DISTRIBUCION DE POISSON EN SIMULACION

MILLER RODRIGUEZ RODRIGUEZ

El contenido de este ensayo esta redactado por el estudiante Miller Rodriguez Rodriguez bajo la tutoría del docente Ing. Ramiro Polanco pertenecientes a la escuela de ingenierías de la Corporación Universitaria del Meta, el autor reside en la ciudad de Cumaral Meta (Colombia) en la calle 13 # 12-31(Los Moriches) con dirección de corre electrónico milleradrian31@hotmail.com.

Es importante para el completo desarrollo de nuestra carrera (ingeniería industrial) conocer las herramientas que nos van a ayudar en el mundo laboral, tales herramientas son por ejemplo la simulación de problemas cotidianos mediante modelos matemáticos. Teniendo en cuenta lo anterior vamos a resaltar la importancia de la simulación. Desde la aparición de los primeros trabajos a mediados de este siglo, la técnica de simulación ha ocupado un lugar de privilegio entre las herramientas de la investigación operativa.

Sin embargo, hasta bien entrados los años ochenta, ese interés en la investigación y el entrenamiento académico no pudo encontrar un correlato en el ámbito empresario. Es que aún cuando se reconocían los enormes atractivos de la simulación como soporte a la toma de decisiones, las dificultades en la aplicación de esta técnica a la vida real de las compañías (modelos costosos de construir y validar, muy poco flexibles frente a condiciones cada día más inestables, y habitualmente concebidos y manejados "por expertos", no por los reales operadores del sistema) atentaban contra su efectiva aplicación a la problemática de las empresas.

Con el advenimiento de la "revolución informática" iniciada a fines de la década pasada, y la consolidación de las plataformas gráficas (Windows, Macintosh), la simulación ha comenzado a recuperar el terreno perdido, constituyendo hoy una herramienta imprescindible en áreas tales como la investigación y el desarrollo de nuevos productos, la ingeniería ambiental y otros.

Es nuestro interés presentar aquí la aplicación de estas técnicas a las operaciones logísticas, un ámbito donde las ventajas de la simulación han sido particular y tradicionalmente reconocidas, pero en las que existe todavía (en especial en nuestro país) un enorme camino a recorrer.

Antes de exponer algunos ejemplos de aplicaciones concretas en operaciones logísticas, sin embargo, vale la pena detenerse un momento a repasar brevemente los fundamentos y las ventajas de la simulación como metodología de análisis de decisiones y a reconocer los elementos principales de un modelo de simulación desarrollado con el apoyo de herramientas informáticas diseñadas en este nuevo ambiente.

La simulación como metodología de análisis

Aun cuando no las reconozcamos bajo este nombre, distintas formas de "simulación" son habitualmente conocidas: desde los simuladores de vuelo o de conducción de automóviles hasta las proyecciones de flujos de fondos constituyen ejemplos de modelos que emulan sistemas reales.

Es que la simulación, tal como la definiera Bobillier en 1976, constituye "una técnica para la construcción y ejecución de un modelo de un sistema real, con la finalidad de estudiar el comportamiento de éste, sin romper su entorno". De esta manera, el modelo es susceptible de ser sometido a las condiciones de incertidumbre propias de cualquier sistema operativo real, determinando su reacción y comportamiento,

sin riesgo de que esa intervención suponga peligro o interferencia con la realidad.
Aplicada a la realidad empresaria, la simulación aparece entonces como una herramienta de suma utilidad a la hora de testear hipótesis de trabajo antes de su desarrollo e implementación, lo que permite aspirar a drásticas economías de dinero, de tiempo y de esfuerzo. Nuestra experiencia demuestra que la modelización de un sistema operativo permite, además, profundizar notablemente la comprensión del mismo, a partir de la explicitación de las relaciones entre los distintos elementos contenidos en él, y del reconocimiento de las variables de mayor impacto en su desempeño.
El correcto desarrollo y aplicación de un modelo de simulación supone un proceso habitualmente estructurado en cuatro pasos

