

# **Desarrollo de la Teoría de la Demanda: historiografía del enfoque neoclásico**

*Danny Múnera Barrera<sup>1</sup>*

## **Introducción**

Si una empresa conociera o anticipara con absoluta certeza las decisiones de consumo del segmento de clientes a los cuales dirige su oferta, y al mismo tiempo, y con la misma certeza, conociera el impacto que tienen las estrategias de los competidores relevantes sobre su segmento de mercado, podría tal empresa, en un instante, calcular el grado de mejoría o deterioro que sufriría la utilidad operacional de su estado de resultados y, de esta manera, sumar y restar cantidades predeterminadas constituiría la labor más ardua del administrador.

No hay duda que en tal escenario el “espíritu empresarial” perdería el sentido que en momentos como el actual se le atribuye y más aun, los problemas del sistema económico se habrían resuelto por una vía aburrida y convencional. Por la más incierta de las venturas la realidad es que no es posible anticipar con absoluta certeza las decisiones de consumo de ningún segmento, y el segmento mismo parece una mentira piadosa fruto del frenesí intelectual de consultores especializados que intuyen la raíz causal del problema...

---

<sup>1</sup> Economista, consultor de la Corporación Actuar Famiempresas y catedrático del Departamento de Economía de la Escuela de Administración de la Universidad EAFIT.  
Fecha de recepción: Junio 30 de 2005, fecha de aceptación: Octubre 4 de 2005

El principio, tan simple como grotesco, es la inmemorial y encantadora tendencia del individuo a mejorar el balance del placer y del dolor que cada uno de sus actos provoca en el conjunto pasional de su personalidad.

El acto del consumo provoca siempre placer... y dolor. Unas ocasiones es más fuerte la primera que la segunda de estas sensaciones, y tiene lugar el consumo; algunas veces, es más fuerte la segunda a pesar de lo cual tiene lugar el consumo, no como resultado de un balance cierto, sino por un cuadro de expectativas inciertas del que también es víctima el individuo. En cualquier caso, si un individuo juzga “a priori” que tras cierta decisión de consumo mejora el placer neto (diferencia entre placer y dolor) entonces ejecuta su decisión. El placer neto “a posteriori” puede ser consecuente o contrario a las expectativas, y siempre se produce un efecto memoria que influirá en las decisiones futuras de consumo, de tal suerte que el placer neto (o simplemente la búsqueda del mayor PLACER) es el instrumento detector que utiliza el individuo para guiar su toma de decisiones.

El placer neto y su configuración no serán el tema de este artículo<sup>1</sup>, pero hasta este punto es claro que su naturaleza es incierta y ante todo subjetiva, con lo cual resulta inmediata la tremenda dificultad que se enfrenta, puesto que no existen, ni han existido, dos individuos iguales en sensaciones siempre que ellas son un asunto de múltiples circunstancias y diversos tiempos.

Tal como aquí se ha presentado, es la esencia de la teoría subjetiva del valor, o ese conjunto de explicaciones que ven en la valoración individual de los grados de utilidad, el más importante de los principios que rigen la formación de los precios en los sistemas de mercado.

Este conjunto de explicaciones es resultado de una larga evolución histórica que tiene por génesis el pensamiento de los filósofos griegos, especialmente Aristóteles cuya obra *Topics* (referenciada en la nota al pie N° 1 de este artículo) delinea los fundamentos de la valoración subjetiva; pues bien, esta tradición es sostenida por los doctores escolásticos en la edad media y superada durante los siglos XVI al XVIII por un grupo de pensadores italianos y franceses en lo que se ha denominado por algunos la escuela *italo - francesa*<sup>2</sup> pero que no supera, en la esfera del pensamiento económico, el absorbente auge del pensamiento inglés a la cabeza de Adam Smith a quien se le reconoce, no solo como el padre de la Economía Política, sino además como el exponente más

importante de la teoría de los costos de producción en oposición a la teoría del valor subjetivo. Luego de la publicación de la obra *Investigación sobre la naturaleza y causa de la riqueza de las naciones* en 1776, el enfoque del valor subjetivo debió esperar casi un siglo para ser expuesto en forma coherente, completa y con capacidad de impacto. No obstante que durante este período de tiempo se dieron avances de considerable importancia, la versión más acabada solo empieza a ser conocida a partir de 1870.

### **1. El principio marginal de la teoría subjetiva y el desarrollo matemático**

La diferencia radical entre los enfoques del valor de cambio de las mercancías sostenidos por los economistas de la escuela clásica, por un lado, y los neoclásicos, por otro, se haya en la explicación de la formación de los precios. Mientras que los primeros sostienen que la utilidad es una condición del precio más no su determinante<sup>3</sup>, los segundos van a sostener que el precio (valor de cambio) es consecuencia de la utilidad y más exactamente de la *utilidad marginal*<sup>4</sup>, la cual se entiende como el grado de beneficio que reporta la última unidad consumida. En este sentido es que adquiere la relevancia que se le ha dado a la valoración subjetiva, pues el nivel o grado de beneficio recibido al consumir una unidad adicional de cualquier mercancía depende, con todo, de la cantidad que hasta el momento se halla consumido; no es lo mismo una porción de pan cuando apenas se han consumido unas cuantas migajas, que cuando la siguiente es la última de diez porciones ya consumidas; en el primer caso, la experiencia ilustra que el beneficio de la siguiente porción es mucho más alto que en el segundo. En consecuencia, cuando se mira una economía de mercado en la cual los precios intermedian en las decisiones de consumo, y el dinero representa la riqueza de un individuo (medida en bienes y servicios), la disposición del individuo a asumir el pago de una unidad adicional, dependerá del balance de las utilidades que reporte el monto monetario definido por el precio, de un lado, y el consumo de la cantidad de mercancía adquirida, por el otro, puesto que el primero significa renunciar a una cantidad de beneficio (dado por las mercancías que pueden adquirirse con el mismo presupuesto) y el segundo implica lo contrario. Si el balance es favorable al consumo de una unidad más de mercancía, tiene lugar la demanda, en caso contrario tendrá lugar la sustitución o el ahorro a menos que varíe (en este caso la variación

referida tiene signo negativo) el precio de la mercancía en cuestión. Debió ser, quizá, esta última circunstancia la que sedujo de forma tan sobrecogedora a los autores de la escuela neoclásica puesto que este argumento explica de manera clara, intuitiva y fehaciente la génesis de los precios al mismo tiempo que resuelve la paradoja de los precios de ciertas mercancías como el agua y los diamantes.

Todo el argumento se concentra en la consideración de la demanda como principio activo (por contraposición a la oferta que es el principio activo defendido por los autores clásicos) en la determinación de los precios y, por tanto, la consecuencia inmediata de esta forma de pensar será el interés por el análisis de la conducta de los individuos.

A manera de ejemplo digamos que un individuo  $i$  dispone de un presupuesto  $M$  para consumir  $X^*$  cantidades de un bien  $X$ . Al precio  $P_x$  las cantidades adquiridas serán  $X^* = (M/P_x)$ ; bajo el supuesto de que la utilidad es mensurable, la utilidad recibida será  $U=U(X^*)$ , en condiciones normales de consumo se cumplirá que, siendo  $dX > 0$  una pequeña variación de  $X$ , entonces  $U(X^*-dX) < U(X^*)$ , y la diferencia  $[U(X^*) - U(X^*-dX)]$  indica la variación absoluta de la utilidad del consumo de  $X$  en los alrededores de  $X^*$ .

Entre  $U(X^*-dX)$  y  $U(X^*)$  puede haber una muy grande o ninguna diferencia, todo depende de la forma o contorno de  $U(X)$ , por tanto un indicador más cercano del impacto que tiene la variación del consumo de  $X$ , resulta de dividir la variación absoluta de la utilidad  $U(X)$  por el cambio en el consumo de  $X$ ,  $dX$ , es decir,  $[U(X^*) - U(X^*-dX)]/dX$ , que indica el cambio de la utilidad  $U(X)$  por cada unidad de cambio  $dX$ ; no obstante la inestabilidad o brusquedad de  $U(X)$  puede destruir la bondad del indicador, por tanto, se acostumbra exigir, siempre que sea posible, que  $dX$  sea muy pequeña, o en lenguaje matemático que  $dX$  tienda a cero, lo que equivale a aplicar el concepto o la función de límite a la expresión anterior. El límite de  $[U(X^*)-U(X^*-dX)]/dX$ , cuando  $dX$  tiende a cero, se define como la *derivada de la utilidad* del consumo de  $X$  en el punto  $X^*$  y se denomina *Utilidad Marginal de X*,  $UM(x)$ , y se obtiene mediante la reducción a tangente de la línea secante que pasa por los puntos  $U(X^*)$  y  $U(X^*-dX)$  en  $U(X)$ .

