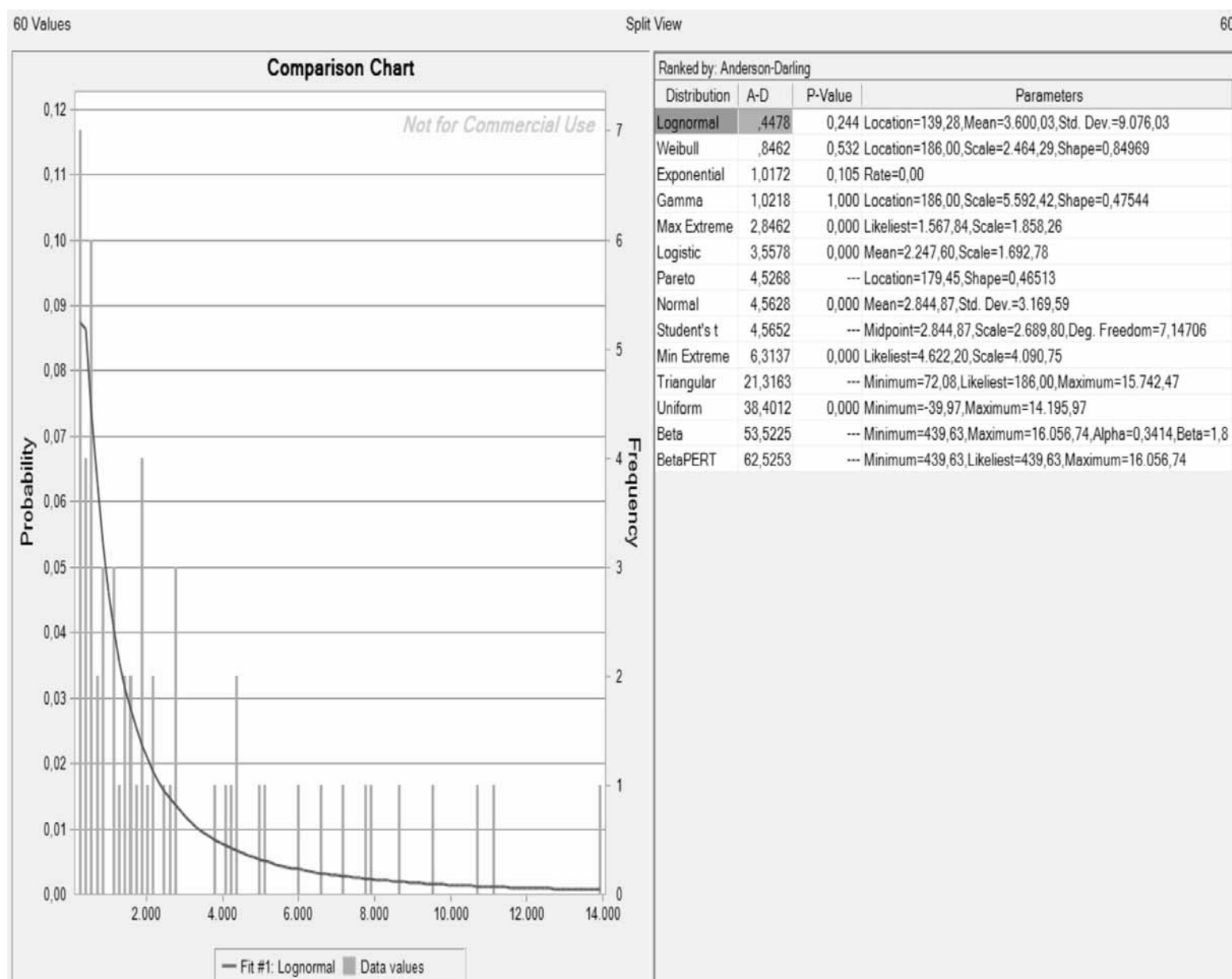
**Tabla 3.2. Ajuste de la Distribución de Frecuencias**



Indicando como mejor ajuste una distribución lognormal con media 3600 y desviación estándar 9076. Estos valores corresponden unos parámetros dados por  $\mu = 7.19$  y  $\sigma = 1.42$ .