• En primer término, la construcción de un modelo conceptual representativo del sistema real. Este proceso de abstracción es clave para asegurar no sólo la efectividad de la modelización -esto es, que los comportamientos se ajusten a los de la vida real-, sino también la eficiencia en el compromiso de recursos para su desarrollo. En este sentido, un buen modelo no es aquel que intenta copiar integralmente la realidad, sino aquel que reproduce sólo la parte relevante del sistema bajo análisis.
• en segundo lugar, este modelo conceptual deberá ser transformado en un programa computacional que soporte la operación del mismo. Es en esta etapa de traducción del modelo a un lenguaje de programación donde las nuevas herramientas informáticas han tenido un impacto crítico, simplificando y reduciendo más de cinco veces el tiempo requerido para llevar adelante esta tarea, que solía ocupar entre el sesenta y el ochenta por ciento del timming total de un proyecto de modelización.
• Esta reducción de los tiempos de programación ha permitido destinar el tiempo a la tarea de verdadero valor en este proceso: el análisis de los resultados de la simulación, sometiendo al sistema modelizado a diferentes condiciones operativas y proponiendo distintas estrategias de despliegue de recurso, midiendo su desempeño de manera objetiva.
• Finalmente, y en particular en proyectos que supongan niveles de riesgo o de compromiso de recursos especialmente relevantes, la validación del modelo constituye un punto de vital importancia. El desarrollo de experiencias pilotos ad hoc, o la aplicación al modelo de datos históricos

Ahora que nos dice la literatura acerca de la distribución de poison : En teoría de probabilidad y estadística, la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta. Expresa la probabilidad de un número k de eventos ocurriendo en un tiempo fijo si estos eventos ocurren con una frecuencia media conocida y son independientes del tiempo discurrido desde el último evento. Fue descubierta por Siméon-Denis Poisson, que la dio a conocer en 1838 en su trabajo Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile (Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles). La función de densidad de la distribución de Poisson es

$$f(k;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

Donde λ es un parámetro positivo que representa la frecuencia esperada del fenómeno modelado por la distribución. Tanto el valor esperado como la varianza de una variable aleatoria con distribución de Poisson son iguales a λ. Los momentos de orden superior son polinomios de Touchard en λ cuyos coeficientes tienen una interpretación combinatoria. De hecho, cuando el valor esperado de la distribución de Poisson es 1, entonces según la fórmula de Dobinski, el n-ésimo momento iguala al número de particiones de tamaño n. La moda de una variable aleatoria de distribución de Poisson con un λ no entero es igual a $\lfloor \lambda \rfloor$, el mayor de los enteros menores que λ (los símbolos $\lfloor\rfloor$ representan la función parte entera). Cuando λ es un entero positivo, las modas son λ y $\lambda - 1$. La función generadora de momentos de la distribución de Poisson con valor esperado λ es

$$\mathrm{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} f(k;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Las variables aleatorias de Poisson tienen la propiedad de ser infinitamente divisibles. La divergencia Kullback-Leibler desde una variable aleatoria de Poisson de parámetro λ_0 a otra de parámetro λ es

$$D_{\mathrm{KL}}(\lambda || \lambda_0) = \lambda \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} + \frac{\lambda_0}{\lambda} \log \frac{\lambda_0}{\lambda}\right).$$

La distribución de Poisson, se aplica a varios fenómenos discretos de la naturaleza (esto es, aquellos fenómenos que ocurren 0, 1, 2, 3, ... veces durante un periodo definido de tiempo o en un área determinada) cuando la probabilidad de ocurrencia del fenómeno es constante en el tiempo o el espacio. Ejemplos de estos eventos que pueden ser modelados por la distribución de Poisson incluyen:

El número de autos que pasan a través de un ciertopuntoenunaruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.

El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una única página.

El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.

El número de servidores web accedidos por minuto.

El número de animales muertos encontrados por unidad de longitud de ruta.

El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.

El número de núcleos atómicos inestables que decayeron en un determinado periodo de tiempo en una porción de sustancia radiactiva. La radiactividad de la sustancia se debilitará con el tiempo, por lo tanto el tiempo total del intervalo usado en el modelo debe ser significativamente menor que la vida media de la sustancia.

El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.

La distribución de receptores visuales en la retina del ojo humano.

La inventiva de un inventor a través de su carrera. La distribución de Poisson, según hemos señalado, se refiere a ciertos procesos que pueden ser descritos con una variable aleatoria discreta. La letra X suele representar esa variable y puede además asumir valores enteros (0,1,2,3 etc..) . Utilizamos la letra X mayúscula para representar la variable aleatoria y la x minúscula para designar un valor específico que puede asumir la X mayúscula. La probabilidad de exactamente x ocurrencias en una distribución de Poisson se calcula mediante la fórmula:

P(x) = l x * e-l / x!

l x = Lambda (número medio de ocurrencias por intervalo de tiempo) elevada a la potencia x.

e-l = e= 2.71828 elevado a la potencia de lambda negativa.

x! = x factorial.

Ejemplo: Supóngase que estamos investigando la seguridad de un crucero muy peligroso. Los archivos de la policía indican una media de cinco accidentes por mes en él. El número de accidentes está distribuido conforme a la distribución de Poisson, y la división de seguridad en carreteras quiere calcular la probabilidad de exactamente 0, 1, 2,3 y 4 accidentes en un mes determinado.