Como queda demostrado, el enfoque subjetivo del valor solo necesita suponer que la utilidad es mensurable para desarrollar y hacer propias las

técnicas del cálculo diferencial como herramienta propia del análisis teórico; es este el rasgo distintivo del pensamiento neoclásico (exceptuando los aportes de los primeros representantes de la escuela austriaca) y, al mismo tiempo, el principal argumento que éstos tienen para rechazar los métodos y técnicas del pensamiento clásico.

Ahora bien, este proceso es resultado de un conjunto de desarrollos independientes por parte de pensadores, (no siempre de raíz formativa en economía), como H. H. Gossen (1854), A. A. Cournot (1838) y J. Dupuit (1844), dentro de una primera generación de autores que abre el debate sobre la formación de los precios a partir de la valoración subjetiva, y a los cuales seguirá una segunda y definitiva generación que como W. S. Jevons (1871), L. M. Walras (1874) y C. Menger (1870), serán los principales exponentes del origen y consecuencias de la valoración subjetiva en los escenarios de mercado.

No obstante lo anterior, la exposición (clara y contundente) de la ley de la demanda como consecuencia natural y espontánea del principio de valoración subjetiva, tendrá que esperar todavía el advenimiento de los primeros años del siglo XX y el desarrollo técnico y conceptual a partir de autores como F. Y. Edgeworth, V. Pareto y E. Slutsky.

## **2. Sobre el desarrollo de la utilidad y la demanda**

Que la cantidad consumida de un bien disminuye (generalmente) cuando el precio del mismo aumenta, es el principio más simple y al mismo tiempo el más desconcertante de la economía. Lo primero porque para nadie es desconocida y ajena tal secuencia de eventos; lo segundo porque para casi nadie esta completa, ni es satisfactoria, la explicación de la raíz causal que hila la secuencia de eventos. De hecho, aunque el referido principio es tan antiguo como la costumbre de intercambiar excedentes, puede ilustrar el nivel de complejidad que lo circunda que sólo a principios del siglo XX se haya elaborado una explicación de la forma como incide el cambio de los precios en las decisiones de consumo. La explicación a la cual se está haciendo referencia se debe al profesor J. R. Hicks (eminente economista inglés que compartió el premio Nóbel de economía con K. Arrow en 1972) quien publica en 1939 el libro *Valor y Capital*<sup>5</sup> en el cual, siguiendo el derrotero y los conceptos de

Marshall<sup>6</sup> e introduciendo alguna variación sugerida por V. Pareto<sup>7</sup>, explica (en el capítulo II) que con respecto a un conjunto de bienes  $(x, y)$  el cambio en el precio de uno de ellos genera un efecto ingreso y un efecto sustitución<sup>8</sup>, y aunque el primero siempre es negativo, el segundo normalmente es positivo. Estas circunstancias sirven al profesor Hicks para argumentar que el caso de los “bienes Giffen”<sup>9</sup> también está recogido, como un caso especial, en su conjunto explicativo, siempre que la magnitud del efecto sustitución sea mayor que la magnitud del efecto ingreso.

Ahora bien, cuando se observa detenidamente la exposición del profesor Hicks, se detecta que todo su argumento descansa en el significado y naturaleza de las curvas de indiferencia (bajo el enfoque paretiano de la ordinalidad) y el algoritmo de la optimización restringida.

## **2.1 Génesis de las curvas de indiferencia**

Con relación a las curvas de indiferencia, es un punto común reconocer que este concepto se debe a las eruditas y elaboradas observaciones del docto y brillante Francis Ysidro Edgeworth<sup>10</sup>, quien en 1881 publica *Psicología Matemática*<sup>11</sup>, un texto cargado de abstractas referencias al mundo material y un compendio bastante denso de ecuaciones enriquecido con matices propios de la física, la filosofía, el derecho y la historia clásica. Dentro de ese cuadro, tempranamente mágico – realista, pasan casi inadvertidas las curvas de indiferencia, como una descripción de los grados comparativos de la utilidad que reporta el consumo de diversos bienes a un individuo.

En la “Parte Segunda” de *Psicología matemática*, Edgeworth presenta su versión de las curvas de indiferencia (por él llamadas “líneas de indiferencia”) y se puede decir que por tal concepto entiende este autor la estructura formal que describe las decisiones de consumo que toma el individuo X frente a la circunstancia de un intercambio con otro individuo Y en relación a dos bienes  $(x, y)$ .

Las referidas “líneas de indiferencia” aparecen como la ruta de los cambios entre  $x$  e  $y$  que uno de los individuos (implicados en una transacción) sigue de tal manera que los efectos del intercambio no afecten su grado de bienestar (quizá sea más pertinente utilizar el término *felicidad*); lo anterior queda recogido de acuerdo con la siguiente expresión:

$$(E-x)(dP/dx) + (N-y)(dP/dy) = 0$$

En esta estructura P es la utilidad total que el individuo X obtiene tras el consumo de los bienes (x,y), es decir,  $P=F(x,y)$ <sup>12</sup>, y al manipular algebraicamente tal expresión resulta inmediato que:

$$(E-x)(dP/dx) = - (N-y)(dP/dy),$$

En otras palabras, que el cambio en la utilidad total derivado del cambio en uno de los bienes anula, en sentido y magnitud, el cambio inducido por el cambio en el otro bien. Las expresiones (E-x) y (N-y) reflejan la magnitud de los cambios en x e y respectivamente.

Finalmente debe tenerse en cuenta que las “líneas de indiferencia” no constituyen el fin último del hilo que conduce el razonamiento de Edgeworth, sino que ellas aparecen como un punto de apoyo en la presentación de las condiciones que permiten el intercambio de bienes en un sistema de mercado; el interés fundamental era formular una expresión que describiera los puntos de intercambio en un escenario de dos individuos con posiciones económicas diferentes. En la actualidad a tal expresión se conoce con el nombre de “Curva de Contrato”<sup>13</sup>.

Ahora bien, si las que hoy se denominan curvas de indiferencia, pueden rastrearse en su origen hasta Edgeworth, el trasfondo que sirve de cultivo requiere la conceptualización de la teoría subjetiva del valor. Con relación a esto, puesto que el punto de partida de la teoría subjetiva es el reconocimiento que las decisiones humanas se guían por una especie de valoración de los sentimientos y los motivos morales, los planteamientos de W. S. Jevons<sup>14</sup> constituyen una referencia de obligada consulta cuando se rastrea la formulación de Edgeworth.

La formulación de la teoría subjetiva del valor a partir de Jevons comienza desde la Introducción del Capítulo I de *La Teoría de la Economía Política*<sup>15</sup> en el cual no titubea al exponer el punto de partida de su teoría:

La reiterada reflexión y la investigación me han conducido a la en cierto modo novedosa opinión de que *el valor depende enteramente de la utilidad*<sup>16</sup>

Esta opinión se venía gestando de mucho tiempo atrás, pues en una carta dirigida a su hermano en 1860<sup>17</sup> relata Jevons el que considera el más importante de los axiomas de la “verdadera teoría económica”:

(...) uno de sus más importantes axiomas es que con el aumento de la cantidad consumida de cualquier mercancía, el simple alimento que uno ha de consumir, por ejemplo, decrece el grado de utilidad o provecho derivado de la última unidad consumida. La disminución de disfrute entre el comienzo y el final de una comida puede tomarse como ejemplo. Yo adopto el supuesto de que, en media, la *ratio* de utilidad es una función matemática continua de la cantidad de mercancía consumida.<sup>18</sup>

De donde se advierte explícitamente que la utilidad (provecho o placer) es un fenómeno de naturaleza cuantificable; sin embargo llegar a esta consideración no resultó sencillo en el mundo de tardíos rasgos clásicos, pues aunque la tendencia de moda era mirar cualquier fenómeno con los ojos de las leyes naturales de la física alimentadas por las matemáticas, cuando esa mirada se posaba sobre la naturaleza moral del individuo, el espectador inerme asumía una actitud defensiva, que la mayoría de las veces rechazaba las generalizaciones a las que no estaba dispuesto a someter el único e inalienable patrimonio, éste es, su conciencia, o aquel espacio en el que se dibuja el perfil moral de la sociedad. En tal contexto actitudinal, Jevons anticipándose al inminente rechazo afirma:

Los placeres son, por el momento, tal como el espíritu los estima; de forma que no podemos hacer una elección o manifestar la voluntad en ningún sentido sin indicar de ese modo un exceso de placer en cierta dirección.

[...] No se me ocurriría – dice más adelante – atribuir a la mente ningún poder preciso de medir y sumar y restar sentimientos de forma tal que resulte una comparación exacta.

[...] El lector – aclara además – hallará, de nuevo, que no se hace en ningún momento el intento de comparar la cantidad de sentimiento de un espíritu con la de otro. [...]. Cada mente es de este modo inescrutable para cualquier otro, y no es posible ningún denominador común de sentimientos.<sup>19</sup>

Por otro lado y con respecto al modo de pensar clásico argumenta que la opinión corrientemente aceptada en su tiempo (se refiere al trabajo como fuente explicativa del valor) difiere con respecto a la suya propia, pero que tal error apreciativo se puede explicar:



A menudo se observa que el trabajo determina el valor, pero sólo de una manera indirecta por medio de la variación del grado de utilidad de la mercancía a través de un aumento o limitación de la oferta.<sup>20</sup>

Hechas las claridades pertinentes, será necesario expresar el placer y el dolor como categorías susceptibles de medida (más no de comparación), y ésto es precisamente el objeto del capítulo II de la obra de Jevons, titulado *Teoría del placer y el dolor*. En esta parte de su obra reconoce que debe aceptarse las premisas introducidas por Bentham acerca de las circunstancias que hacen posible tratar el placer y el dolor como categorías susceptibles de medida (se refiere a intensidad, duración, grado de certeza, grado de lejanía, fecundidad, pureza y extensión), para llamar la atención sobre la intensidad y la duración:

Un sentimiento, sea de placer o de dolor, se debe contemplar como poseedor de dos dimensiones, o modos de variar con respecto a la cantidad. Todo sentimiento debe durar algún tiempo, [...] mientras dura, puede ser más o menos agudo e intenso.<sup>21</sup>

Para ilustrar lo anterior, a renglón seguido afirma:

Si en dos casos la duración del sentimiento es la misma, habrá más cantidad en el que sea más intenso, o bien podemos decir que, con la misma duración la cantidad será proporcional a la intensidad. [...]. Si la intensidad permaneciera siempre constante, la cantidad de sentimiento se hallaría multiplicando el número de unidades de intensidad por el número de unidades de duración.<sup>22</sup>

Con el terreno convenientemente abonado de esta forma, Jevons procede a indicar la apariencia gráfica de la intensidad, para luego calcular la cantidad total de placer obtenido durante un periodo de tiempo<sup>23</sup>, de esta manera deja abierto el camino para aplicar la teoría de la valoración del placer a los objetos que lo producen, es decir, las mercancías o “(...) cualquier objeto, sustancia, acción o servicio que pueda suministrar placer o evitar dolor.”<sup>24</sup>.

Una mercancía es objeto del placer, siempre que ella afecta (aumenta o disminuye) la felicidad de una persona, de lo que deriva su carácter útil, siendo la utilidad “una cantidad de dos dimensiones, una dimensión consistente en la cantidad de mercancía, y otra en la intensidad del efecto producido sobre el consumidor”<sup>25</sup>. De aquí se derivan algunos conceptos relacionados pero

distintos en su estructura, tales son la Utilidad total, el Grado de utilidad y por último el Grado final de utilidad.

Partiendo del hecho que la utilidad que reporta el consumo de un bien es decreciente con relación a las cantidades consumidas por cada unidad de tiempo, Jevons define la Utilidad Total como la utilidad acumulada de las diferentes porciones de consumo (o simplemente área bajo la curva entre dos valores extremos, menor el primero y mayor el segundo); El Grado de Utilidad será la intensidad puntual relacionada con el consumo de una cantidad específica (o simplemente el valor de la función de utilidad en un punto específico); por último, el Grado final de Utilidad será la variación del Grado de Utilidad asociada al consumo de la última unidad de la mercancía en cuestión (o simplemente el aumento o disminución del Grado de utilidad total que genera el consumo de la última unidad)<sup>26</sup>. El autor del presente artículo cree no contradecir la tradición interpretativa si se enuncia que el Grado final de utilidad es, matemáticamente hablando, la segunda derivada de la utilidad total con respecto a las variaciones en las cantidades consumidas, o lo que es lo mismo decir, la primera derivada del grado de utilidad con respecto al bien en cuestión y que no es otra cosa que el grado marginal de utilidad, o simplemente utilidad marginal. Así parece desprenderse de la solución al problema de la distribución de un bien que puede destinarse a diversos usos, esto es, en un estado de satisfacción completa o plena, un individuo que reciba una cantidad adicional de un bien que puede destinarse al uso x o al uso y, lo primero que tratará de evaluar será el aumento de las utilidades  $dU_x$  y  $dU_y$  derivados del consumo del bien en el uso x o en el uso y, respectivamente; pero si la situación al inicio del problema es de satisfacción completa, se encontrará que  $dU_x = dU_y$ , que al aplicar la función límite será equivalente a  $(dU_x/dx) = (dU_y/dy)$ , “en otras palabras, [para no alterar el estado de satisfacción del individuo, éste debe distribuir de tal manera que...] los *grados finales de utilidad* en los dos usos deben ser iguales”<sup>27</sup>.

Finalmente, en el capítulo IV titulado *Teoría del intercambio*, Jevons presentará las que Edgeworth llamó *líneas de indiferencia*. Luego de explicar la importancia del intercambio, hacer una (más o menos) extensa presentación del significado, ambigüedad y medida del término valor y haber definido lo que entiende por mercado y su *ley de indiferencia*<sup>28</sup>, pasa a explicar las consideraciones que tienen dos grupos de mercado (o dos individuos, para el caso es lo mismo) en la causación del intercambio:

Sea A un cuerpo que posee  $\mathbf{a}$  unidades de un bien X y B el otro cuerpo que posee  $\mathbf{b}$  unidades del bien Y; en el supuesto de que A y B intercambien cantidades de sus respectivas mercancías, A quedará con  $(\mathbf{a} - x)$  unidades de X (después de entregar una cantidad  $dx=x$ ) e y de Y (siendo  $dy=y$  lo que recibió a cambio); B, en forma análoga, quedará con  $(\mathbf{b} - y)$  unidades de Y (después de entregar  $dy=y$ ) y  $x$  de X (siendo  $dx=x$  lo que recibió a cambio).

Se definirán  $f1(\mathbf{a}-x)$  y  $f2(y)$  como los grados finales de utilidad del cuerpo A, mientras  $g1(x)$  y  $g2(\mathbf{b}-y)$  representan a los similares para el cuerpo B.

En lo que sigue, lo que es para A también será válido para B. Para A, el resultado de la transacción reporta el máximo provecho siempre que  $f1(\mathbf{a}-x)dx=f2(y)dy$  de donde es inmediato que  $[f1(\mathbf{a}-x)/f2(y)]=(dy/dx)$ , y por la *ley de indiferencia* del mercado, se cumplirá que  $[f1(\mathbf{a}-x)/f2(y)]=(Y/X)$ . En forma análoga para el cuerpo B se concluye que para obtener el máximo provecho la condición es  $[g2(x)/g1(\mathbf{b}-y)]=(Y/X)$ ; en general la condición para el intercambio será  $[f1(\mathbf{a}-x)/f2(y)]=[g2(x)/g1(\mathbf{b}-y)]^{29}$ .

Nótese que, en esencia, la última expresión es la misma formulada por Edgeworth y expuesta en los párrafos precedentes, así como también es igual la esencia de la condición de máximo provecho:  $[f1(\mathbf{a}-x)/f2(y)]=(dy/dx)$ , que puede expresarse como  $dx f1(\mathbf{a}-x) - dy f2(y)=0$ , que aunque en un lenguaje menos elaborado y más aparatoso, refleja la misma conclusión.

## **2.2 Introducción del algoritmo de la optimización restringida en economía<sup>30</sup>**

A la conceptualización de la teoría subjetiva, debe unirse el auge y desarrollo de nuevos métodos matemáticos, como condición adicional y necesaria para la formulación histórica de la teoría neoclásica de la demanda<sup>31</sup>.

Se dice del siglo XVIII que fue la época más luminosa de toda la historia de la humanidad, en virtud de que no se emitían por esta época, afirmaciones que no fueran resultado de transitar por sendas oscurecidas antes por la fe como principio revelador, de la mano de la razón ahora como principio cognitivo. Consecuencia de todo ello fueron los desarrollos de la física mecánica a partir de la matemática que con Newton han alcanzado un esplendor que ya nunca más se apagará.

Para 1871 el continente europeo conocía los extraordinarios adelantos que la matemática había producido en la resolución de complejos problemas relacionados, la mayoría de las veces, con las exigencias de la navegación y la balística<sup>32</sup>; estas dos áreas problemáticas son naturalmente de gran interés para los gobernantes de la época, razón por la cual la conformación y manutención de academias y sociedades científicas llegó a constituir una política de gobierno. Estas sociedades eran dirigidas por, y albergaban a, una gama amplia y generosa de matemáticos de la talla de Euler, D'Alambert, Laplace, Lagrange<sup>33</sup>. La función de estos eminentes personajes, a los cuales debe unirse el nombre de otros no menos brillantes, consistía en ilustrar a los gobernantes en la mejor manera de lograr los resultados en los frentes económico y militar, para lo cual era necesario estimular el ejercicio de su pensamiento cubriendo sus necesidades y remunerando generosamente su trabajo; fruto de ello era que estos matemáticos, una vez que asesoraban a sus protectores, se dedicaban durante largas jornadas de tiempo a resolver problemas en esferas mucho más abstractas. Uno de los problemas a los que mayor tiempo y trabajo se dedicó, está relacionado con el movimiento de partículas en la configuración de un sistema dinámico. Las mecánicas de Newton y Galileo eran siempre los marcos de referencia, pero no existían principios analíticos que permitieran llegar a tales construcciones; solamente por la vía de elaboraciones geométricas se tenía acceso, pero este camino está lleno de restricciones al valerse, en un alto grado, de la intuición visual de formas preconcebidas. D'Alambert (1743) y Euler (1736) formularon métodos que se desprendieron con cierto grado de éxito de las restricciones geométricas, pero no se desligaron totalmente del problema.

La solución a lo anterior se vio venir en el año 1788, cuando se presenta en público la *Méchanique Anlytique*, fruto de uno de los más grandes matemáticos de la historia, J. L. Lagrange<sup>34</sup>. El prefacio de su obra revela la forma en que se distancia de los métodos sintéticos (basados en la geometría):

Me he planteado el problema de reducir esta ciencia (la mecánica), y el arte de resolver los problemas relativos a ella, a fórmulas generales, cuyo simple desarrollo dé todas las ecuaciones necesarias para resolver cada problema... En esta obra no se encontrará ninguna figura. Los métodos que expongo en ella no requieren ni construcciones, ni razonamientos geométricos o

mecánicos, sino solamente operaciones algebraicas (analíticas) sujetas a procedimientos uniformes y normales. Los que gusten del análisis quedarán complacidos al ver cómo la mecánica llega a ser de este modo una nueva rama de aquel, y me quedarán agradecidos por haber ampliado su dominio<sup>35</sup>

Este espíritu desafiante y problemático se manifestará por primera vez, y para siempre, en 1755 cuando J. L. Lagrange (a la edad de 19 años) comunica a L. Euler (que para la época contaba con 48 años) el método de los *multiplicadores* para resolver el problema isoperimétrico<sup>36</sup>, esta circunstancia constituyó, no sólo un significativo avance en el desarrollo del cálculo de variaciones, sino que además brindó (122 años más tarde, por lo que se sabe) una herramienta para el tratamiento de los problemas de la economía de los teóricos neoclásicos, y ésto hará casi imposible para la posteridad escribir un texto de economía sin expresiones matemáticas. Aunque se puede considerar abierto el debate sobre a quién se debe el uso de los multiplicadores de Lagrange en economía (Westergaard, Edgeworth, Amstein o incluso alguien más)<sup>37</sup>, lo cierto es que una vez son incorporados al inventario instrumental, la matemática (desde la diferencial más elemental hasta el cálculo más avanzado) adquiere, para la economía, relevancia doctrinaria. Esta opinión debe entenderse en el sentido de que el primer contacto formal entre la economía y la matemática fueron los multiplicadores de J. L. Lagrange, el sitio específico de tal encuentro fue el cálculo de variaciones y la circunstancia que propició tal encuentro, fue la corriente intelectual que interpretó la economía como la ciencia de la asignación eficiente. Para ésta los resultados económicos de las relaciones sociales son magnitudes de naturaleza mecánica como las partículas de la física newtoniana (cuyas leyes siempre se pueden descubrir por medio de referentes geométricos), solo que su escenario de realización no es la realidad física (y no siempre es posible descubrir sus leyes por medio de referentes geométricos), es precisamente ésta la razón por la cual Lagrange es tan importante en la historia de la economía, mucho más allá de su método de los multiplicadores está la concepción analítica que le provee a la matemática una especie de pasaporte para entrar en otras dimensiones (con o sin, el equipaje geométrico), pues bien, la economía es una de esas dimensiones.

No interesa profundizar (en este artículo) en estas disertaciones, puesto que la pretensión es mucho más simple, la cual es la de esclarecer, aunque

solo sea por la vía de la inducción especulativa, la forma como la matemática ha contribuido en la configuración de la demanda neoclásica; a tal fin se dirá que la tradición lagrangiana inaugurada por Edgeworth en 1877, provee a la corriente neoclásica y específicamente al profesor Hicks (según se dijo en algún párrafo anterior) del instrumento idóneo para formular al agente económico de un sistema de mercado en su dimensión más humana, ésto es, como la unidad que resuelve la contradicción entre el placer y el dolor: el placer de cubrir las necesidades materiales a partir del consumo de bienes, representado por las curvas de indiferencia, y el dolor de restringir la satisfacción de necesidades al presupuesto limitado por el precio de los bienes.

Al construir y desarrollar el algoritmo lagrangiano, se pretende haber encontrado un mecanismo que permite llegar a la misma conclusión (o por lo menos una muy cercana) que llega el individuo que toma decisiones de consumo, es decir, por medio de un proceso iterativo, se supone que el individuo evalúa cuál, de los posibles (de acuerdo a la renta y el nivel de precios), es el conjunto de bienes que maximiza la utilidad, o en términos lagrangianos para cuál conjunto  $(x_0, y_0, \dots)$  la expresión  $L=U(x,y,\dots) + \lambda g(x,y,\dots)$  tiene un punto estacionario<sup>38</sup>. Al resolver el problema por los procedimientos tradicionales, se obtiene una expresión  $x=D(M,P_x,P_y)$ , por medio de la cual se configura la demanda neoclásica en su versión más acabada<sup>39</sup>, y que se extiende a casos generales de más de dos bienes. En esta expresión, el desarrollo de  $(dx/dP_x)$ , conduce a un resultado que puede expresarse como una combinación de, de un lado, los efectos que  $dP_x$  tiene sobre  $M$  (o efecto renta) y, de otro, el efecto que  $dP_x$  tiene sobre  $U_{mgy}$  (o efecto sustitución)<sup>40</sup>. Esta expresión y sus variaciones, se deben (según se dice en la nota al pie n° 40), al economista y matemático ruso E. Slutsky (1890 – 1948) que desde 1915 había propuesto este tratamiento en un tono bastante elevado, razón que puede explicar porqué estuvo (al decir de Hicks) “(...) tanto tiempo sin ejercer influencia”<sup>41</sup>.

De esta forma, y para la posteridad, aparece en la historia la formulación neoclásica de la demanda, y aunque los argumentos y las afirmaciones hechas hasta este punto parecen querer decir que Lagrange y sus multiplicadores fueron el camino de solución al problema, se dirá finalmente, que bien pudo haber sido otro el camino, ... no hay duda incluso que en forma autónoma se habría llegado al mismo resultado, sin embargo y en beneficio del argumento, las referencias históricas que se tienen disponibles muestran a Lagrange

como un pilar de la ciencia que da buena sombra al devenir del pensamiento económico<sup>42</sup>.

### 3. Conclusión

Por lo expuesto hasta aquí, y en función de las fuentes explicativas consultadas, se concluye que la génesis de la teoría neoclásica de la demanda es la consecuencia natural y espontánea de la articulación de la teoría de la valoración subjetiva y la introducción del algoritmo lagrangiano de optimización restringida, por parte de los economistas victorianos de finales del siglo XIX.

Por otro lado, y finalmente, bajo el convencimiento de que todavía faltan datos y tópicos que deben ser incorporados, hasta el momento resulta llamativo que el algoritmo de optimización al cual se ha venido haciendo referencia, se convirtió por la fuerza de la costumbre en una tradición, que al mismo tiempo ha servido como caldo en el cual se ha cultivado una buena parte del instrumental matemático que matiza el estatus científico de la teoría económica de principios del siglo XXI.

#### Citas:

<sup>1</sup> Este concepto, su naturaleza, composición y consecuencias no serán tema en esta ocasión. Por el momento basta con decir que no es una novedosa idea, muy por el contrario los inicios de este pensamiento pueden rastrearse desde el siglo IV de la era pre-cristiana en las ideas de Jenofonte y Epicuro, y en general en los fundamentos de la filosofía hedonista, sin embargo a este respecto J. A. Schumpeter en “Historia del análisis económico”, el capítulo 7° llamado “el análisis del equilibrio” incluye el “apéndice al capítulo 7” en el cual puede leerse: “Sabemos que la teoría fue desarrollada, desde sus raíces aristotélicas, por los doctores escolásticos, cuyo análisis del valor y del precio sobre la base de la ‘utilidad y escasez’ lo tenía ya todo excepto el aparato marginalista” (pag. 1145), con lo cual Schumpeter deja muy claro que no está de acuerdo en conceder protagonismo a la filosofía hedonista en el desarrollo de la teoría. Esta posición parece tener su origen en una apreciación conceptual imputada a la escuela austriaca (Schumpeter se enmarca en esta escuela) en el marco de la famosa “methodenstreit” que protagonizó el fundador de la escuela C. Menger y el principal representante de la escuela histórica G. Schmoller. A pesar de todo, Schumpeter no niega la antigüedad del enfoque, ni mucho menos los desarrollos a que da lugar y que irrigan una gran variedad de tópicos y episodios históricos en derecho, economía, sociología, etc.

Ahora bien, con respecto a la antigüedad del enfoque subjetivo aplicado al análisis económico, no hay duda acerca de que Aristóteles es quien con mayor claridad expone la teoría de la valoración subjetiva; en su obra *Topics* el pensador griego formula la siguiente afirmación: “...

una cosa es más deseable cuando añadida a un bien menor, transforma el conjunto en un bien mayor. Análogamente, se puede juzgar también partiendo de la sustracción; la cosa que con su sustracción transforma el resto en un bien menor, puede ser considerada como un bien mayor, sea cualquiera aquella cuya sustracción deja transformado el resto en un bien menor”. Esta cita es tomada del artículo “Génesis de la teoría de la utilidad marginal desde Aristóteles hasta finales del siglo XVIII” de Emil Kauder que aparece en la recopilación elaborada por Spengler y Allen (1971) bajo el título “El pensamiento económico de Aristóteles a Marshall”. Basado en este párrafo, y algunos más, el profesor belga Oskar Krauss (citado por Kauder) sugiere, no sin cierto grado de malicia, que *Topics* de Aristóteles tiene un alto grado de responsabilidad en los fundamentos expuestos por Menger y Bonhm – Bawerk en la configuración de la escuela austriaca, no obstante Kauder aclara que: “si leyeron o no los *Topics* de Aristóteles es algo que no puede saberse” (ibid, pag. 294).

- <sup>2</sup> Es precisamente el artículo antes citado del profesor Emil Kauder el que sirve de referencia para este comentario. En éste, el profesor Kauder argumenta que la teoría subjetiva del valor constituye una vertiente de análisis antiquísima y bastante madura, aunque de desarrollo tardío debido al protagonismo diezochesco del pensamiento inglés. Tal circunstancia provoca pesar en Kauder pues explica casi un siglo de retraso para una teoría “correcta” del sistema económico y el proceso de mercado. Dentro de los autores destacados en esta línea por el profesor Kauder, se encuentran los doctores escolásticos Tomás de Aquino, Enrique de Gante y Johannes Buridanus (en los siglos XIII y XIV); Luis de Molina, Leonardus de Lessius, Hugo de Groot y Samuel von Puffendorf (en los siglos XVI y XVII); dentro de la pretendida escuela ítalo – francesa se desataca el grupo conformado por Gian Francesco Lottini, Bernardo Davanzatti, Germiniano Montanari y Ferdinando Galiani en Italia y por Francia Anne Robert Jacques Turgot. Estos autores trataron con sobrada inteligencia la relación entre escasez y valor desde la valoración subjetiva de la utilidad, y de entre éstos, sólo Turgot formuló un principio de formación de los precios a partir de la valoración subjetiva de los bienes en el proceso de intercambio. El matemático Daniel Bernuolli (contemporáneo de Galiani y Turgot) entronca en esta tradición en forma notable al formular el principio de la utilidad marginal decreciente que sería necesario para que durante el siglo XIX se desarrollara la versión oficial y conocida actualmente de la teoría de la utilidad marginal.
- <sup>3</sup> En uno de los pasajes mejor elaborados de la literatura económica, A. Smith dice: “El precio real de cualquier cosa, lo que realmente le cuesta al hombre que quiere adquirirla, son las penas y fatigas que su adquisición supone. Lo que realmente vale para el que ya la ha adquirido y desea disponer de ella [...] son las penas y fatigas de que lo librarán.” (*Investigación sobre la naturaleza y causa de la riqueza de las naciones*, F.C.E. 9ª reimpresión de la 2ª edición en español, México 1997. Pag. 31). Por su parte D. Ricardo afirma: “La utilidad no es la medida del valor en cambio, aunque es absolutamente esencial para éste.” (*Principios de economía política y tributación*, F.C.E. 1ª reimpresión de la 1ª edición en español, Colombia 1993. Pag. 9) y más adelante dirá de Smith: “[...] quien definió de manera tan precisa la fuente originaria del valor en cambio – y que con tanta constancia iba a sostener que todas las cosas se vuelven más o menos valiosas en proporción a que se empleara más o menos trabajo en su producción – [...]” (Ibid, pag.11). Finalmente C. Marx apunta: “El *valor* (el real valor de cambio) de todas



las mercancías (incluso el trabajo) está determinado por sus costos de producción, en otros términos, por el tiempo de trabajo requerido para su producción” (Elementos fundamentales para la crítica de la economía política – borrador – 1857/1858, Siglo XXI Argentina Editores, 4ª edición, Argentina 1973. Pag. 61).

- <sup>4</sup> El término *utilidad marginal* no fue utilizado por ninguno de los fundadores de este enfoque, sino por el economista inglés W. Smart en 1893 quien tradujo el término germano *Grenznutzen* utilizado por Wieser. (Véase F.H. Knight, “La economía de la utilidad marginal”. En: El pensamiento económico de Aristóteles a Marshall. Editorial Tecnos, Madrid 1971).
- <sup>5</sup> Las referencias en el presente artículo se basan en la 2ª edición en español publicada en 1954 por el Fondo de Cultura Económica. En 1956 el profesor Hicks publica la primera edición en inglés de “A revision of demand theory”, de la cual el Fondo de Cultura Económica publica una primera edición en español “Revisión de la Teoría de la Demanda” en 1958. En esta ocasión el autor pretende justificar el uso de los desarrollos matemáticos a los principios explicativos elaborados en 1939, pero a la luz de los aportes de la econometría.
- <sup>6</sup> En el capítulo I de la Parte I, el profesor Hicks inaugura el conjunto de notas al pie con la siguiente afirmación: “Mi experiencia personal ha sido de que con el progreso de la investigación mi admiración por la teoría de Marshall no ha hecho sino aumentar; espero que al lector le pasará lo mismo.” (Hicks 1954, p. 23).
- <sup>7</sup> Vilfredo-Frederigo-Samaso marqués de Pareto (1848 – 1923), fue un ingeniero italiano que estudió sociología y ocupó la cátedra de economía que dejó vacante L. Walras en la Universidad de Lausana en 1893. Se interesó por la economía estudiando la obra de Maffeo Pantaleoni, a través de la cual llegó a Walras y de quien se convertiría en su más fiel estudioso y continuador. Aunque la obra de Pareto es trascendental en varios aspectos teóricos y prácticos, es de especial interés la forma como reduce la utilidad que reporta el consumo de bienes a un esquema de curvas de indiferencia ordenadas en proporción al grado de utilidad. En el apartado 58 del capítulo III de su obra *Manual de Economía Política*, Pareto introduce la noción de curvas de indiferencia como curvas de nivel, al decir:

El lector que ha usado mapas topográficos sabe que se tiene el hábito de describir ciertas curvas que representan los puntos que tienen, para una misma curva, la misma altura sobre el nivel del mar, u otro nivel cualquiera.

Las curvas de la figura 5 [se refiere a un mapa de curvas de indiferencia] son curvas de nivel con tal que se considere que los indicios de ophemelite [con este término se designa a la utilidad] representan la altura sobre el plano [...] de los puntos de una colina. (*Manual de Economía Política*, Editorial Atalaya, Argentina 1945. p. 131).

Esta forma de presentar las curvas de indiferencia, tan común en los cursos y textos de microeconomía, se debe a la caracterización dada por Pareto en el apartado 55 en el cual dice que si entre dos combinaciones de la forma  $(x,y,...)$  diferentes, la elección es indiferente, a la utilidad (*ophemelite*) que ellas reportan les corresponde el mismo *indicio*; pero que si ellas reportan una utilidad diferente, entonces a cada una le corresponde un *indicio* diferente, siendo la de mayor *indicio* la que se prefiere:

Damos a cada una de esas combinaciones un indicio, que debe satisfacer a las dos condiciones siguientes, y que, por lo demás, sigue siendo arbitraria: 1° Dos combinaciones entre las cuales la elección es indiferente, debiendo tener el mismo indicio; 2° De dos combinaciones, aquella que se prefiere a la otra, debe tener un indicio más grande.

Tenemos así los INDICIOS DE OPHEMELITE, o del placer que siente el individuo cuando goza de la combinación que corresponde a un indicio dado. (Ibid, p. 130).

El término *indicio* utilizado por Pareto es simplemente un índice que refleja la ordenación de menor a mayor utilidad, asociado a las curvas de indiferencia en el plano.

Por lo demás, se dirá que este aspecto facilita tremendamente el razonamiento del problema de la toma de decisiones por parte del agente consumidor, siempre que para elegir una canasta de consumo que maximice el resultado obtenido, no se requiere conocer el impacto cuantitativo, sino simplemente el reconocimiento de que el resultado es mejor (o peor), para lo cual no se requiere del dato exacto, sino del orden. Con este argumento Pareto sustituirá el enfoque cuantitativo (cardinal) de los primeros neoclásicos por el enfoque ordinal de la utilidad. El profesor Hicks en *Valor y capital* avala la conveniencia de este enfoque al decir: “El concepto cuantitativo de la utilidad no es necesario para explicar fenómenos de mercado. Por consiguiente, siguiendo el principio de la navaja de Occam, es mejor pasarse sin él.” (Hicks, p. 30). Una vez incorpora la caracterización paretiana, el profesor Hicks se torna evidentemente marshalliano, e inicia la exposición de los fundamentos de la teoría neoclásica de la demanda.

- <sup>8</sup> La obra del profesor Hicks se compone de cuatro partes y un apéndice matemático. Según palabras del propio autor el plan de la obra es como sigue:

La Parte I se ocupa de la teoría del valor subjetivo “necesidades y su satisfacción” – que es el mismo tema del libro III de los Principios de Marshall. [...] En la Parte II se utilizan los resultados de nuestra teoría para rehacer el análisis del equilibrio general de Walras y Pareto. [...] La Parte III se ocupa de las bases de la economía dinámica. [...] La Parte IV trata del funcionamiento de un sistema dinámico. (Hicks, 1954, pp 17 y 18).

El capítulo II de la Parte I titulado “La ley de la demanda de los consumidores”, es la exposición de los fundamentos de la Ley de la Demanda; a tal fin el autor ha clarificado en el capítulo I (titulado “Utilidad y Preferencia”) los conceptos básicos como utilidad marginal, condiciones de máximo, curvas de indiferencia, funciones y formas de las mismas. Luego de este recuento y la presentación de una terminología adecuada a sus fines, Hicks expone:

1°. Los efectos que sobre el consumo tiene el cambio en los ingresos, de lo cual presenta la curva Ingreso – Consumo.

2°. Los efectos que sobre el consumo tiene el cambio de los precios, de lo cual presenta la curva Precio – Consumo.

Luego concluye diciendo:

Una baja en el precio de una mercancía influye en realidad sobre la demanda de ella en dos formas diferentes. Por un lado, coloca al consumidor en mejor situación, aumenta

su “ingreso real” [efecto ingreso], y su efecto a este respecto es igual al que produce un aumento del ingreso. Por otro lado, altera los precios relativos y, por consiguiente, aparte del cambio en el ingreso real, habrá una tendencia a substituir otras mercancías por aquella cuyo precio ha bajado [efecto sustitución]. La suma de estas dos tendencias es el efecto total sobre la demanda. (Hicks, 1954. P. 44)

- <sup>9</sup> En la Irlanda de mediados del siglo XIX se dio la “enfermedad de la patata” lo cual aunado al exagerado crecimiento de la población (la población se duplicó en un poco menos de 50 años), terminó por aumentar desmesuradamente el precio de este tubérculo y un economista inglés, Robert Giffen, registró los datos de consumo de este bien descubriendo, paradójicamente, un incremento en las cantidades consumidas. En los primeros años del siglo XX algunos economistas recurrieron a los datos de Giffen para desafiar lo que hasta entonces se llamaba la “Ley de la Demanda”. A los bienes que se comportan como las patatas irlandesas del siglo XIX se les llama, desde entonces, “bienes Giffen” y se reconocen porque:

1°. Presentan características de bienes inferiores o de calidad técnica y comercial muy precarias.

2°. Participan en un alto porcentaje en los presupuestos de consumo.

- <sup>10</sup> Nacido en 1845 y natural de Irlanda.

- <sup>11</sup> La casa editorial PIRÁMIDE publicó en el año 2000, bajo la dirección de Carlos Rodríguez Braun una edición de *Psicología Matemática* de F. Y. Edgeworth, y de la cual se hace uso en el presente artículo.

- <sup>12</sup> Debe aclararse que esta presentación es novedosa en el contexto histórico, pues hasta Edgeworth, la representación formal de la utilidad seguía el patrón aditivo ( $P=F(x) + G(y)$ ). Stigler (1971, p. 634) escribirá al respecto: “Edgeworth destruyó esta agradable simplicidad y especificidad [...] Parece que los cambios obedecieron, por una parte a que esta expresión resultaba más general en el orden matemático, y por otra, porque era congruente con la observación introspectiva”.

- <sup>13</sup> En este punto resulta interesante destacar el enfrentamiento que tuvo lugar entre Edgeworth y Pareto, puesto que a pesar de la similitud de sus enfoques y herramientas, ocurrió que en la publicación de sus pensamientos, los que se relacionan con la economía por lo menos, Edgeworth se adelantó a Pareto, y mientras el primero se desempeñó como editor del *Economic Journal* desde 1891 (cargo en el que lo sucedió Keynes a su muerte en 1926), nunca dio espacio, en tan prestigiosa publicación, a los planteamientos de su contemporáneo Pareto como no fuera para cuestionarlos; el descontento del eminente erudito se deja entrever en una carta que dirige a Maffeo Pantaleoni en la cual expresa:

Veo que Edgeworth no da señales de escribir en su *Journal* sobre mi libro. Estoy seguro de que no quiere decir nada sobre él. No le enviaré el segundo. Puede irse al diablo. [...] Es un auténtico jesuita, y en vez de ocuparse con su propia ciencia emprende una sorda guerra contra Walras y contra mí. (Esta transcripción es tomada del “Estudio Preliminar” de Manuel de Jesús González, que sirve de introducción a la edición de *Psicología*

*Matemática* de la casa editorial PIRÁMIDE. Para profundizar en este aspecto de la vida de Pareto puede consultarse la biografía que elaboró el profesor E. Schneider y de la cual aparece una traducción en una colección de trabajos bajo el título *Economía Política y Economía de la Empresa*, publicada por la casa española SAGITARIO S.A. en 1968. La referida biografía se compone de dos artículos que aparecen al final del capítulo III del libro referenciado y en ellos se encuentra una buena colección de cartas entre Pareto, Walras y Pantaleóni).

Lo curioso es que el más famoso de los instrumentos gráficos de la microeconomía, la “caja de Edgeworth”, no fue dibujada por éste, sino por Pareto, claro que Edgeworth la describe con un tono de indiscutible genialidad en su obra al explicar la apariencia de las curvas de contrato:

Esto podría ilustrarse [dice] por medio de dos esferas, cada una de las cuales tiene el plano del papel como un plano diametral. Es fácil ver que la curva de contrato es la línea que une los centros. Suponiendo que la distancia entre los centros es menor que el menor de los radios, parte de la curva de contrato es *impura*. [...]. Pero entre los centros la curva de contrato es *pura*; [...]. (*Psicología Matemática*, op – cit, p67).

- <sup>14</sup> Según se lee en Manuel de Jesús González (ibid, p 13), Edgeworth fue inducido a estudiar la economía política de su tiempo por sugerencia de Jevons, para quien siempre demostró un especial afecto; no puede extenderse este testimonio a Walras según se desprende de lo declarado por Pareto en la nota al pie N° 13.
- <sup>15</sup> JEVONS, W. S. La teoría de la Economía Política, Colección CLÁSICOS DE LA ECONOMÍA, España, 1998.
- <sup>16</sup> Ibid, p. 67.
- <sup>17</sup> Recuérdese que la primera edición de *La Teoría de la Economía Política* de Jevons se da en 1871.
- <sup>18</sup> Jevons, op – cit. p. 17.
- <sup>19</sup> Jevons, ibid, p.75.
- <sup>20</sup> Ibid, p.p. 67-68.
- <sup>21</sup> Ibid, p.86.
- <sup>22</sup> Ibid, p.86.
- <sup>23</sup> Ver, ibid, p. 87. La forma gráfica anticipa claramente la forma convencional de las curvas de utilidad marginal con pendiente negativa.
- <sup>24</sup> Ibid, p. 93.
- <sup>25</sup> Ibid, p.100.
- <sup>26</sup> El autor del presente artículo cree haber encontrado cierta ligereza en la definición que Jevons da del Grado de Utilidad al decir: “*El grado de utilidad es, en el lenguaje matemático, el cociente diferencial de u considerado como función de x*”, y acto seguido define el Grado

Final de Utilidad como “(...) el grado de utilidad de la última adición” (p. 102). Con lo anterior se crea ciertamente confusión acerca de lo qué es y la forma de calcular ambos conceptos. pues parece que son una y la misma cosa, y al mismo tiempo, que uno es consecuencia del otro. La ligereza a la que se alude en este llamado de atención es en cierto sentido grave cuando se tiene en cuenta que sobre tal concepto Jevons descarga una gran responsabilidad.

- <sup>27</sup> Jevons, op – cit, p. 108.
- <sup>28</sup> La referida ley, aunque es muy simple, es de crucial importancia para formular la causación de intercambios a través de los valores de cambio. Se puede explicar esta ley simplemente como la condición de que en un escenario de mercado la tasa a la cual se intercambian dos mercancías es la misma al margen de las cantidades o porciones intercambiadas. Así entonces, si la tasa de intercambio entre  $x$  e  $y$  está definida por  $x/y$ , cualesquiera porciones  $dx$  y  $dy$  deben guardar la misma proporción de tal forma que  $(dx/dy) = (x/y)$ , o lo que es igual,  $dx=(x/y)dy$ . Véase al respecto *ibid*, p.135.
- <sup>29</sup> Véase a este respecto, Jevons p.136.
- <sup>30</sup> En la historia de la ciencia no se ha escrito aún la verdadera historiografía de este instrumento, sin embargo el autor del presente artículo se ha esforzado en hacer un recuento (de carácter personal) acerca del referido concepto, y sobre esa base se han formulado las afirmaciones que componen este artículo.
- <sup>31</sup> Si bien Jevons y Edgeworth elaboraron expresiones explicativas de la demanda, es a partir de la introducción de los métodos matemáticos que se la extrae del campo especulativo en el que todos o ninguno tiene la razón.
- <sup>32</sup> Así lo afirma E. T. Bell en su obra “Historia de las matemáticas”. En esta parte del artículo se utiliza la 1ª edición en español publicada por el Fondo de Cultura Económica, México 1949. (Véase el capítulo XVI)
- <sup>33</sup> *Ibid*, p.380.
- <sup>34</sup> Contemporáneo e íntimo amigo de Euler y D’Alambert, J. L. Lagrange, de cuna francesa, nació en 1736 y murió en 1813 plácidamente, pero padeciendo una rara enfermedad espiritual que lo arrebató tempranamente del mundo de las innovaciones matemáticas. Como la mayoría de los matemáticos notables, manifestó a muy corta edad gran facilidad para los razonamientos matemáticos y siendo muy joven (a los 19 años) se desempeñó como maestro de un grupo de oficiales de marina en Turín. Fue llamado por Federico II en 1766 para integrar la academia de Berlín que dirigía Euler. En 1787 se instala en París convirtiéndose en el favorito de Napoleón y el pueblo francés que no dudó en respetar su posición durante los años de la revolución.
- <sup>35</sup> Esta transcripción es tomada textual de E. T. Bell, op – cit, p.376.
- <sup>36</sup> Este problema resulta de plantear la siguiente pregunta: cuál es, de todas las figuras geométricas planas que pueden dibujarse con una cuerda de longitud dada, aquella que encierra la mayor área. La respuesta, intuitivamente cierta, es el círculo; lo que no resulta tan intuitivo es la demostración y aunque la formulación del problema es antiquísima, fue necesario la invención del cálculo de variaciones para dar una demostración científicamente aceptable.

<sup>37</sup> En *The Economic Journal* N° 90 de 1980, el profesor John Creedy publicó un artículo “The early use of Lagrange multipliers in economics”, en el cual se sugiere que en la obra *New and Old Methods of Ethics* de F. Y. Edgeworth, publicada en 1877 se encuentra el principio de la tradición lagrangiana en economía, no obstante, señala el mismo Creedy (en la nota al pie n° 2, p. 373, del artículo referenciado), y de una forma bastante sutil, que bien puede ser que hallan existido otros pioneros como H. Westergaard, quien escribe a Jevons una carta (en 1878) en la cual expone las bondades que tiene el uso de las reglas sencillas del cálculo diferencial, sin modificar el fondo de sus conclusiones. Si a lo anterior se suma que Westergaard estudió el cálculo de variaciones en el mismo texto referenciado por Edgeworth constantemente (se refiere a *Researches on calculos of variations* escrito por un autor de apellido Todhunter y publicado en 1871), entonces debe considerarse que este autor de origen danés, también debe tenerse en cuenta al momento de cerrar el debate sobre los pioneros de la tradición lagrangiana. Ahora bien, en 1986 y con referencia al artículo de Creedy (1980), apoyándose en la publicación de la carta (1977) que Westergaard escribió a Jevons en 1878, el profesor Thorkild Davidsen escribió un artículo titulado “Westergaard, Edgeworth and the use of Lagrange multipliers in economics” en la edición n° 96 de septiembre de 1986 del *The Economic Journal*, en la cual resalta que Westergaard, un año antes que Edgeworth, 1876, había publicado en el *Danish Journal* un artículo titulado “Tidsskrift for Matematik”, en el cual expone con bastante soltura, claridad y elegancia la aplicación de los multiplicadores de Lagrange en la solución del problema de maximización de la utilidad. En estas circunstancias, el debate sobre el primero en incorporar la técnica de la optimización restringida, se resuelve a favor del economista danés. En este debate también se debe incorporar una carta que recibió Walras de H. Amstein en 1877 y en la cual llama la atención en el mismo sentido que lo hizo Westergaard con Jevons un año más tarde (1878). No obstante todo lo anterior, debe tenerse en cuenta que no fueron, ni Westergaard ni Amstein, responsables de la construcción de sistemas teóricos explicativos de las economías de mercado, por tanto y en beneficio de la sensatez, debe considerarse a Edgeworth como el pionero de la tradición lagrangiana en economía, no por ser el primero, sino por el impacto que ha tenido la obra de Edgeworth sobre la historiografía del pensamiento económico.

<sup>38</sup> El algoritmo lagrangiano para el caso de dos bienes (x, y) sería como sigue: sea  $U=f(x,y)$  la utilidad que recibe un individuo del consumo de los bienes x e y; sea, además  $g(x,y;P_x,P_y)=M$  el presupuesto del cual dispone el individuo para consumir los bienes x e y, tal que  $M=P_xX + P_yY$ . El lagrangiano L será  $L=f(x,y) + rg(x,y;P_x,P_y)$ . Las condiciones de primer orden son:

$$(dL/dx)=0: (df/dx) - r(dg/dx)=0 \quad (1)$$

$$(dL/dy)=0: (df/dy) - r(dg/dy)=0 \quad (2)$$

$$(dL/dr)=0: g(x,y;P_x,P_y)=0 \quad (3)$$

$$\text{De (2): } r = (df/dy)/(dg/dy) \quad (4)$$

Al sustituir (4) en (1):

$$(df/dx) - (df/dy)((dg/dx)/(dg/dy))=0 \quad (5).$$

Siendo  $(df/dx)=U_{mgx}$  y  $(df/dy)=U_{mgy}$ , las utilidades marginales de x e y, respectivamente, la expresión (5) conduce a:

$$U_{mgy}=U_{mgx}(P_y/P_x) \quad (7).$$

De (7) se formula la relación de sustitución óptima entre x e y (Hicks llamó a esta expresión Tasa o Relación Marginal de Sustitución) como  $y=h(x,P_x,P_y)$  que al ser reemplazada en  $g(x,y;P_x,P_y)=M$ , se obtiene (por manipulación algebraica)  $x=D(M,P_x,P_y)$ . Esta última expresión es la versión neoclásica de la demanda.

Según se ha podido rastrear, la incorporación de la estructura de presupuesto  $g(x,y;P_x,P_y)=M$  en el problema de optimización, se debe al economista norteamericano Irving Fisher, quien desarrolla el problema en su libro *Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices*, publicado en 1892. Por desgracia, a la fecha, el autor del presente artículo no ha tenido acceso a este libro, pues al parecer sólo se han publicado dos ediciones del mismo, una en 1892, y otra en 1965, y ninguna ha llegado a nuestro país, además que no se ha encontrado ninguna edición virtual.

- <sup>39</sup> En los Apéndices a los capítulos I, y II y III de *Valor y Capital* del profesor Hicks, se encuentra una amplia presentación de la forma cómo se obtiene esta expresión de la demanda, así como un análisis de los efectos de los cambios en el ingreso y los precios.
- <sup>40</sup> Con relación al desarrollo de  $(dx/dP_x)$ , el profesor Hicks dice: “Esta ecuación, que debemos a Slutsky, puede ser considerada como la Ecuación Fundamental de la Teoría del Valor” (op-cit, p. 335).
- <sup>41</sup> Hicks, ibid p. 31.
- <sup>42</sup> Para ilustrar y dar fuerza a esta afirmación, el lector inquieto que desee profundizar en esta línea de pensamiento puede indagar acerca de la historia del desarrollo de los métodos de Programación Lineal, pues ellos son una expresión de las técnicas de optimización restringida que se ha nutrido ampliamente del trabajo de eminentes matemáticos como Dantzing, Kantorovich, y de economistas tan notables como W. Leontief y G. Stigler, en cuyos trabajos aparece nuevamente el algoritmo lagrangiano como núcleo metodológico de gran trascendencia.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alexandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros. La matemática: su contenido, métodos y significado. Alianza Editorial, Madrid 1974.
- Bell, E. T. Historia de las matemáticas. FCE, México 1949.
- Creedy, J. The early use of Lagrange multipliers in economics. En: The Economic Journal, N° 90 de junio de 1980.
- Courant y Robbins. Qué es la matemática? Editorial AGUILAR, 1ª reimpresión de la 5ª edición, España 1971.
- Davidson, Th. Westergaard, Edgeworth and the use of Lagrange multipliers in economics. En: The Economic Journal, N° 96 de septiembre de 1986.
- Edgeworth, F. Y. Psicología matemática. Editorial PIRÁMIDE, España 1998.
- Ekelund, J. R. y Hébert, R. F. Historia de la teoría económica y de su método. McGraw-Hill, 3ª edición, España 1997.
- Giraldo, G. y Valderrama, D. Apariencia y realidad en la objetividad de la economía positiva. En: Lecturas de Economía V-II, N° 1, Departamento de Economía, Universidad de Antioquia, Medellín 1981.
- Hadley, G. Probabilidad y estadística: una introducción a la teoría de la decisión. FCE, 1ª reimpresión de la 1ª edición en español, México 1979.
- Hayek, F. A. La tendencia del pensamiento económico: sobre economistas e historia económica. UNIÓN EDITORIAL, 1991.
- Hicks, J. R. Revisión de la teoría de la demanda. McGraw-Hill, México 1958.
- \_\_\_\_\_ Valor y Capital. FCE, México 1954.
- Hirschman, A. O. Interés privado y acción pública. FCE, 1ª edición en español, México 1986.
- Ibáñez, F. M. El enfoque microeconómico: marginalismo y neoclásicos. En: Ensayos sobre Pensamiento Económico. McGraw-Hill, España 1993.
- Jevons, W. S. La teoría de la economía política. Editorial PIRÁMIDE, España 1998.
- Kauder, E. Génesis de la teoría de la utilidad marginal desde Aristóteles hasta finales del siglo XVIII. En: Spengler y Allen, El pensamiento económico de Aristóteles a Marshall. Editorial Tecnos, Madrid 1971.
- Knigh, F. La economía de la utilidad marginal. En: Spengler y Allen, El pensamiento económico de Aristóteles a Marshall. Editorial Tecnos, Madrid 1971.
- Landreth, H. y Collander, D. Historia del pensamiento económico. CECSA, 1ª edición en español, México 2000.



- Larson, R. E. Y Hostetler, R. P. Cálculo y geometría analítica. McGraw-Hill, 3ª edición, España 1988.
- Marx, K. Elementos fundamentales para la crítica de la economía política - borrador - 1857/1858. Siglo XXI editores, Argentina 1973.
- Menger, K. Qué es el cálculo de variaciones y cuáles son sus aplicaciones. En: Newman, J. R. Sigma, el mundo de las matemáticas. Ediciones GRIJALBO, 10ª edición, España 1985.
- Pareto, V. Manual de economía política. Editorial ATALAYA, Argentina 1945.
- Ricardo, D. Principios de economía política y tributación. FCE, 1ª reimpresión de la 1ª edición en español, Colombia 1993.
- Rima, I. H. El desarrollo del análisis económico. Editorial IRWIN, 1ª edición en español de la 5ª edición en inglés, España 1995.
- Schneider, E. Economía política y economía de la empresa. Editorial SAGITARIO S.A., España 1968.
- Shumpeter, J. A. Historia del análisis económico. Ediciones Ariel, España 1971.
- Shumpeter, J. A. y Crum, W. L. Elementos de matemáticas para economistas y estadígrafos. FCE, 2ª edición en español, México 1959.
- Simmons, G. F. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. McGraw-Hill, México 1977.
- Smith, A. Investigación sobre la naturaleza y causa de la riqueza de las naciones. FCE, 9ª reimpresión de la 2ª edición en español, México 1997.
- Stigler, G. El desarrollo de la teoría de la utilidad. En: Spengler y Allen, El pensamiento económico de Aristóteles a Marshall. Editorial Tecnos, Madrid 1971.
- Walras, L. M. Elementos de economía política pura. Alianza Editorial, Argentina 1987.
- Zeidler. Nonlinear functional and its applications. Springer-Verlag, Nueva York 1985.

---