Aunque se han implementado los algoritmos para modelar las pérdidas con diversas combinaciones posibles de frecuencia y severidad, para aplicar los algoritmos en este caso, se asume que la distribución de frecuencias es Poisson con  $\lambda = 17.55$ , y que la distribución de severidad es lognormal con  $\mu = 1.42$  y  $\sigma = 1.42$ .

**Tabla 3.3. Ajuste de la Distribución de Severidad**



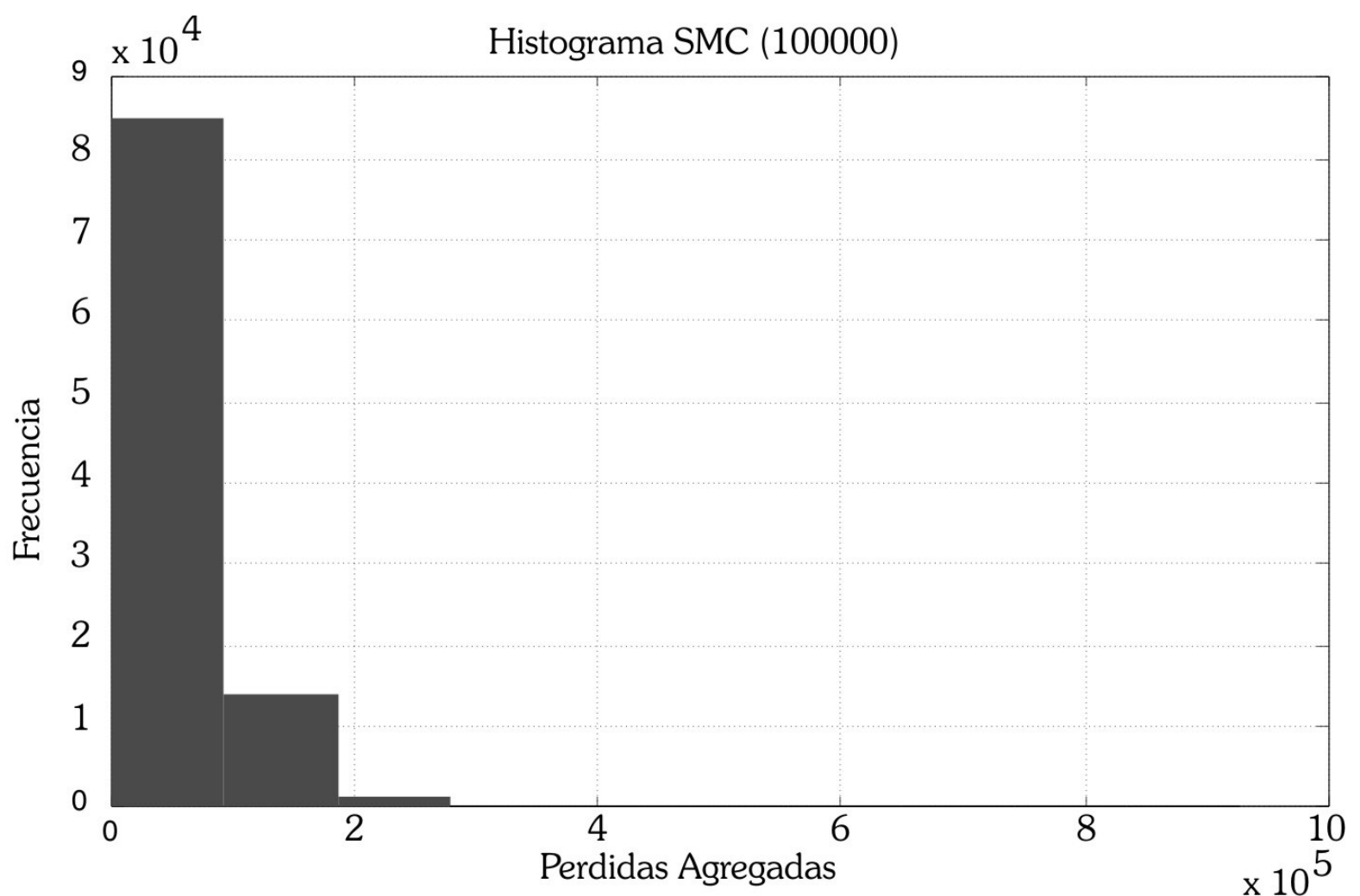
### 3.2 Aplicación de Simulación Montecarlo

Aplicando el algoritmo con diferentes números de iteraciones (5000, 10000, 100000) y para efectos de comparación, con diferentes niveles de confianza (95%, 99% y 99.9%), se obtuvieron los siguientes resultados:

Número iteraciones	5000	10000	100000
MONTECARLO			
95%	137973.9	135520.6	134125.3
99%	218983.6	214036.9	206496.8
99.9%(OPVaR)	360935.4	375486.7	387681.4

Para el caso de 100000 iteraciones el histograma generado es el siguiente:

- **SMC con 100000 iteraciones**



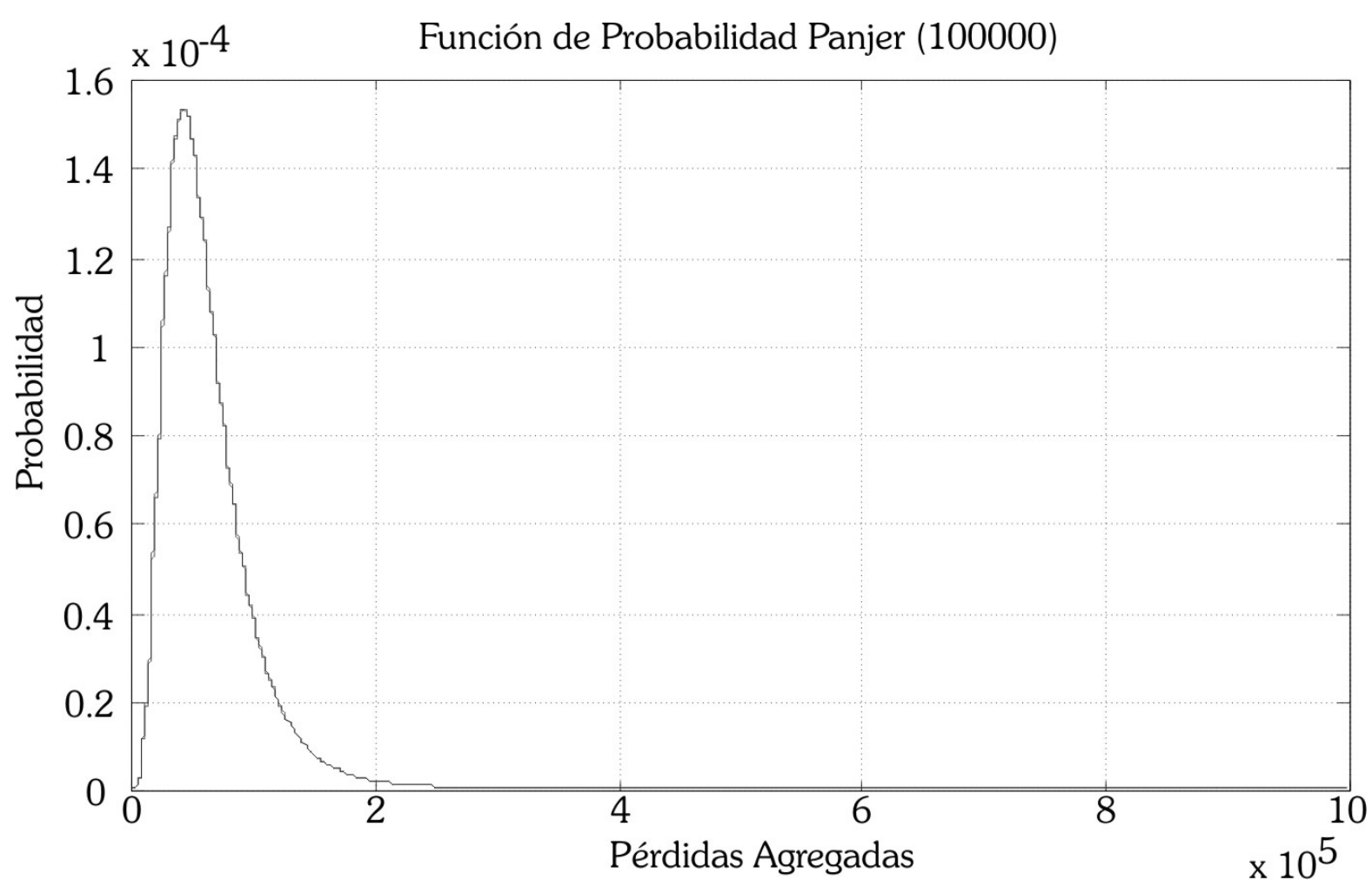
Con 100000 iteraciones los resultados indican, por ejemplo, que el OpVaR estimado, con un nivel de confianza del 99.9%, es 387.641.4. En el contexto de la aplicación esto significaría que: Con un nivel de confianza del 99.9%, se estima que las pérdidas operacionales por mes, ocasionadas por fraude total en la Banca Comercial, no serán superiores a \$387.681.400.

### 3.3 Aplicación del Algoritmo de Recursión de Panjer

Aplicando el algoritmo con diferentes números de iteraciones (5000, 10000, 100000) y para efectos de comparación, con diferentes niveles de confianza (95%, 99% y 99.9%), se obtuvieron los siguientes resultados:

<b>PANJER</b>	<b>5000</b>	<b>10000</b>	<b>100000</b>
95%	140600.0	137500.0	134770.0
99%	215200.0	212100.0	209380.0
99.9%(OPVaR)	394800.0	391800.0	389160.0

La gráfica obtenida para la función de probabilidad de las pérdidas agregadas, con 100000 iteraciones se muestra a continuación:



Con el algoritmo de Panjer, con 100000 iteraciones, la interpretación en el contexto de la aplicación sería: Con un nivel de confianza del 99.9%, se estima que las pérdidas operacionales por mes, ocasionadas por fraude total en la Banca Comercial, no serán superiores a \$389.160.000.

### **3.4 Aplicación de Aproximación Analítica de Böcker y Klüppelberg**

Aplicando la Aproximación Analítica de Böcker y Klüppelberg, correspondiente a la combinación de distribuciones Poisson-Lognormal, con

los parámetros  $\lambda = 17.55$  para la Poisson y con  $\mu = 7.19$  y  $\sigma = 1.42$  para la lognormal, y para los niveles de confianza considerados tiene:

<b>Nivel de Confianza(<math>\alpha</math>)</b>	$\theta^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{EN}\right)$	$OpVaR = \exp\left(\mu - \sigma\theta^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{EN}\right)\right)$
95%	-2,76467201	67227,2703
99%	-3,25358129	134603,061
99.9%=OpVaR	-3,85876787	317886,722

Para visualizar conjuntamente todos los resultados, se presentan unificados en la tabla 3.4.

**Tabla 3.4. Resumen de Resultados**

<b>Número de Iteraciones</b>	<b>5000</b>	<b>10000</b>	<b>100000</b>
MONTECARLO			
95%	137973.9	135520.6	134125.3
99%	218983.6	214036.9	206496.8
99.9%=OpVaR	360935.4	375486.7	387681.4
PANJER			
95%	140600.0	137500.0	134770.0
99%	215200.0	212100.0	209380.0
99.9%=OpVaR	394800.0	391800.0	389160.0
BÖCKER Y KLÜPPELBERG*			
95%	67227.3	67227.3	67227.3
99%	134603.1	134603.1	134603.1
99.9%=OpVaR	317886.7	317886.7	317886.7

\* En la aproximación analítica el número de iteraciones no interviene.

Tanto en la simulación Montecarlo como en el algoritmo de Panjer, se observa que a medida que aumenta el número de iteraciones, el estimativo de las pérdidas para niveles de confianza del 95% y 99% está disminuyendo.

Con respecto a los estimativos de pérdidas para niveles de confianza del 99.9%, es decir, para los OpVaR, se encuentra que la simulación Montecarlo genera estimativos crecientes al aumentar el número de iteraciones.

Por el contrario, el algoritmo de Panjer está generando estimativos decrecientes para las pérdidas agregadas, a medida que crece el número de iteraciones, a un nivel de confianza del 99.9%.

Combinando las dos últimas conclusiones se podría afirmar que la simulación Montecarlo genera estimativos que convergen por debajo hacia el verdadero VaR operacional, y el algoritmo de Panjer genera estimativos que convergen por encima hacia el verdadero VaR operacional.

Lo anterior muestra claramente la conveniencia de que los departamentos de gestión del riesgo en las entidades financieras operen constantemente con diversos modelos de riesgo operacional para tener una visión más acertada de las verdaderas pérdidas potenciales.

Observando la convergencia de los resultados generados por Simulación Montecarlo y con el Algoritmo de Panjer, para los diferentes niveles de confianza, y comparando con los resultados obtenidos por la fórmula de Böcker y Klüppelberg, se puede afirmar, en esta aplicación específica, que la Aproximación Analítica de Böcker y Klüppelberg subestima las pérdidas operacionales totales. Esto puede ocurrir, como afirman los mismos autores, debido a que el OpVaR para altos niveles de confianza, depende dramáticamente de la cola y no del cuerpo de la distribución, y la modelación en este caso está enfatizada sobre el cuerpo de los datos, sin considerar un análisis específico para valores extremos. Así mismo, como muestran Carrillo y Suárez (2004), cuando las pérdidas agregadas llegan a ser relativamente grandes como consecuencia de sumar muchas pérdidas pequeñas, como ocurre en la aplicación, la aproximación de Böcker y Klüppelberg, no genera estimativos adecuados.



## **Conclusiones**

En los últimos años, fundamentalmente desde el surgimiento del Nuevo Acuerdo de Basilea, que planteó el requerimiento de incorporar el riesgo operacional en la relación de solvencia, han surgido diversas alternativas metodológicas para su cuantificación.

La gestión integral del riesgo financiero, y en particular el riesgo operacional, se ha convertido en los últimos años en un gran reto para los investigadores y operadores en finanzas, ante los conocidos grandes desastres financieros de muchas entidades, mucha parte de ellos atribuidos a causas operacionales.

No solo la emergente regulación internacional, y la inminente normatividad nacional, que sólo está en la etapa de identificación, sino también y fundamentalmente, el propósito de mejorar continuamente el proceso de toma de decisiones en las instituciones, han motivado en los últimos años el interés por la investigación en el campo de riesgo financiero y, específicamente en la identificación, valoración, y gestión del riesgo operacional.

Uno de los problemas cruciales para la cuantificación del riesgo operacional ha sido, indudablemente, la escasez de casos confiables, pero ante la convicción creciente de la necesidad de cuantificar ese riesgo, las entidades han iniciado serios procesos de recolección de datos, y se considera que con el transcurrir del tiempo será un proceso superado, y los modelos de medición avanzada AMA, entre los cuales se considera el LDA, tomarán plena vigencia y aplicación.

Entretanto, sigue siendo un gran reto la formulación de un modelo con una complejidad manejable, y con las características de completitud, exactitud, y satisfacción de los estándares generales, cualitativos y cuantitativos planteados por el nuevo acuerdo de Basilea. Eso puede explicar el porqué incluso hasta el año 2005 grandes entidades financieras en el ámbito internacional estaban manejando el método estándar de Basilea II, para cuantificar su riesgo operacional, a pesar de que generaba excesivas cargas de capital.

En este artículo se han presentado formalmente, tres de las metodologías de medición avanzada aplicables para cuantificar el riesgo operacional. Como ninguna de ellas parece ser consistentemente mejor que las otras, es necesario modelar adecuadamente tanto la frecuencia como la severidad, teniendo en cuenta los requerimientos de Basilea, y a partir de ellas utilizar varias metodologías, si se quiere tener una visión más acertada de las pérdidas potenciales, generadas por riesgo operacional.

## Bibliografía

Böcker, K. y Klüppelbelger, C. (2005) Operational VaR: a closed-form solution. Risk Magazine, December, 90-93.

Böcker, K. (2006). *Closed-form approximation for OpVaR when high frequency losses are parameterized by a generalized Pareto distribution (GPD)*. Munich: Hypo Vereinsbank.

Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag.

Carrillo, S. y Alberto Suárez. (2004). Medición Efectiva del Riesgo Operacional. En: Estabilidad Financiera, No. 11, 61-90.

Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag.

Comité de Supervisión Bancaria de Basilea. (2006). *Convergencia Internacional de Medidas y Normas de Capital*. Basilea: BIS.

Cruz, M. (2002). *Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk*. New York: John Wiley & Sons.

Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T.(1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlín.

Frachot, A., Georges, P. y Roncalli, T. (2001). *Loss Distribution Approach for Operational Risk*. (Documento de trabajo, Credit Lyonnais).

Frachot, A., Moudoulaud, O., Olivier y Roncalli, T. (2003). *Loss Distribution Approach in Practice*. Paris: Credit Lyonnais.

Frachot, A., Roncalli, T. y Salomon, E. (2004). *The Correlation Problem in Operational Risk*. (Documento de trabajo).

Franco, L. C., Murillo J. G. (2006). Riesgo Operacional: Reto actual de las entidades financieras. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 5(9), 97-110.

Franco, L. C. y Velásquez, Ermilson (2010). Análisis Y Comparación De Alternativas Para Cuantificar El Riesgo Operacional. Tesis de grado. Maestría en Matemáticas Aplicadas. Medellín. Universidad EAFIT

González, M. (2004). *Análisis del Nuevo Acuerdo de Capitales de Basilea (BIS-II): Pyme-Risk, Country-Risk y Operational-Risk*. (Documento de trabajo).

Hess, K. Th., A. Liewald, y K. D. Schmidt (2002). *An extension of Panjer's recursion*, *Astin Bull.* **32**, no. 2, 283–297.

Jobst, A. (2007). Operational Risk – The Sting is Still in the Tail But the Poison Depends on the Dose. *Journal of Operational Risk* Vol. 2, No. 2.

Klugman, S., Panjer, H. and Willmot, G. (2004). *Loss Models - From Data to Decisions*. Wiley, Hoboken, New Jersey.

Lee, C. M. (2001). *Measuring and Managing Operational Risk in Financial Institutions*. Singapore: John Wiley & Sons.

Nešlehová, J., Embrechts, P. y Chavez-Demoulin, V. (2005). *Quantitative Models for Operational Risk: Extremes, Dependence and Aggregation*. (Documento de trabajo).

Panjer, H H. (1980) The Aggregate Claims distribution and Stop-Loss Reinsurance, *Trans of the Society of Actuaries*, XXXII.

Panjer, Harry H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin (International Actuarial Association)* 12 (1): 22–26.

Panjer, H. H. y S. Wang. (1993). *On the stability of recursive formulas*, *Astin Bull.* **23**, no. 2, 227–258.

Peters, G. W., P. V. Shevchenko and M. V. Wüthrich (2008). Dynamic operational risk: Modelling dependence and combining different sources of information. Preprint, CSIRO call number CMIS 2741.

Peters, G. W. P. V. Shevchenko and M. V. Wüthrich (2009). Model uncertainty in claims reserving within Tweedie's compound Poisson models. To appear in ASTIN Bulletin 39, CSIRO call number CMIS 2609.

Shevchenko, P. y Donnelly, J. (2005). *Validation of the Operational Risk LDA Model for Capital Allocation and AMA Accreditation under Basel II*. CMIS Confidential report prepared for Basel II programme ANZ bank.

Shevchenko, P. y G. Temnov (2008). Modelling operational risk data reported above varying threshold. Preprint, CSIRO call number CMIS 2828.

Shevchenko, P.V. (2008). Implementing Basel II Loss Distribution Approach for Operational Risk. Preprint, CSIRO call number CMIS 2794.

Sundt, B. y W. S. Jewell. (1981). *Further results on recursive evaluation of compound distributions*, Astin Bull. **12**, no. 1, 27–39.

Superintendencia Financiera de Colombia. (2007). *Circular Básica Contable y Financiera, Capítulo XXIII*. Reglas relativas a la administración del riesgo operativo.

Tripp, M. H., Bradley, H. L., Devitt, R., Orros, G. C., Overton, G. L., Pryor, L. M. y Shaw, R. A. (2004). *Quantifying operational Risk in General Insurance Companies*. (Documento de trabajo).

Willmot, G. E. (1986). *Mixed compound Poisson distributions*, Astin Bull. **16**, no. S, 59–76.

X. Luo and P.V. Shevchenko (2008). Computing tails of compound loss distributions using direct numerical integration, Preprint, CSIRO call number CMIS 2688.