Aplicando la fórmula anterior:

P(0) = (5)0 (e-5) /0! = 0.00674

P(1) = (5)1 (e-5) /1! = 0.03370

P(2) = (5)2 (e-5) /2! = 0.08425

P(3) = (5)3 (e-5) /3! = 0.14042
P(4) = (5)4 (e-5) /4! = 0.17552
Para saber cual es la probabilidad en 3 o menos, sumaremos las probabilidades de 0,1,2,3 lo que será igual a :
P(0) = 0.00674
P(1) = 0.03370
P(2) = 0.08425
P(3) = 0.14042
P(3 o menos) = 0.26511
Dado que la probabilidad de que haya 3 o menos accidentes es de 0.26511 entonces la probabilidad de que ocurran más de tres debe ser = 1 –0.26511 = 0.73489.
La distribución de Poisson como una aproximación a la distribución binomial.
Algunas veces, si se desea evitar el tedioso trabajo de calcular las distribuciones binomiales, se puede usar a cambio la de Poisson, pero debe cumplir con ciertas condiciones como :
n=>20
p=<0.05
En los casos en que se satisfacen tales condiciones, podemos sustituir la media de la distribución binomial en lugar de la media de la distribución de Poisson de modo que la fórmula quedaría así:
P(x) = (np) X * e-np /x!
Teniendo en cuenta todo lo anteriormente dicho podemos llegar a la conclusión que si ponemos en práctica los conocimientos aprendidos en la academia serán de gran provecho en nuestra vida laboral

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE POISSON EN SIMULACION

En una universidad se ha observado que el 60% de los estudiantes que se
Matriculan lo hacen en una carrera de Ciencias, mientras que el otro 40% lo hacen en carreras de Humanidades. Si un determinado día se realizan
20 matriculas, calcular la probabilidad de que:
1. haya igual número de matriculas en Ciencias y en Humanidades;
2. el número de matriculas en Ciencias sea menor que en Humanidades;
3. haya al menos 8 matriculas en Ciencias;
4. no haya mas de 12 matriculas en Ciencias.
5. Si las cinco primeras matriculas son de Humanidades, calcular la probabilidad de que:
a) en total haya igual número de matriculas en Ciencias y en Humanidades;
b) en total haya al menos 6 en Ciencias más que en Humanidades.
Solución
Sea » una variable aleatoria que mide el número de matriculas en Humanidades de un total de 20 matriculas. Suponiendo que los estudiantes eligen su carrera de forma independiente entre ellos, y teniendo presente (según el enunciado) que la probabilidad de que alguien se matricule en
Humanidades es 1¡0;6 = 0;4, se tiene que esta variable es una binomial de parámetros n = 20 y p = 0;4, siendo:
P (» = k) = µ20
k ¶¢ 0;4k ¢ (1 ¡ 0;4)20¡k ; para todo k = 0; : : : ; 20:
1. La probabilidad de que haya igual número de matriculas es:
P (» = 10) = µ20
10¶¢ 0;410 ¢ (1 ¡ 0;4)20¡10 = 0;11714:
2. Para calcular la probabilidad de que el numero de matriculas en
Ciencias sea menor que el número de matriculas en Humanidades debe obtenerse:
P (» > 10) = 1 ¡ F» (10) = 1 ¡ 0;8725 = 0;1275:
3. La probabilidad de que haya al menos 8 matriculas en Ciencias es equivalente a la probabilidad de que haya como máximo 12 matriculas en Humanidades. Por lo tanto:
P (» · 12) = F» (12) = 0; 9790
4. La probabilidad de que no haya más de 12 matriculas en Ciencias es:
P (» ¸ 8) = 1 ¡ F» (7) = 1 ¡ 0;4159 = 0;5851:
5. Nótese que las matriculas son independientes entre sí, por lo que si las cinco

primeras son en Humanidades, podemos definir una nueva variable ´, también binomial, pero con parámetros n = 20 ¡5 = 15 y p = 0;4, que determina el número de matriculas en Humanidades
de un total de 15 matriculas. De esta forma:
a) La probabilidad de que en total haya igual numero de matriculasen Ciencias que de matriculas en Humanidades es:
P (´ = 5) = F´ (5) ¡F´ ¡5¡¢= 0;4032:
b) La probabilidad de que en total haya al menos 6 matriculas en
Ciencias más que en Humanidades es:
P (´ · 2) = F´ (2) = 0; 0271:

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

1.↑ Hamza, K. (1995). The smallest uniform upper bound on the distance between the mean and the median of the binomial and Poisson distributions. Statist. Probab. Lett. 23 21–25.
2. Obtenido de "http://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_binomial"

Categoría: Distribuciones discr etas

3. Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile (Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles).